中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 10 期: 1377～1388

SCIENTIA SINICA Mathematica

《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

论 文

黎曼ζ-函数之二: 算子及其指标

献给杨乐先生80华诞

葛力明

中国科学院数学与系统科学研究院, 北京100190/ 美国新罕布什尔大学

E-mail: liming@math.ac.cn

收稿日期: 2019-07-31; 接受日期: 2019-08-03; 网络出版日期: 2019-09-02

摘要 作为$\Omega = \{s : \mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}\}$上的有界函数，$\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)$在哈代空间$H^2(\Omega)$上乘积作用诱导的有界线性算子的指标为零的充分必要条件是黎曼假设成立；通过KS-(逆)变换，这一结果对应到希尔伯特空间$L^2([1,\infty))$上的某乘法卷积算子的一个等价命题，该命题的一种离散表述是：算子$A_\zeta = (\frac{1}{mn}\{\frac{m}{n+1}\})_{m,n\geqslant 1}$作用在$l^2(\mathbb{N})$上的指标为零当且仅当黎曼假设成立。对Dirichlet L-函数也有类似结果。应用KS-变换等手段，文章中将给出这些结果的证明细节。

关键词 算子指标 KS-变换 L-函数 黎曼假设

MSC (2010) 主题分类 主要30H, 47S

1 引言

这是我们研究黎曼ζ-函数系列文章的第二篇，我们沿用已出现过的定义和记号，为阅读方便，我们简要回顾一下和此文相关的概念。

在论文“之一”[5]中，我们引入了KS-变换，一种与自然数乘法结构相关的Fourier变换，其定义如下：

$$\begin{aligned}&\text{当 } f \text{ 的支撑集在 } (0,1] \text{ 中时, 定义 } (\mathfrak{K}f)(s) = \int_0^1 f(x)x^s d^*x;\\ &\text{当 } f \text{ 的支撑集在 } [1,\infty) \text{ 中时, 定义 } (\mathfrak{K}f)(s) = \int_1^\infty f(x)x^{1-s} d^*x,\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中$d^*x = \frac{dx}{x}$，$(\mathfrak{K}f)(s)$就是$f(x)$的**KS-变换**。

英文引用格式: Ge L M. On the Riemann zeta function, II: operators and their indices (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1377–1388, doi: 10.1360/SSM-2019-0195

KS-变换建立了实数乘法半群$[1,\infty)=\{x:x\in\mathbb{R},x\geqslant 1\}$和复半平面$\Omega=\{s=\sigma+it:\sigma,t\in\mathbb{R},\sigma\geqslant\frac{1}{2}\}$之间的对偶关系，此文中$[1,\infty)$表示带有半群结构的代数。同时，KS-变换是希尔伯特空间$L^2([1,\infty))$和哈代空间$H^2(\Omega)$之间的酉算子，而且该算子保持了相关的函数空间之间由实数的乘法卷积和复数点点相乘诱导出的代数结构的同构。

利用KS-变换我们给出了黎曼假设（见[9]）成立的有关算子指标的等价命题，从而算子理论为研究黎曼ζ-函数和自然数的乘法结构提供了新思路。

回顾在[5]中我们对（稠定无界）线性算子定义的指标：

定义 对$H^2(\Omega)$（或任意希尔伯特空间）上的稠定算子T，假设T^*也稠定，且$\ker(T)$和$\ker(T^*)$之一维数有限，我们定义T的指标为

$$\mathrm{Ind}(T)=\dim\ker(T)-\dim\ker(T^*).$$

对某希尔伯特空间上的Fredholm算子F而言，其值域总是假设为闭子空间，而我们这里的算子的值域一般不是闭的，我们借用“指标”这个概念来定义非Fredholm算子的指标，当算子具有Fredholm性质时，我们上面的定义和原来的Fredholm算子的指标是一致的（参见[1]）。

当$\psi(s)$在Ω内解析时，定义由ψ诱导的$H^2(\Omega)$上的乘法算子$M_\psi:\varphi(s)\to\psi(s)\varphi(s)$，当$\psi$在$\Omega$上一致有界时，$M_\psi$为$H^2(\Omega)$上的有界线性算子。在[5]中，我们证明了如下的定理:

定理 1 设$\phi(s)\in H^2(\Omega)$，如果$\ker(M_\phi^*)=0$（或M_ϕ的值域稠密），等价地$\mathrm{Ind}(M_\phi)=0$，则$\phi(s)$在$\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$ 时非零。

可以证明上面的定理对Ω上至多多项式增长的解析函数也成立。我们注意到（见[5, 注记13]）定理1的逆命题对黎曼ζ-函数也成立，也就是如下定理。

定理 2 设$\phi(s)=\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)$，则黎曼假设成立当且仅当$M_\phi$作用在$H^2(\Omega)$上有稠密的值域，或等价于$\mathrm{Ind}(M_\phi)=0$。

由$\zeta(s)$的性质，不难知道定理中的$\phi(s)$在Ω上一致有界，即M_ϕ是有界线性算子。我们后面需要用到一些黎曼ζ-函数和Dirichlet L-函数的基本性质，可以参见解析数论教材，例如[8]。下面的定理是定理2的推广。

