首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷　第 3 期　Journal of Capital Normal University　No. 3
2020 年 6 月　(Natural Science Edition)　Jun. ,2020

九宫格解的一般结构*

赵世恩　刘效丽**

(首都师范大学初等教育学院,北京　100048)

摘要:有关经典九宫格解法的研究,大多涉及的是九宫格的填法,而没有使用高等数学的工具. 本文定义了九宫格的基本概念; 建立了九宫格解的 2 个必要条件,给出了一个简便的九宫格的填法;利用高等代数中的线性方程组理论,得出了九宫格解的一般表达式. 本研究属于高等代数中线性方程组理论的应用研究,证明在解决问题时,高等数学是强有力的研究工具.

关键词:九宫格;线性方程组;高等代数;Matlab

中图分类号:G623. 5　**DOI**:10. 19789/j. 1004-9398. 2020. 03. 002

0　引　言

对于经典的九宫格,要求将 1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 9 个数字填入下面的九宫格,并且满足纵向、横向、斜向 3 个数的和均等于 15.

.

对于九宫格,主要涉及以下 2 个问题:

问题 1　给定 9 个数,如何将其填入九宫格.

问题 2　如何构造纵向、横向、斜向 3 个数的和皆相等的 9 个数.

本文利用高等代数中的线性方程组理论[1],明确的给出了上面 2 个问题的答案. 具体地说,讨论的前提是去掉“填入 1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 9 个数”以及“3 个数的和皆等于 15”的限制,只要求纵向、横向、斜向 3 个数的和相等. 在这个条件下,首先给出九宫格解的定义并建立九宫格解的 2 个必要条件;其次,根据这 2 个必要条件,讨论九宫格的一般填法;最后,利用线性方程组理论给出九宫格解的一般表达式.

首先介绍一些基本概念.

定义 0.1　设 $x_1,x_2,...,x_9,k \in \mathbf{R}$, 将 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 9 个数依次填入如下九宫格当中:

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

.

如果满足每行元素之和、每列元素之和以及 2 条对角线元素之和都等于 k, 则称 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 满足 $\Delta(k)$ 条件, 也称 $x_1,x_2,\cdots,x_9,k$ 为九宫格的 1 个解.

例 1　对于熟知的九宫格,

8	1	6
3	5	7
4	9	2

.

根据定义 0.1,称 8,1,6,3,5,7,4,9,2 满足 $\Delta(15)$ 条件,或称 8,1,6,3,5,7,4,9,2,15 是九宫格的 1 个解.

定义 0.2　若将 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 9 个数依次填入九宫格,如定义 1 所示,称:

(1) x_1,x_3,x_7,x_9 所在位置为九宫格的角;

(2) x_2,x_4,x_6,x_8 所在位置为九宫格的边;

(3) x_5 所在位置为九宫格的中心, x_5 为中心元;

收稿日期:2019-04-16

* 国家自然科学基金项目(11401399); 北京市自然科学基金项目(1144008)

** 通信作者:lxlyn@263. net

(4) x_1 和 x_3 所在位置为邻角, x_1 和 x_9 所在位置为对角;

(5) x_2 和 x_4 所在位置为邻边, x_2 和 x_8 所在位置为对边;

(6) $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 9 个数中最大的元素和最小的元素分别为九宫格的最大元和最小元.

本文的框架如下:第 1 节,讨论了九宫格解的 2 个必要条件;第 2 节,在得到必要条件的基础上,讨论了九宫格的一般填法;第 3 节,给出了九宫格解的一般表达式.

1　九宫格解的 2 个必要条件

命题 1.1　设 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 满足 $\Delta(k)$ 条件, $l \in \mathbf{R}$. 则:

(1) $lx_1, lx_2, \cdots, lx_9$ 满足 $\Delta(lk)$ 条件;

(2) $x_1 + l, x_2 + l, \cdots, x_9 + l$ 满足 $\Delta(k + 3l)$ 条件.

事实上,如果 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 满足 $\Delta(k)$ 条件,则它们满足如下齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - k = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 - k = 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 - k = 0 \\ x_1 + x_4 + x_7 - k = 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 - k = 0 \\ x_3 + x_6 + x_9 - k = 0 \\ x_1 + x_5 + x_9 - k = 0 \\ x_3 + x_5 + x_7 - k = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

为了方便,给出(1)的矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

令 $\boldsymbol{A}$ 为上述方程组的系数矩阵, $x = (x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5\ \ x_6\ \ x_7\ \ x_8\ \ x_9\ \ k)'$, 则上述方程组可以写作: $\boldsymbol{A}x = 0$. 令 a_i 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列, $i = 1, 2, \cdots, 9$, 容易看到 a_i 就是 x_i 的系数构成的列向量.

