



退化型椭圆算子的微局部分析理论

徐超江

南京航空航天大学数学学院, 南京 211106

E-mail: xuchaojiang@nuaa.edu.cn

收稿日期: 2024-02-28; 接受日期: 2024-06-12; 网络出版日期: 2024-09-02

国家自然科学基金 (批准号: 12031006) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: 90YAH19044) 资助项目

摘要 本文首先介绍直到 21 世纪初有关退化椭圆方程的一些重要的微局部分析研究成果以及相关成果近年来在非线性动力学方程上的应用. 本文关注这些方程的微局部退化椭圆性结构, 尤其是 Boltzmann 方程和 Landau 方程的各向异性的超抛物结构以及相应的亚椭圆特性等性质. 最后介绍本文作者对几个相关问题的展望和思考.

关键词 退化椭圆算子 微局部分析 亚椭圆理论 Boltzmann 方程 Landau 方程

MSC (2020) 主题分类 35A27, 35H10, 35J70, 76P05, 82C40

1 引言

退化椭圆方程作为偏微分方程理论的一个专门研究分支开始于 20 世纪 60 年代初, 苏联数学家 Oleinik 和 Radkevich 的专著《具非负特征形式的二阶微分方程》^[38] 对这个方向早期的工作和问题背景有比较详细的介绍. 二阶线性退化椭圆方程的基本形式为

$$Lu = - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \partial_{jk}^2 u + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u + c(x)u = f(x), \quad (1.1)$$

这里 a_{jk} 、 b_j 和 c 都是定义在 $\mathbb{R}^d$ 的一个开区域 Ω 上的实值光滑函数, 其中二阶系数组成的矩阵 $(a_{jk}(x))$ 对于所有的 $x \in \Omega$ 是 $d \times d$ 非负定矩阵. 这类方程包括椭圆型方程、抛物型方程和超抛物型方程等. 本文介绍作者熟悉的关于这类退化椭圆型方程的微局部分析理论, 包括退化椭圆估计、弱解的光滑性和相应非线性问题的微局部结构等. 由于篇幅的原因, 其他一些相关的重要问题, 如退化椭圆算子的谱理论和退化椭圆边值问题, 都需要专门的文章来介绍.

2 线性算子的亚椭圆性

本节介绍 20 世纪 70 年代至 21 世纪初关于退化椭圆算子的几个经典结果, 这也是微局部分析理论的主要成果之一.

英文引用格式: Xu C J. Microlocal analysis theory of degenerate elliptic operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2025, 55: 875–888, doi: 10.1360/SSM-2024-0047

2.1 二阶次椭圆算子

首先介绍 Hörmander 型的向量场平方和算子:

$$H = - \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0, \quad (2.1)$$

这里 $X_0, X_1, \dots, X_m$ 是定义在开区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 上的光滑向量场, 满足下面的 Hörmander 条件:

$$(H) \quad \begin{cases} X_0, X_1, \dots, X_m \text{ 和它们的所有交换子 } X_\alpha = [X_{\alpha_1}, \dots, [X_{\alpha_{s-1}}, X_{\alpha_s}] \cdots] \\ \text{在 } \Omega \text{ 的每一点生成切空间.} \end{cases}$$

这里交换子 $X_\alpha, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \{0, 1, \dots, m\}^s$ 被称为 p 阶交换子, 如果 $p = 2j + (s - j)$, 其中向量场 X_0 出现 j 次. Hörmander 条件的一个精细版本是: $X_0, X_1, \dots, X_m$ 和它们所有阶数小于等于 r 的交换子 X_α 在 Ω 的每一点生成切空间, 这时候称为 r 阶 Hörmander 条件.