定理 3 设χ是模q（$q\geqslant 2$）的非主Dirichlet特征。设$\psi(s)=\frac{1}{s}L(s,\chi)$，则对$L(s,\chi)$的广义黎曼假设成立当且仅当$H^2(\Omega)$上的有界线性算子$M_\psi$有稠密的值域，或等价于$\mathrm{Ind}(M_\psi)=0$。

在本文中，我们首先将利用表达式$\zeta(s)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$和$L(s,\chi)^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}$，以及Möbius函数$\mu$的性质给出上面两个定理的详细证明。

然后，我们考虑算子的离散化。记$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$，$l^2(\mathbb{N})$为$\mathbb{N}$上（绝对值）平方可和函数构成的希尔伯特空间。在文[5]中，类似于上面两个定理，我们列出了如下两个定理[5, 定理18、19]的结论，本文中我们也将给出详细证明。

定理 4 设χ为模q（$q\geqslant 2$）的非主Dirichlet特征，记$S(x)=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)$（对$x\geqslant 1$）。则算子$A=(\frac{1}{m}S(\frac{m}{n}))_{m,n}$是$l^2(\mathbb{N})$上的有界线性算子，且$L(s,\chi)$在$\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}$时非零当且仅当$A$的值域在$l^2(\mathbb{N})$中稠，或等价地$\mathrm{Ind}(A)=0$。

在上面的定理中，我们有$S(x)$一致有界。对于$S(x)$无界的情形（即χ为主特征时），我们在下面只对黎曼ζ-函数给出相应的命题。更一般的结论类似，这里从略。

定理 5　定义算子

$$A_\zeta = (\frac{1}{mn}\{\frac{m}{n+1}\})_{m,n\geqslant 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \end{pmatrix},$$

则

1. A_ζ是$l^2(\mathbb{N})$上的Hilbert-Schmidt算子；
2. $\ker(A_\zeta) = \{0\}$；
3. $\mathrm{Ind}(A_\zeta) = 0$（或$A_\zeta$在$l^2(\mathbb{N})$中的值域稠密）当且仅当黎曼假设成立；
4. 向量$(1,0,0,\ldots)$在A_ζ的值域的闭包里当且仅当黎曼假设成立；
5. 若A_ζ可上三角化，则黎曼假设成立。

下一节我们罗列几个引理及预备知识，第3节给出定理2和定理3的证明，第4节考虑离散化，给出定理4的证明，文章的最后一节给出定理5的证明。当然我们定理中涉及的算子都是有界线性的，从[4]中我们不难看出无界线性算子也是重要的研究对象，特别是对应于$[1,\infty)$的乘法结构的微分算子$\partial = -x\frac{d}{dx}$，而其诱导的Laplace算子$\Delta = \partial\partial^*$的谱分解是研究调和分析，或标准正交基的基础，相关的研究将在后续文章中展开。

该文的写作过程中得到了张汉斌博士和吴冬生同学的帮助，在此特表感谢。

2　预备知识

这节中所有列出的结果都是解析数论中的基本知识，可参见[8]。

设$\Omega = \{s = \sigma + it : \sigma \geqslant \frac{1}{2}, t \in \mathbb{R}\}$，“$\Omega$内”一般指$\Omega$的内部，不包含临界线$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$。我们考虑哈代空间$H^2(\Omega)$，那么当$F \in H^2(\Omega)$时，$\|F\|^2 = \sup_{\sigma>\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\sigma+it)|^2 dt < \infty$，此时$F$在$\Omega$内解析且在临界线$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$处的非切向极限几乎处处存在，所以可以定义$F$在$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$上的值，并且满足$\|F\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\frac{1}{2}+it)|^2 dt$。

对任意给定$q \geqslant 2$，选取一个模q的非主Dirichlet特征χ，我们称

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

为Dirichlet L-函数。关于$L(s,\chi)$的广义黎曼假设是说，当$\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$时，$L(s,\chi) \neq 0$。

下面我们列出本文中将频繁用到的几个引理。

引理 6 假定黎曼假设（广义黎曼假设）成立。则对任意$\varepsilon > 0$，

$$\zeta(s) = O(|s|^{\varepsilon}) \quad \left(\text{相应地，} L(s,\chi) = O(|s|^{\varepsilon})\right)$$

对$s \in \Omega$一致地成立，其中O中蕴含的常数只与ε（相应地，只与ε和q）有关。

引理 7 黎曼假设（广义黎曼假设）成立等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \quad \left(\text{相应地，} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\chi(n)}{n^s}\right)$$

在Ω内内闭一致收敛，且收敛到$\frac{1}{\zeta(s)}$（相应地，$\frac{1}{L(s,\chi)}$）。

这里我们的“内闭一致收敛”是指在Ω内的任意紧子集上一致收敛。

引理 8 假定黎曼假设（广义黎曼假设）成立，则对任意的$\varepsilon > 0$，$\delta > 0$，我们有

$$\sum_{l=1}^{N} \mu(l) l^{-s} = O\left((|t|+1)^{\delta}\right) \qquad \left(\text{相应地，} \sum_{l=1}^{N} \mu(l)\chi(l) l^{-s} = O\left((|t|+1)^{\delta}\right)\right)$$