下面计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 利用 Matlab 软件[2],将 $\boldsymbol{A}$ 化为简化阶梯形矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

得到 A 的秩为 7. 由线性方程组理论,可以得到如下定理:

定理 1.1　方程组(1)的自由变量个数为 3,即九宫格的解构成了 10 维线性空间中的一个 3 维子空间.

另外,从矩阵(3)的第 5 行,得到:

定理 1.2　如果 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 满足 $\Delta(k)$ 条件. 则 $3x_5 = k$.

此结论给出了九宫格解的一个必要条件.

注 1.1　根据命题 1.1,对于九宫格的一个解,对其进行平移之后仍是九宫格的解,因此不妨设 $k = 0$. 本文,在没有特别强调的情况下,均假设 $k = 0$. 此时,根据定理 1.1 和 1.2,由于 k 和 x_5 已知,方程组(1)的自由变量个数为 2,即九宫格的解构成了 8 维线性空间中的一个 2 维子空间.

通过观察例 1 可以看出,相邻两边上的元素之和等于它们所对的角上元素的 2 倍. 下面只证明 $2x_1 = x_6 + x_8$, 令

$$\boldsymbol{B} = (m\ \ a_5\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4\ \ a_7\ \ a_9\ \ a_1\ \ a_6\ \ a_8),$$

其中 $m = (-1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1)'$ 为 k 的系数. 利用 Matlab 软件,将 $\boldsymbol{B}$ 化为简化阶梯形矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

根据矩阵(4)中的第 7 行,可以得到九宫格解的另一个必要条件:

定理 1.3　如果 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ 满足 $\Delta(k)$ 条件,则 $2x_1 = x_6 + x_8$. 进一步,根据九宫格的对称性,有 $2x_3 = x_4 + x_8$, $2x_7 = x_2 + x_6$ 以及 $2x_9 = x_2 + x_4$.

注 1.2　由必要条件定理 1.2 和 1.3,可以得出很多有用的结论. 为了第 2 节讨论的方便,这里先给出 2 个推论,由于证明很简单,这里不再赘述.

推论 1.1　若九宫格中有 1 组对边或 1 组对角上的元素都是最大元,则九宫格上的所有元素都是最大元.

推论 1.2　若九宫格中角上的元素是最大元,当且仅当与其不相邻的 2 个边上的元素也是最大元.

注 1.3　根据上面的 2 个推论,不难看出最小元也有类似的结论.

2　九宫格的一般填法

事实上,可以从九宫格的最大元开始填起. 设 Λ 表示 $y_1, y_2, \cdots, y_9$ 中最大元构成的集合.

首先,由于考虑的数域是实数,因此 Λ 不是空集;

其次,对于集合 Λ, 有如下 3 个断言.

断言 2.1　Λ 中不可能只有 2 个元素. 由推论 1.1 和 1.2 便可得知.

断言 2.2　若 Λ 中含有 3 个元素,根据推论 1.1 和 1.2 以及注 1.3,该九宫格一定有如下形式

最大元	最小元	中心元
最小元	中心元	最大元
中心元	最大元	最小元

.

断言 2.3　若 Λ 中元素的个数大于 3,则 $y_1 = y_2 = \cdots = y_9$.

不妨设 y_6, y_7, y_8 以及 y_9 均属于 Λ, 下面分如下 2 种情形来讨论:

情形 1,九宫格角上没有 y_6, y_7, y_8 以及 y_9 这 4 个数,即这 4 个元都在边上,

	y_6	
y_7	中心元	y_8
	y_9	

.

则根据推论 1.1,有 $y_1 = y_2 = \cdots = y_9$;

情形 2,若九宫格角上至少有 y_6, y_7, y_8 以及 y_9 中的一个元,则根据定理 1.3,可以得到如下形式

y_6		
	中心元	y_8
	y_7	

.

此时 y_9 无论在什么位置,由推论 1.1,有 $y_1 = y_2 = \cdots = y_9$.

注 2.1　根据上面的讨论,集合 Λ 中含有元素的个数只有 1,3 或 9 这 3 种可能,而且只须讨论 Λ 中只含有 1 个元素的填法.

下面,给出九宫格具体的填法.

设 $y_1, y_2, \cdots, y_9$ 是任意给定的 9 个实数,满足 $\Delta(k)$ 条件且 $\Lambda = \{y_9\}$.