下面是几个典型的例子:

(1) $\mathbb{R}_x^d$ 上的 Laplace 算子

$$-\Delta_x = - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2, \quad X_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, d, \quad X_0 = 0;$$

(2) $\mathbb{R}_x^3$ 上的退化椭圆算子

$$D = -\partial_{x_1}^2 - x_1^{2k} \partial_{x_2}^2 - x_2^{2m} \partial_{x_3}^2, \quad X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = x_1^k \partial_{x_2}, \quad X_3 = x_2^m \partial_{x_3}, \quad X_0 = 0;$$

(3) $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d$ 上的热传导算子

$$T = \partial_t - \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2, \quad X_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, d, \quad X_0 = \partial_t;$$

(4) $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$ 上的 Kolmogorov 算子

$$K = \partial_t + v \cdot \nabla_x - \sum_{j=1}^d \partial_{v_j}^2, \quad X_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, d, \quad X_0 = \partial_t + v \cdot \nabla_x.$$

Hörmander 算子的主要特征是下面的次椭圆估计:

定理 2.1 假设向量场 $X_0, X_1, \dots, X_m$ 满足 r 阶 Hörmander 条件, 则存在 $\epsilon > 0$ 和 $C > 0$ 使得

$$\|\varphi\|_{H^{2\epsilon}}^2 \leq C \{ \|H\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2 \}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.2)$$

这里 H^s 是指标为 $s \in \mathbb{R}$ 的 Sobolev 空间.

特别地, 如果向量场 $X_1, \dots, X_m$ 满足 r 阶 Hörmander 条件, 则

$$\|\varphi\|_{H^\epsilon}^2 \leq C \left\{ \sum_{j=1}^m \|X_j \varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2 \right\}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (2.3)$$

由 Hörmander 条件导出次椭圆估计有很多表述形式和证明方法, 在 Hörmander 的开创性工作 [30] 以后, 有很多非常重要的工作, 例如, 次椭圆估计 (2.2) 和 (2.3) 中的最优正则指标是 $\epsilon = \frac{1}{r}$, 由 Rothschild

和 Stein^[39] 及 Nagel 等^[37] 给出, 但是其证明使用到非常精细的调和分析方法; Kohn^[32] 使用比较简单的拟微分算子交换子方法给出了不是最优指标的次椭圆估计. 后面在研究非线性方程时一般使用这个方法.

对于一般形式的由 (1.1) 定义的退化椭圆算子 L , 如果它满足下面的次椭圆估计:

$$\|\varphi\|_{H^{2\epsilon}}^2 \leq C\{\|L\varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2\}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (2.4)$$

则称其为“次椭圆算子”. Fefferman 和 Phong^[26] 给出了 L 是次椭圆算子的一个几何性条件.

定义 2.1 假设 Ω 内的一个 Lipschitz 路径 $\gamma: [0, \rho] \mapsto \Omega$, 满足

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^d \gamma_j(t) \partial_{x_j} \quad \text{以及作为矩阵有 } (\gamma_j(t) \gamma_k(t)) \leq (a_{jk}(\gamma(t)))$$

对几乎所有 $t \in [0, \rho]$ 成立, 则称 γ 为“ L -次单位路径”. 对于 $x \in \Omega$, $0 < \rho \ll 1$, 定义与算子 L 相关的各向异性球 $B_L(x, \rho) = \{y \in \Omega: \text{存在链接 } x \text{ 到 } y \text{ 的 } \Omega \text{ 内 Lipschitz “} L \text{-次单位路径”}\}$.

称 $B_L(x, \rho)$ 为“ L -次单位球”, 注意 L -次单位路径的定义仅涉及算子 L 的二阶项. $B_E(x, \rho)$ 表示通常的 Euclid 球, 则下面的 Fefferman-Phong 定理^[26].

定理 2.2 假设 $0 < \epsilon \leq 1$, 次椭圆估计 (2.4) 成立当且仅当存在 $C > 0$ 使得

$$B_E(x, \rho) \subset B_L(x, C\rho^\epsilon), \quad \forall x \in \Omega, \quad 0 < \rho \ll 1. \quad (2.5)$$