对任意的$N \in \mathbb{N}$和$s \in \{\sigma + it : \sigma \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\}$一致成立(常数只依赖于$\varepsilon, \delta$)。特别地，我们有

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O\left((|t|+1)^{\delta}\right) \qquad \left(\text{相应地，} \frac{1}{L(s,\chi)} = O\left((|t|+1)^{\delta}\right)\right)$$

对$s \in \{\sigma + it : \sigma \geqslant \frac{1}{2} + \varepsilon\}$一致成立，其中蕴含的常数只依赖于$\varepsilon, \delta$。

下面两个引理是函数ξ的Hadamard因式分解。

引理 9 对于整函数$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$，我们有

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}{}'(1 - \frac{s}{\rho}),$$

其中ρ过$\xi(s)$的所有零点（即$\zeta(s)$的非平凡零点）。这里的无穷乘积$\prod'$是根据ρ和$1-\rho$配对后绝对收敛。

引理 10 对于整函数$\xi(s,\chi) = (\frac{\pi}{q})^{-\frac{s+\delta}{2}}\Gamma(\frac{s+\delta}{2})L(s,\chi)$，其中

$$\delta = \begin{cases} 0, \ \chi(-1) = 1; \\ 1, \ \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

我们有

$$\xi(s,\chi) = \xi(0,\chi)\prod_{\rho}{}'(1 - \frac{s}{\rho}),$$

其中ρ过$L(s,\chi)$的所有非平凡零点。由于$\rho, 1-\rho$同时是$L(s,\chi)$的零点，上面的无穷乘积通过这样的零点配对后绝对收敛。

下面这个引理是泛函分析中的常用结果，我们应用时的空间是希尔伯特空间，引理的证明可参见[6]。

引理 11 设$\mathcal{V}$是一个Banach空间，Z是$\mathcal{V}$的一个凸子集，则Z在$\mathcal{V}$中的范数闭包等于其弱拓扑闭包。

3 定理2和定理3的证明

定理2和定理3中的结论的充分性已在[5]中给出（见定理1），下面我们只要证明必要性。

我们先给出几个需要用到的引理。

引理 12 对$n \geqslant 0$，$\frac{1}{s}(1-\frac{1}{s})^n$在$H^2(\Omega)$中两两正交，且$\|\frac{1}{s}(1-\frac{1}{s})^n\|_{H^2(\Omega)}=1$。

证明 设$s=\frac{1}{2}+iy$，容易验证，当$m>n$时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}(1-\frac{1}{s})^m\overline{\frac{1}{s}(1-\frac{1}{s})^n}dy=0.$$

同时，我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}(1-\frac{1}{s})^n\overline{\frac{1}{s}(1-\frac{1}{s})^n}dy=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(2y)^2}dy=1.$$ □

后续文章中我们证明引理中的函数构成$H^2(\Omega)$的一组标准正交基。

在[5, 例9]中，我们给出了下面结果的描述和证明。

引理 13 函数簇$\{\frac{1}{sa^s}\mid a\geqslant 1\}$的线性组合在$H^2(\Omega)$中稠密。

定理2的证明： 假定黎曼假设成立，我们证明M_ϕ在$H^2(\Omega)$中的值域稠密。由引理6可知，函数$\phi(s)=\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)\in H^2(\Omega)$且在$\Omega$上一致有界。我们把证明分成以下几步。

第一步：对任意的$m\geqslant 2$，$\varepsilon>0$，我们证明

$$\frac{\phi(s)}{\phi(s+\varepsilon)}\frac{1}{s^m}\in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)},$$

这里我们用$\mathrm{Ran}(M_\phi)$来记算子M_ϕ的值域（$\overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}$为其闭包）。

为此，我们只需证明函数

$$\frac{1}{\phi(s+\varepsilon)}\frac{1}{s^m},\quad \frac{\phi(s)}{\phi(s+\varepsilon)}\frac{1}{s^m}\in H^2(\Omega).$$

由引理8可知，对任意给定的$\delta\in(0,\frac{2m-3}{2})$，存在常数$C_{\varepsilon,\delta}>0$使得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{1}{\phi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)}\frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m}\right|^2dy\\&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)^2}{(\frac{1}{2}-1+iy+\varepsilon)\zeta(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)}\frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m}\right|^2dy\\&\quad\leqslant C_{\varepsilon,\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{(1+|y|)^2}{1+|y|}(1+|y|)^\delta\frac{1}{(1+|y|)^m}\right|^2dy\\&\quad=C_{\varepsilon,\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+|y|)^{2(m-1)-2\delta}}dy\\&\quad<\infty.\end{aligned}$$