第一步:根据定理 1.2, $y_1, y_2, \cdots, y_9$ 中一定存在一个元等于这 9 个数的算术平均,不妨设为 y^*. 所在的位置一定是九宫格的中心. 此时,九宫格如下:

	y^*	

.

第二步:根据推论 1.2,最大元 y_9 不可能在角的位置. 因此 y_9 所在的位置一定是边,不妨设九宫格如下:

	y^*	
	y_9	

.

第三步:假设剩下元素中的最大元有 y_8,

(1)如果 y_8 在如下位置,

	y_8	
	y^*	
	y_9	

.

则 $y_8 + y^* + y_9 > 3y^*$,根据定理 1.2 这是不可能的;

(2)由定理 1.3,y_8 和 y_9 不能在相邻的边;

(3)y_8 和 y_9 不能相邻,不妨设九宫格如下:

	y^*	
y_8	y_9	

.

观察下面的形式

y'		
	y^*	
y_8	y_9	y''

.

其中 y' 和 y'' 是 $y_1,y_2,\cdots,y_7$ 中的 2 个元. 根据九宫格解的定义,可以得到

$$y_8 + y_9 + y'' = y' + y^* + y'',$$

$$y_8 + y_9 = y' + y^*,$$

这与 y_8 和 y_9 为 $y_1,y_2,\cdots,y_9$ 中最大和次大的 2 个数矛盾;

因此 y_8 的位置只能是如下 2 种可能:

y_8		
	y^*	
	y_9	

,

		y_8
	y^*	
	y_9	

.

第四步:根据定理 1.2 和 1.3,可以通过简单的计算,将 $y_1,y_2,\cdots,y_9$ 剩下的元素填入九宫格.

注 2.2 经过上面的讨论,完全回答了引言中的问题 1. 事实上,还可以从最小元构成的集合开始讨论. 由于方法是一样的,因此这里不再论述.

3 九宫格解的一般结构

在已知 $k = 0$ 的情况下讨论. 根据线性方程组(1),系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以简化为

$$\boldsymbol{D} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9).$$

利用 Matlab 软件,将 $\boldsymbol{D}$ 化为简化阶梯形矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

容易得到如下定理:

定理 3.1 九宫格相邻的角和边上的元素可以作为自由变量,若分别令

$$\begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

得到解的一般结构为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

其中 k_1,k_2 为任意实数. 如果将上面解的结构和九宫格每个元素的位置对应起来,则得到如下形式:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} =$$

$$k_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

注 3.1 容易看到,式(6)右边的 2 个 3 × 3 矩阵是分别关于主对角线和副对角线反对称的形式,也恰恰是 $k=0$ 时九宫格解空间的一组基底;进一步,对于 $k\neq 0$ 的情况,将方程组(1)写成如下非齐次线性方程组的形式:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=k \\ x_4+x_5+x_6=k \\ x_7+x_8+x_9=k \\ x_1+x_4+x_7=k \\ x_2+x_5+x_8=k \\ x_3+x_6+x_9=k \\ x_1+x_5+x_9=k \\ x_3+x_5+x_7=k \end{cases}, \tag{7}$$

根据线性方程组理论,只需式(7)的导出组的基础解系加上它的一个特解,便可得到所有满足 $\Delta(k)$ 条件的解,即九宫格解的一般结构为:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} = k_1\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{k}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 为任意实数.

由此,只要确定上面的 k_1,k_2 以及 k,就能够构造出九宫格所有的解,这也就解决了引言中的问题 2. 事实上,对于例 1 中的九宫格,有如下表示形式:

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} = 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (-3)\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 5\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

参 考 文 献

[1] 丘维声. 高等代数[M]. 北京:科学出版社,2013.
[2] 张志涌,杨祖樱. MATLAB 教程[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2015.

The Structure of Solutions for Squared Figure

ZHAO Shien　LIU Xiaoli

(Elementary Education College, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract: For the solution of the classical squared figures, people have carried out research deeply. However, most of the previous studies were limited to the filling of the squared figures, and did not use the tools of higher mathematics. In this paper, we first give some basic concepts of squared figures. Second, we obtain two necessary conditions of the solutions for Squared Figures. On this basis, we discuss some examples. Especially, for any given nine real numbers, we give a method to fill in the squared figures. Finally, using the theory of linear equations in advanced algebra, we established the general structure of solutions for Squared Figures. These studies can be regarded as the application in higher algebra the theory of linear equations. We can also see that in solving the problem, the advanced mathematics provides a powerful research tool.

Keywords: squared figure; theory of linear equations; advanced algebra; Matlab