Fefferman 和 Phong^[25] 给出了一个充分必要条件, 其证明使用到微局部版本的测不准原理, 因此是研究退化型椭圆算子的最精细的工具. 另外, Oleinik 和 Radkevich^[38] 给出了一个拟微分交换子版本的充分条件: 令

$$\begin{cases} g_j(x, \xi) = \sum_{k=1}^d a_{kj}(x)(i\xi_k), & j = 1, \dots, d, \\ g_{d+\ell}(x, \xi) = |\xi|^{-1} \sum_{k,j=1}^d \frac{\partial a_{kj}(x)}{\partial x_\ell}(i\xi_k)(i\xi_j), & \ell = 1, \dots, d, \\ g_0(x, \xi) = \sum_{j=1}^d b_j(x)(i\xi_j) - \sum_{k,j=1}^d \frac{\partial a_{kj}(x)}{\partial x_j}(i\xi_k) \end{cases}$$

以及对于多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \{0, 1, \dots, 2d\}^s$, $|\alpha| = s$, $g_\alpha(x, \xi) = \{g_{\alpha_1}, \dots, \{g_{\alpha_{s-1}}, g_{\alpha_s}\} \cdots\}$ 表示相应的 Poisson 括号. 下面的条件称为 r 阶 Oleinik-Radkevich 条件:

$$(O-R) \quad |\xi|^2 \leq C \sum_{|\alpha| \leq r} |g_\alpha(x, \xi)|^2, \quad \forall (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^d, \quad |\xi| \geq R > 0.$$

定理 2.3 假设算子 L 满足条件 (O-R), 则存在 $\epsilon > 0$ 使得次椭圆估计 (2.4) 成立.

这个定理的证明相对简单一些, 因为仅需要使用拟微分的交换子计算, 是 Kohn 定理^[32] 的推广形式, 但是在这里不需要算子是向量场的平方和形式, 而且还可以推广到一般的拟微分算子.

2.2 次椭圆算子的亚椭圆性

由一致椭圆算子的光滑理论延伸到下面的亚椭圆概念.

定义 2.2 称微分算子 L 是 C^∞ 亚椭圆算子, 如果它满足: 假设 $u \in \mathcal{D}'$, 使得 $Lu \in C^\infty$, 则 $u \in C^\infty$. 进一步地, 如果 Lu 是 Gevrey 光滑或者解析光滑, 则 u 是 Gevrey 光滑或者解析光滑, 则称 L 是 Gevrey 亚椭圆算子或者解析亚椭圆算子.

对于 $1 \leq \sigma < +\infty$, 称 $f \in G^\sigma(\Omega)$ 指标为 σ 的 Gevrey 函数, 如果 $f \in C^\infty(\Omega)$, 以及存在 $C > 0$, 使得 $\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^\sigma, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$. $G^1(\Omega)$ 就是解析函数空间. 次椭圆估计 (2.4) 的一个重要应用是下面的亚椭圆正则性定理.

定理 2.4 假设算子 L 满足次椭圆估计 (2.4), 则 L 是 Gevrey 亚椭圆算子, 其 Gevrey 指标是 $[\frac{1}{\epsilon}]$.

这个定理的证明是好几个数学家努力的结果, 可参见文献 [22, 30, 32] 及其参考文献. 我们知道具有解析系数的一致椭圆方程的解是解析的, 这就是著名的 Hilbert 第 19 问题, 上述亚椭圆性结果则是其延伸问题. 一个自然的问题是, 退化椭圆方程的解是否也是解析的? Baouendi 和 Goulaouic^[12] 给出了著名的反例如下: $Pu = (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + x_2^2 \partial_{x_3}^2)u = f$, 则 P 是 Hörmander 型平方和算子, 因此 P 是 C^∞ 亚椭圆算子和 2-Gevrey 亚椭圆算子, 但是不是解析亚椭圆算子. 事实上, 对于某些解析函数 f , 可以构造上述方程的解属于 $G^s, s \geq 2$, 但是不属于 $G^s, s < 2$, 因此算子 P 不是解析亚椭圆的. 另外, Derridj 和 Zuily^[21] 给出了一些例子表示真正的退化椭圆算子也可以是解析亚椭圆的 (也可参见文献 [11]), 后面将研究部分解析亚椭圆问题, 特别是退化抛物型方程 Cauchy 问题的解析光滑效应.