再由引理6和引理8可知，对任意给定的$\delta \in (0, \frac{2m-1}{4})$，存在常数$C'_{\varepsilon,\delta} > 0$使得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\phi(\frac{1}{2}+iy)}{\phi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)} \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2 dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{(\frac{1}{2}-1+iy)}{(\frac{1}{2}+iy)^2} \frac{(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)^2}{(\frac{1}{2}-1+iy+\varepsilon)} \frac{\zeta(\frac{1}{2}+iy)}{\zeta(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)} \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2 dy \\
&\leqslant C'_{\varepsilon,\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| (1+|y|)^\delta (1+|y|)^\delta \frac{1}{(1+|y|)^m} \right|^2 dy \\
&= C'_{\varepsilon,\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|y|)^{2m-4\delta}} dy < \infty.
\end{aligned}$$

由此“第一步”得证。

第二步：对任意的$m \geqslant 2$，我们证明

$$\frac{1}{s^m} \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}.$$

我们只需证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\phi(\frac{1}{2}+iy)}{\phi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)} \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} - \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2 dy = 0. \tag{3.1}$$

由于

$$\left| \frac{\phi(\frac{1}{2}+iy)}{\phi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)} \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} - \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2 \leqslant 2 \left| \frac{\phi(\frac{1}{2}+iy)}{\phi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)} \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2 + 2 \left| \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2,$$

根据Lebesgue控制收敛定理，我们只需说明存在$g \in L^2((-\infty, \infty))$使得

$$\left| \frac{\phi(\frac{1}{2}+it)}{\phi(\frac{1}{2}+it+\varepsilon)} \frac{1}{s^m} \right| \leqslant |g(t)|$$

对$\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$和$t \in \mathbb{R}$一致地成立。利用引理9，由于当$\mathrm{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$时，$|1 - \frac{s}{\rho}| \leqslant |1 - \frac{s+\varepsilon}{\rho}|$对$s \in \Omega$成立，所以在黎曼假设成立的情况下，我们有$|\xi(s)| \leqslant |\xi(s+\varepsilon)|$。从而

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\phi(s)}{\phi(s+\varepsilon)} \right| &= \left| \frac{s-1}{s^2} \frac{(s+\varepsilon)^2}{s-1+\varepsilon} \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+\varepsilon)} \right| \\
&\leqslant \pi^{-\frac{\varepsilon}{2}} \left| \frac{s-1}{s^2} \frac{(s+\varepsilon)^2}{s-1+\varepsilon} \right| \left| \frac{(s+\varepsilon)(1-\varepsilon-s)}{s(1-s)} \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \right| \\
&\leqslant c \left| \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \right|,
\end{aligned}$$

其中$c > 0$是一个绝对常数。又由Stirling公式可知，当$\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$时，存在与$\varepsilon$无关的常数$c' > 0$，使得

$$\left| \frac{\Gamma((s+\varepsilon)/2)}{\Gamma(s/2)} \right| \leqslant c' |s|^{\frac{1}{2}}.$$

从而，取$g(t) = cc' |\frac{1}{2} + it|^{\frac{1}{2}-m}$即满足要求。于是，(3.1)得证。

第三步：我们证明$\frac{1}{s} \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}$。由第二步，我们注意到，对任意的$m \geqslant 2$，$\frac{1}{s^m} \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}$。容易验证，对$n \geqslant 2$,

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s}(1 - \frac{1}{s})^n \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}.$$

根据引理12，我们知道

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s}(1 - \frac{1}{s})^n \xrightarrow{\text{弱}} \frac{1}{s}.$$

于是，$\frac{1}{s}$落在$\mathrm{Ran}(M_\phi)$的弱拓扑闭包中。再由引理11，可知

$$\frac{1}{s} \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}.$$

第四步：对任意的$a \geqslant 1$，我们证明

$$\frac{1}{sa^s} \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\phi)}. \tag{3.2}$$

由第三步可知，对任意的$\varepsilon > 0$，都存在$G \in H^2(\Omega)$使得

$$\left\| \frac{1}{s} - \phi(s)G(s) \right\|_{H^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

容易知道函数$G(s)\frac{1}{a^s}$和$\phi(s)G(s)\frac{1}{a^s}$都在$H^2(\Omega)$中，并且我们有

$$\left\| \frac{1}{sa^s} - \phi(s)g(s)\frac{1}{a^s} \right\|_{H^2(\Omega)} = \frac{1}{a^{1/2}} \left\| \frac{1}{s} - \phi(s)G(s) \right\|_{H^2(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{a^{1/2}} \leqslant \varepsilon.$$

从而(3.2)得证。

综上，由引理13可知M_ϕ在$H^2(\Omega)$中有稠密的值域。 □

定理3的证明：假定广义黎曼假设成立，我们要证明M_ψ在$H^2(\Omega)$中的值域稠密。由引理6可知，函数$\psi(s) = \frac{1}{s}L(s,\chi) \in H^2(\Omega)$ 且在Ω上一致有界。我们把证明分成以下几步。

第一步：对任意的$m \geqslant 2$，$\varepsilon > 0$，我们证明

$$\frac{\psi(s)}{\psi(s+\varepsilon)}\frac{1}{s^m} \in \mathrm{Ran}(M_\psi).$$

利用引理6和8，类似定理2证明中的第一步，我们有$\frac{1}{\psi(s+\varepsilon)}\frac{1}{s^m}$和$\frac{\psi(s)}{\psi(s+\varepsilon)}\frac{1}{s^m}$都属于$H^2(\Omega)$，于是得到第一步的结论成立。其他各步也和定理2证明中的类似，我们仅给出思路，省略部分细节。

第二步：对任意的$m \geqslant 2$，我们证明

$$\frac{1}{s^m} \in \overline{\mathrm{Ran}(M_\psi)}.$$

我们只需证明

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\psi(\frac{1}{2}+iy)}{\psi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)} \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} - \frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m} \right|^2 dy = 0. \tag{3.3}$$

由于

$$\left|\frac{\psi(\frac{1}{2}+iy)}{\psi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)}\frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m}-\frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m}\right|^2\leqslant 2\left|\frac{\psi(\frac{1}{2}+iy)}{\psi(\frac{1}{2}+iy+\varepsilon)}\frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m}\right|^2+2\left|\frac{1}{(\frac{1}{2}+iy)^m}\right|^2,$$

根据Lebesgue控制收敛定理，我们只需说明存在$g\in L^2((-\infty,\infty))$使得

$$\left|\frac{\phi(\frac{1}{2}+it)}{\phi(\frac{1}{2}+it+\varepsilon)}\frac{1}{s^m}\right|\leqslant|g(t)|$$

对$\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$和$t\in\mathbb{R}$一致地成立。利用引理10和Stirling公式，类似定理2中第二步的证明，我们有

$$\left|\frac{\psi(s)}{\psi(s+\varepsilon)}\right|\leqslant c|s|^{\frac{1}{2}},$$

其中$c>0$是一个绝对常数。从而，取$g(t)=c|\frac{1}{2}+it|^{\frac{1}{2}-m}$即满足要求。于是(3.3)得证。

第三步：我们有$\frac{1}{s}\in\overline{\mathrm{Ran}(M_\psi)}$。证明同定理2证明中的第三步。

第四步：对任意的$a\geqslant 1$，我们有$\frac{1}{sa^s}\in\overline{\mathrm{Ran}(M_\psi)}$。证明同定理2证明中的第四步。

综上，由引理13可知M_ψ在$H^2(\Omega)$中有稠密的值域。 □

4 定理4的证明

我们沿用定理4中的记号，设χ,q和$L(s,\chi)$给定并满足定理4中的条件。

记$\mathcal{M}$为$L^2(0,1]$中在每个区间$(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$ $(n\in\mathbb{N})$上几乎处处是常数的函数全体，容易验证$\mathcal{M}$是$L^2(0,1]$的闭子空间。

对任意的$x\in(0,1]$和$l\in\mathbb{N}$，定义$g_l(x)=S(\frac{1}{xl})=S([\frac{1}{xl}])$,这里$S(x)=\sum_{n\leqslant x}\chi(n)$。当$x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$时，我们有$g_l(x)=S([\frac{n}{l}])=S(\frac{n}{l})$，从而可得$g_l\in\mathcal{M}$。对任意的$l\in\mathbb{N}$，$s\in\Omega$，通过计算可得

$$G_l(s)=\mathfrak{K}(g_l)(s)=l^{-s}\frac{L(s,\chi)}{s},$$

由KS-变换的等距性知$G_l\in H^2(\Omega)$。

在下文中，函数$\frac{1}{s}$出现频率较高，我们记$E(s)=\frac{1}{s},s\in\Omega$，则$E\in H^2(\Omega)$。特别地，我们注意到$E$是$L^2((0,1])$中常值函数1的KS-变换。

我们先证明两个引理。

引理 14 下面命题等价:

1. 对$L(s,\chi)$的广义黎曼假设成立;
2. $1\in\overline{\mathrm{span}\{g_l:l\in\mathbb{N}\}}$;
3. $\mathcal{M}=\overline{\mathrm{span}\{g_l:l\in\mathbb{N}\}}$.

证明　(1)⇒(2)：利用$L^2((0,1])$到$H^2(\Omega)$的KS-变换，由于$\mathfrak{K}(1)(s)=E(s)=\frac{1}{s}$，我们只需说明$E\in\overline{\operatorname{span}\{G_n:n\in\mathbb{N}\}}$。

令

$$H_{N,\varepsilon}(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{\varepsilon}}G_n(s).$$

我们首先证明，当$N\to\infty$时，

$$H_{N,\varepsilon}(s)\overset{H^2(\Omega)}{\longrightarrow}H_{\varepsilon}(s)=\frac{L(s,\chi)}{L(s+\varepsilon,\chi)}\frac{1}{s}.$$

由引理7知，当$N\to\infty$时，$H_{N,\varepsilon}(s)$在Ω内逐点收敛于$H_{\varepsilon}(s)$。当$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$时，根据引理6和8，对任意的$\delta\in(0,\frac{1}{4})$，我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{\varepsilon}}G_n(s)-\frac{L(s,\chi)}{L(s+\varepsilon,\chi)}\frac{1}{s}\right|=\left|\frac{L(s,\chi)}{s}\right|\left|\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)\chi(n)}{n^{s+\varepsilon}}-\frac{1}{L(s+\varepsilon,\chi)}\right|\leqslant c_{\varepsilon,\delta}(1+|t|)^{\delta}\frac{|s|^{\delta}}{|s|},$$