3 非线性退化椭圆方程

现在介绍非线性退化椭圆方程有限阶光滑解的高阶光滑性, 包括 C^∞ 光滑性和 Gevrey 光滑性.

3.1 二阶非线性次椭圆方程的亚椭圆性

考虑下列二阶非线性方程:

$$F(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0, \quad (3.1)$$

这里 F 是所有变量的 C^∞ 函数 (或者解析函数), 对于给定实值函数 $u \in C_{\text{loc}}^\rho(\Omega)$, $\rho \geq 4$, 定义其相应的线性化算子:

$$L_u = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \partial_{jk}^2 + \sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j + c(x), \quad (3.2)$$

其中

$$\begin{cases} a_{kj}(x) = \frac{\partial F}{\partial u_{kj}}(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)), & k, j = 1, \dots, d, \\ b_\ell(x) = \frac{\partial F}{\partial u_\ell}(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)), & \ell = 1, \dots, d, \\ c(x) = \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)). \end{cases}$$

在文献 [40–42] 中, 本文作者证明了下面的定理:

定理 3.1 假设 $u \in C_{\text{loc}}^\rho(\Omega)$, $\rho \geq 4$ 是非线性方程 (3.1) 的一个实值解, 以及 $(a_{kj}(x))$ 是非负定的, 如果 L_u 满足次椭圆估计 (2.4), 则 $u \in C^\infty(\Omega)$.

这里的次椭圆估计 (2.4) 需要使用第 2 节中条件的非线性版本, 其中几何条件 (2.5) 对系数的正则性要求最低, 仅要求其 “ L_u - 次单位路径” 是 Lipschitz 的. 因此 $u \in C^4$ 是足够的. 而 (O-R) 条件则

需要 r 阶交换子, 因此需要假设 $u \in C_{\text{loc}}^\rho(\Omega)$, $\rho \geq \max\{4, r+3\}$. 另外一个版本是非线性 Hörmander 平方和算子:

$$\sum_{k,j=1}^m A_{kj}(x, u, Xu) X_k X_j u + B(x, u, Xu) = 0, \quad (3.3)$$

这里 $X = (X_1, \dots, X_m)$ 是满足 Hörmander 条件的光滑向量场, $(A_{kj}(x, \eta, \xi))$ 是 $m \times m$ 正定矩阵, 则上述方程的解 u 如果属于 $C_{\text{loc}}^\rho(\Omega)$, $\rho > 2$, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$, 或者形如

$$\sum_{j=1}^m X_j^2 u + X_0 u + f(x, u) = 0, \quad (3.4)$$

这里 $u \in C_{\text{loc}}^\rho(\Omega)$, $\rho > \max\{2, r\}$ 是非线性方程 (3.4) 的一个实值解, 以及 $X_j = \sum_{k=1}^d a_{kj}(x, u(x)) \partial_k$, $j = 0, 1, \dots, m$ 满足 r 阶 Hörmander 条件, 则 $u \in C^\infty(\Omega)$.

这里的基本方法是使用 Bony^[13] 的仿线性化技巧和仿微分运算. 因此其微局部退化结构由线性化算子的微局部结构确定.

3.2 二阶完全非线性次椭圆方程

现在研究下列退化椭圆型 Monge-Ampère 方程^[28, 29], 为简化记号, 仅介绍定义在 $\mathbb{R}^2$ 原点的一个开邻域 Ω 上的方程

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = k(x, y), \quad (3.5)$$

这里

$$c^{-1}(x^{2\ell} + Ay^{2n}) \leq k(x, y) \leq c(x^{2\ell} + Ay^{2n}), \quad c > 0, \quad A \geq 0, \quad \ell \leq n. \quad (3.6)$$

定理 3.2 假设 $u \in C^{1,1}(\Omega)$ 是方程 (3.5) 的一个弱凸解, $u_{yy} \geq c_0 > 0$, 以及 $k(x, y)$ 满足条件 (3.6). 如果 $k \in G^{\ell+1}(\Omega)$, 则 $u \in G^{\ell+1}(\Omega)$.