其中$c_{\varepsilon,\delta}>0$是一个只与ε,δ有关的常数。于是，利用Lebesgue控制收敛定理，可以证明，当$N\to\infty$时，

$$H_{N,\varepsilon}(s)\overset{H^2(\Omega)}{\longrightarrow}H_{\varepsilon}(s)=\frac{L(s,\chi)}{L(s+\varepsilon,\chi)}\frac{1}{s}.$$

从而$H_{\varepsilon}\in\overline{\operatorname{span}\{G_n:n\in\mathbb{N}\}}$。

接下来，我们证明当$\varepsilon\to0^+$时，$H_{\varepsilon}\overset{H^2(\Omega)}{\longrightarrow}E$。类似定理3证明中的第二步，当$\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$时，存在一个与$\varepsilon$无关的常数$c>0$使得

$$\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s+\varepsilon,\chi)}\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\right|\leqslant\left|\frac{L(s,\chi)}{L(s+\varepsilon,\chi)}\frac{1}{s}\right|+\left|\frac{1}{s}\right|\leqslant c|s|^{-3/4}+|s|^{-1}.$$

于是，由Lebesgue控制收敛定理知，当$\varepsilon\to0^+$时，$H_{\varepsilon}\overset{H^2(\Omega)}{\longrightarrow}E$。从而$E\in\overline{\operatorname{span}\{G_n:n\in\mathbb{N}\}}$，故(2)成立。

(2)⇒(3)：我们只需证明$\mathcal{M}\subseteq\overline{\operatorname{span}\{g_l:l\in\mathbb{N}\}}$。注意到$\mathcal{M}=\overline{\operatorname{span}\{\chi_{(0,\frac{1}{n})}|n\in\mathbb{N}\}}$，我们只需证明$\chi_{(0,\frac{1}{n})}\in\overline{\operatorname{span}\{g_l:l\in\mathbb{N}\}}$ 对任意$n\in\mathbb{N}$成立。

假设$1\in\overline{\operatorname{span}\{g_l:l\in\mathbb{N}\}}$，即$E\in\overline{\operatorname{span}\{G_l:l\in\mathbb{N}\}}$（简记为$\mathcal{K}$）。

对任意$k\in\mathbb{N}$，定义算子$M_{\frac{1}{k}}:H^2(\Omega)\to H^2(\Omega)$，满足$M_{\frac{1}{k}}(F)=(\frac{1}{k})^{s-\frac{1}{2}}F$，易验证$M_{\frac{1}{k}}$是等距算子。注意到$M_{\frac{1}{k}}(G_l)=(\frac{1}{k})^{-\frac{1}{2}}G_{lk}$，我们有$M_{\frac{1}{k}}(\mathcal{K})\subseteq\mathcal{K}$，特别地，$M_{\frac{1}{k}}(E)\in\mathcal{K}$。由于$\mathfrak{K}(\chi_{(0,\frac{1}{n})})=(\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}M_{\frac{1}{n}}(E)$，故$\mathfrak{K}(\chi_{(0,\frac{1}{n})})\in\mathcal{K}$。由$\mathfrak{K}$的等距性我们得到$\chi_{(0,\frac{1}{n})}\in\overline{\operatorname{span}\{g_l:l\in\mathbb{N}\}}$，因此结论(3)成立。

(3)⇒(1)：首先，我们显然有(3)蕴含(2)，故只需证明(2)⇒(1)。

假设(2)成立，利用KS-变换可知$E\in\overline{\operatorname{span}\{G_l:l\in\mathbb{N}\}}$，即存在一列函数$F_n\in\operatorname{span}\{G_l:l\in\mathbb{N}\}$，使得当$n\to\infty$时，

$$\|F_n-E\|_{H^2(\Omega)}\to0.$$

如果对$L(s,\chi)$的广义黎曼假设不成立，即存在s' 满足$\mathrm{Re}(s')>1/2$且$L(s',\chi)=0$。从而对任意的$l\in\mathbb{N}$，我们有$G_l(s')=0$。故对任意的$n\in\mathbb{N}$，$F_n(s')=0$。

记$f_n \in L^2((0,1])$为F_n的KS-逆变换。由Hölder不等式和KS-变换的等距性，我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{s'}\right| = \left|F_n(s') - \frac{1}{s'}\right| &= \left|\int_0^1 (f_n(x)-1)x^{s'-1}dx\right| \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f_n(x)-1|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |x^{s'-1}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|F_n - E\|_{H^2(\Omega)} \left(\int_0^1 |x^{s'-1}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

这样可得$\frac{1}{s'} = 0$，显然矛盾，所以(2)⇒(1)成立。 □

在给出第二个引理之前，我们先引入一些记号。记$\mathcal{H}$为希尔伯特空间$l^2(\mathbb{N}, \frac{1}{n(n+1)})$，即

$$a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \|(a_n)_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n(n+1)} < \infty.$$

对$l \in \mathbb{N}$，记$\gamma_l = (g_l(1), g_l(\frac{1}{2}), \cdots) = \big(S(\frac{n}{l})\big)_{n\in\mathbb{N}}$，$\gamma_0 = (1,1,\cdots)$。我们有如下引理。

引理 15 下列命题等价：

1. 对$L(s,\chi)$的广义黎曼假设成立；
2. $\gamma_0 \in \overline{\operatorname{span}\{\gamma_l : l \in \mathbb{N}\}}$；
3. $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\{\gamma_l : l \in \mathbb{N}\}}$。

证明 定义算子U：$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}$满足

$$U(f) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad f \in \mathcal{M},$$

这里f在$(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$上几乎处处等于$b_n$。易验证$U$是$\mathcal{M}$到$\mathcal{H}$上的等距同构。注意到$U(1) = \gamma_0$ 且$U(g_l) = \gamma_l$，利用引理14可证此引理。 □

下面我们证明定理4。

定理4的证明：记号如前，容易证明A是$l^2(\mathbb{N})$上的有界算子。由引理15知，广义黎曼假设对$L(s,\chi)$成立当且仅当$\overline{\operatorname{span}\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}} = l^2(\mathbb{N}, \frac{1}{n(n+1)})$，或等价地，对任意的$j \in \mathbb{N}$，$\mathbb{N}$上$j$处的特征函数$\delta_j \in \overline{\operatorname{span}\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}}$。

记A的列向量组为$\beta_1, \beta_2, \cdot\cdot\cdot, \beta_k, \cdots$,则$\beta_k(n) = \frac{1}{n}S(\frac{n}{k}) = \frac{1}{n}\gamma_k(n)$。易验证“$\delta_j$包含在$\operatorname{span}\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$在$l^2(\mathbb{N}, \frac{1}{n(n+1)})$中的闭包”等价于“$\frac{\delta_j}{j}$包含在$\operatorname{span}\{\beta_k : k \in \mathbb{N}\}$在$l^2(\mathbb{N})$中的闭包”，后者即为$\operatorname{Ran}(A)$在$l^2(\mathbb{N})$中的闭包。故关于$L(s,\chi)$的广义黎曼假设成立当且仅当$\overline{\operatorname{Ran}(A)} = l^2(\mathbb{N})$。 □

注记1 算子A的有界性的一个巧妙证明由顾维辰同学给出，思路如下：设c为$S(x)$的绝对值的上界，定义算子$B = (\frac{c}{\max\{m,n\}})_{m,n\geqslant 1}$，不难验证$\|A\| \leqslant \|B\|$。应用哈代不等式等技巧，可证$\|B\| \leqslant 4c$。

5 定理5的证明

在这一节，我们证明定理5。为了简便起见，把A_ζ记作A。

(1)的证明： 对任意的$x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N})$，我们有$(Ax)_n=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{nj}\{\frac{n}{j+1}\}x_j$，故

$$\|Ax\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\{\frac{n}{j+1}\}x_j)^2\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2})(\sum_{j=1}^{\infty}x_j^2)\leqslant(\frac{\pi^2}{6})^2\|x\|^2,$$

因此$\|A\|\leqslant\frac{\pi^2}{6}$。

记δ_j只在第j个位置取1，其他位置取零的向量，则$\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty}$是$l^2(\mathbb{N})$的一组标准正交基。由

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|A\delta_j\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{jn}\{\frac{n}{j+1}\}\right)^2\leqslant\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

可得A是$l^2(\mathbb{N})$上的Hilbert-Schmidt算子。

(2)的证明： 我们只需证明$\mathrm{Ran}(A^*)$在$l^2(\mathbb{N})$中稠密。因为$A=(\frac{1}{mn}\{\frac{m}{n+1}\})_{m,n}$，所以我们有$A^*=(\frac{1}{mn}\{\frac{n}{m+1}\})_{m,n}$。定义$B=(b_{m,n})_{m,n}$如下，对任意的$m\geqslant1$，$b_{m,m}=1$，$b_{m+1,m}=-1$，对其他的$(m,n)$，$b_{m,n}=0$，即

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&\cdots\\-1&1&0&0&0&0&0&0&\cdots\\0&-1&1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&0&-1&1&0&0&0&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\end{pmatrix}.$$

注意到对任意的$x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N})$，我们有$Bx=(-x_{n-1}+x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，这里$x_0=0$。从而易验证$B\in\mathcal{B}(l^2(\mathbb{N}))$，即有界线性。故$\mathrm{Ran}(A^*B)\subseteq\mathrm{Ran}(A^*)$。由于当$n<m$时，$(A^*B)_{m,n}=(A^*)_{m,n}-(A^*)_{m,n+1}=0$且$(A^*B)_{m,m}=\frac{1}{m(m+1)}$，因此$A^*B$是主对角线上恒不为零的上三角矩阵。通过做有限个列向量的线性组合，不难得到，对任意的$m\in\mathbb{N}$，$\delta_m\in\mathrm{Ran}(A^*B)\subseteq\mathrm{Ran}(A^*)$，故$\overline{\mathrm{Ran}(A^*)}=l^2(\mathbb{N})$。