首先, Guan^[27] 使用部分 Legendre 变换将完全非线性方程转换为形如 (3.4) 的拟线性方程

$$\mathcal{L}_w w = \partial_{ss}^2 w(s, t) + \partial_t \{k(s, w(s, t)) \partial_t w(s, t)\} = 0;$$

然后, 证明了弱解是 C^∞ 光滑, 这里的关键点是线性化算子满足次椭圆估计

$$\|\varphi\|_{H^{\frac{2}{\ell+1}}}^2 \leq C\{\|\mathcal{L}_w \varphi\|_{L^2}^2 + \|\varphi\|_{L^2}^2\}, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

文献 [18] 使用这个次椭圆估计证明了 Gevrey 光滑.

4 动理学方程的微局部分析

现在研究 Boltzmann 方程和 Landau 方程, 这两类方程都有非常复杂的各向异性结构, 因此其微局部结构非常丰富.

4.1 Boltzmann 算子和 Landau 算子的微局部结构和 Cauchy 问题的适定性

考虑 Boltzmann 方程

$$\begin{cases} f_t + v \cdot \nabla_x f = Q_B(f, f), \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (4.1)$$

这里 $f = f(t, x, v)$ 是在位置 $x \in \mathbb{R}^3$ 、速度 $v \in \mathbb{R}^3$ 和时刻 t 的质点的密度函数. Boltzmann 双线性碰撞算子为

$$Q_B(g, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{S}^2} B(v - v_*, \sigma) \{g'_* f' - g_* f\} d\sigma dv_*,$$

这里 $f'_* = f(t, x, v'_*)$, $f' = f(t, x, v')$, $f_* = f(t, x, v_*)$, $f = f(t, x, v)$, 以及对于 $\sigma \in \mathbb{S}^2$, 有

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + \frac{|v - v_*|}{2} \sigma, \quad v'_* = \frac{v + v_*}{2} - \frac{|v - v_*|}{2} \sigma$$

是质点碰撞前后的相对速度. 动量守恒和动能守恒的形式分别为 $v + v_* = v' + v'_*$ 和 $|v|^2 + |v_*|^2 = |v'|^2 + |v'_*|^2$. 碰撞核 B 则反映各种不同的物理背景, 一般情况不可以精确表示出来, 考虑 $B(z, \sigma)$ 仅依赖 $|z|$ 和 $\langle \frac{z}{|z|}, \sigma \rangle$, 其主要数学形式为

$$B(|v - v_*|, \cos \theta) = \Phi(|v - v_*|) b(\cos \theta), \quad \cos \theta = \left\langle \frac{v - v_*}{|v - v_*|}, \sigma \right\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

一个重要的例子是反作用势 ρ^{-r} , 其中 $r > 1$, ρ 是两个质点之间的距离, 这时候动理学因子为

$$\Phi(|v - v_*|) \approx |v - v_*|^\gamma, \quad -3 < \gamma = 1 - \frac{4}{r} \leq 1, \quad (4.2)$$

以及碰撞角包含下面的奇异性:

$$b(\cos \theta) \approx K \theta^{-2-2s}, \quad \text{当 } \theta \rightarrow 0+ \text{ 时},$$

这里 $K > 0$ 和 $0 < s = \frac{1}{r} < 1$. Cauchy 问题 (4.1) 对于一般的初值还是一个挑战性的公开问题, 但是 Maxwell 分布 $\mu(v) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}}$ 是一个稳态的特解, 因为 $Q_B(\mu, \mu) = 0$, 因此考虑这个特解的小扰动. 令 $f = \mu + \sqrt{\mu}g$, 则有 $Q_B(\mu + \sqrt{\mu}g, \mu + \sqrt{\mu}g) = Q_B(\mu, \sqrt{\mu}g) + Q_B(\sqrt{\mu}g, \mu) + Q_B(\sqrt{\mu}g, \sqrt{\mu}g)$. 记 $\Gamma_B(g, h) = \mu^{-1/2} Q_B(\sqrt{\mu}g, \sqrt{\mu}h)$. 相应的线性化 Boltzmann 算子为

$$\mathcal{L}_B g = \mathcal{L}_1 g + \mathcal{L}_2 g = -\Gamma_B(\sqrt{\mu}, g) - \Gamma_B(g, \sqrt{\mu}).$$

原来的 Cauchy 问题 (4.1) 转换成下列关于扰动 g 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} g_t + v \cdot \nabla_x g + \mathcal{L}_B g = \Gamma_B(g, g), & t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

同样地, 也考虑 Landau 方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q_L(f, f), \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (4.4)$$

这里 $Q_L(f, f)$ 是相应的 Landau 双线性碰撞算子

$$Q_L(g, f) = \nabla_v \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^3} a(v - v_*) (g(v_*) (\nabla_v f)(v) - (\nabla_v g)(v_*) f(v)) dv_* \right),$$

其中 $a = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3}$ 是非负对称矩阵

$$a(v) = |v|^\gamma (|v|^2 \mathbf{I}_3 - v \otimes v) = |v|^{\gamma+2} \mathbb{P}_{v^\perp} \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R}), \quad -3 \leq \gamma \leq 1, \quad (4.5)$$

这里 $\mathbb{P}_{v^\perp}$ 是关于 $v^\perp$ 的正交投影子. 其线性化算子是

$$\mathcal{L}_L g = \mathcal{L}_{L,1} g + \mathcal{L}_{L,2} g = -\mu^{-1/2} Q_L(\mu, \mu^{1/2} g) - \mu^{-1/2} Q_L(\mu^{1/2} g, \mu).$$

则 Cauchy 问题 (4.4) 转换成

$$\begin{cases} \partial_t g + v \cdot \nabla_x g + \mathcal{L}_L g = \Gamma_L(g, g), \\ g|_{t=0} = g_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

其中 $\Gamma_L(g, f) = \mu^{-1/2} Q_L(\sqrt{\mu} g, \sqrt{\mu} f)$. 定义带权 Sobolev 空间

$$H_\ell^m = \{f \in \mathcal{S}'; \langle v \rangle^\ell f \in H^m(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)\}, \quad m, \ell \in \mathbb{R},$$

$H_0^m = H^m(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$ 表示经典的 Sobolev 空间. 在一系列工作中 (参见文献 [3, 4, 6, 7, 24] 及其参考文献), 证明了下面的定理:

定理 4.1 假设 $f_0(x, v) = \mu + \sqrt{\mu} g_0(x, v) \geq 0$, 以及 g_0 在某个带权 Sobolev 空间具有充分小的范数, 则 Cauchy 问题 (4.3) 和 (4.6) 在相应的函数空间存在唯一整体解. 这里带权 Sobolev 空间的指标与 (4.2) 和 (4.5) 中的 γ 的取值范围以及 $0 < s \leq 1$ 有关.

定理 4.1 中的带权 Sobolev 空间的指标 m 和 ℓ 根据 γ 的取值范围 $\gamma > 0$ 、 $\gamma = 0$ 和 $\gamma < 0$ 有不同的选取. 本文不着重介绍这两个方程的物理背景和详细的数学结果, 因此我们不全面地介绍这些相应的带权 Sobolev 空间, 而是注重介绍这两个方程的微局部结构.

首先当 $\gamma = 0$ 时 (参见文献 [33, 34]), 这种情形被称为 Maxwell 情形, 这时候有

$$\mathcal{L}_{L,1} = 2\left(\mathcal{H} - \frac{3}{2}\right) - \Delta_{\mathbb{S}^2}, \quad \mathcal{L}_{L,2} = \left[\Delta_{\mathbb{S}^2} - 2\left(\mathcal{H} - \frac{3}{2}\right)\right] \mathbb{P}_1 + \left[-\Delta_{\mathbb{S}^2} - 2\left(\mathcal{H} - \frac{3}{2}\right)\right] \mathbb{P}_2,$$

这里 $\mathcal{H} = -\Delta_v + \frac{|v|^2}{4}$ 和

$$\Delta_{\mathbb{S}^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq j,k \leq 3 \\ j \neq k}} (v_j \partial_{v_k} - v_k \partial_{v_j})^2$$