(3)和(4)的证明： 设$\alpha_k=\left(\{\frac{n}{k}\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$。根据[3]中的经典结果可以知道，黎曼假设成立当且仅当

$$\text{对任意的}l\in\mathbb{N}，\delta_l\in\overline{\mathrm{span}\{\alpha_k:k\in\mathbb{N}\}}^{l^2(\mathbb{N},\frac{1}{n(n+1)})}$$

当且仅当$\delta_1\in\overline{\mathrm{span}\{\alpha_k:k\in\mathbb{N}\}}^{l^2(\mathbb{N},\frac{1}{n(n+1)})}$。设$A$的列向量组为$\{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$，则$\beta_k(n)=\frac{1}{k}\frac{\gamma_{k+1}(n)}{n}$。容易证明，对任意的$l\in\mathbb{N}$，我们有$\delta_l\in\overline{\mathrm{span}\{\alpha_k:k\in\mathbb{N}\}}^{l^2(\mathbb{N},\frac{1}{n(n+1)})}$当且仅当$\frac{\delta_l}{l}\in\overline{\mathrm{span}\{\beta_k:k\in\mathbb{N}\}}^{l^2(\mathbb{N})}$。故黎曼假设成立当且仅当

$$\text{对任意的}l\in\mathbb{N}，\delta_l\in\overline{\mathrm{span}\{\beta_k:k\in\mathbb{N}\}}^{l^2(\mathbb{N})}$$

当且仅当$\delta_1\in\overline{\mathrm{span}\{\beta_k:k\in\mathbb{N}\}}^{l^2(\mathbb{N})}$。于是(3)和(4)得证。

(5)的证明： 设A可上三角化，即存在可逆算子$T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$，使得$T^{-1}AT$是上三角矩阵。由于

$$\overline{\mathrm{Ran}(A^*)}=l^2(\mathbb{N})\ \text{当且仅当}\ \ker(A)=\{0\}\ \text{当且仅当}\ \ker(T^{-1}AT)=\{0\},$$

根据(2)知$\overline{\mathrm{Ran}(A^*)} = l^2(\mathbb{N})$，所以$T^{-1}AT$主对角线上元素非零，从而$\overline{\mathrm{Ran}(A)} = \overline{\mathrm{Ran}(T^{-1}AT)} = l^2(\mathbb{N})$。于是由(3)知，$A$可上三角化蕴含黎曼假设成立。 □

注记2 定理5简化了Beurling [3]关于黎曼假设和某类函数在希尔伯特空间稠密性等价的命题，Beurling的结果也由Baez-Duarte [2]改进到可数函数生成的稠密性上。

作为“之一”[5]的补充，该文只是提供了前文中主要结果的证明细节，我们在后续研究中将更多地从调和分析的角度深入展开，寻求更自然的离散化过程和微分算子、特别是Laplace算子的谱结构，从而更有效地得到黎曼ζ-函数的零点分布信息及黎曼假设对应的正定性（见[7]）。

参考文献

1 Atiyah M, Singer I M. The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963): 422-433.

2 Baez-Duarte L. A strengthening of the Nyman-Beurling criterion for the Riemann hypothesis, Atti Acad. Naz. Lincei, 14(2003): 5-11.

3 Beurling A. A closure problem related to the Riemann zeta function, Proc. Natl. Acad. Sci., 41(1955): 312-314.

4 葛力明. 数与形—一个说不尽的话题，数学所讲座2010，科学出版社，2012: 1-7.

5 葛力明. 黎曼ζ-函数之一：*KS*-变换，数学学报，62(2019): 673-686.

6 Kadison R, and Ringrose J. “Fundamentals of the Operator Algebras,” vols. I and II, Academic Press, Orlando, 1983 and 1986.

7 Li X. The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis. J Number Theory, 65(1997): 325-333.

8 潘承洞、潘承彪. “解析数论基础”. 科学出版社，1991.

9 Riemann B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsber Berlin Akad, 1859, 671-680.

On the Riemann zeta function, II: operators and their indices

Liming Ge

Abstract On $\Omega = \{s : \mathrm{Re}(s) \geqslant \frac{1}{2}\}$, $\frac{s-1}{s^2}\zeta(s)$ is a bounded analytic function. As a multiplication operator on the Hardy space $H^2(\Omega)$, its index vanishes if and only if the Riemann hypothesis holds. Through the (inverse) KS-transform, an equivalent statement is true for certain convolution operator on the Hilbert space $L^2([1,\infty))$. A discrete formulation of such result says that the operator $A_\zeta = (\frac{1}{mn}\{\frac{m}{n+1}\})_{m,n\geqslant 1}$ has vanishing index on $l^2(\mathbb{N})$ if and only if the Riemann hypothesis is true. Similar results hold for Dirichlet L-functions and corresponding generalized Riemann hypothesis. Detailed proofs are given.

Keywords **index of operators, KS-transform, *L*-functions, Riemann hypothesis**

MSC(2010) **Mainly 30H, 47S**

doi: 10.1360/SSM-2019-0195