分别是谐振子和单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上的 Laplace-Beltrami 算子, $\mathbb{P}_k$ 表示到 Hermite 基 $\mathcal{E}_k = \text{Span}\{\Phi_\alpha; \alpha \in \mathbb{N}^3, |\alpha| = k\}$ 的正交投影. 这里

$$\begin{aligned} \Phi_0(v) &= \mu^{1/2}(v), \\ \Phi_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} a_{+,1}^{\alpha_1} a_{+,2}^{\alpha_2} a_{+,3}^{\alpha_3} \Phi_0, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3, \end{aligned}$$

其中 $a_{\pm,j} = \frac{v_j}{2} \mp \frac{\partial}{\partial v_j}$, $1 \leq j \leq 3$. 对于线性化 Boltzmann 算子, 有 $\mathcal{L}_B = a(\mathcal{H}, \Delta_{\mathbb{S}^2})\mathcal{L}_L^s$, 这里 $0 < s < 1$ 是 Boltzmann 碰触核的非角截断指标, $a(\mathcal{H}, \Delta_{\mathbb{S}^2})$ 是 $L^2(\mathbb{R}_v^3)$ 上的非负有界同胚, 即

$$\exists c > 0, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq (a(\mathcal{H}, \Delta_{\mathbb{S}^2})f, f)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{c}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

对于一般的非 Maxwell 情形, 分别研究线性算子 $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{P} = v \cdot \nabla_x + \mathcal{L}$ 和 $\tilde{\mathcal{P}} = \partial_t + \mathcal{P}$ 的微局部结构和亚椭圆结构, 我们统一使用上面的记号表示线性 Boltzmann 算子 (非角切断指标 $0 < s < 1$) 和线性 Landau 算子 ($s = 1$). 需要特别强调的是, 上述算子关于速度变量 v 是定义在全空间的, 因此需要研究关于 v 在全空间的整体性质. 文献 [1] 证明了下面的整体次椭圆估计, 这是线性动理学算子非常精细的微局部分析结果.

定理 4.2 假设 $0 < s \leq 1$, $-3 < \gamma < +\infty$, 则对于所有 $\ell \in \mathbb{R}$, 存在 C_ℓ 使得

(1) 对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_v^3)$, 算子 $\mathcal{L}$ 有各向异性的椭圆性,

$$\begin{aligned} & C^{-1}(\|\langle v \rangle^{\gamma/2} \langle D_v \rangle^s f\|^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} \langle v \wedge D_v \rangle^s f\|^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/+s} f\|^2) \\ & \leq (\mathcal{L}f, f) + \|\langle v \rangle^\ell f\|^2 \\ & \leq C_\ell(\|\langle v \rangle^{\gamma/2} \langle D_v \rangle^s f\|^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/2} \langle v \wedge D_v \rangle^s f\|^2 + \|\langle v \rangle^{\gamma/+s} f\|^2), \end{aligned}$$

这里的范数 $\|\cdot\|$ 和内积是定义在 $L^2(\mathbb{R}_v^3)$ 上的;

(2) 对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$, 算子 $\mathcal{P}$ 是整体次椭圆算子,

$$\begin{aligned} & \|\langle v \rangle^\gamma \langle D_v \rangle^{2s} f\| + \|\langle v \rangle^\gamma \langle v \wedge D_v \rangle^{2s} f\| + \|\langle v \rangle^{\gamma+2s} f\| \\ & + \|\langle v \rangle^{\gamma/(2s+1)} \langle D_x \rangle^{2s/(2s+1)} f\| + \|\langle v \rangle^{\gamma/(2s+1)} \langle v \wedge D_x \rangle^{2s/(2s+1)} f\| \\ & \leq C_\ell(\|\mathcal{P}f\| + \|\langle v \rangle^\ell f\|), \end{aligned}$$

这里的范数 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)}$;

(3) 对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$, 带时间变量的算子 $\tilde{\mathcal{P}}$ 也是整体次椭圆算子:

$$\begin{aligned} & \|\langle v \rangle^{(\gamma-2s)/(2s+1)} \langle D_t \rangle^{2s/(2s+1)} f\| + \|\langle v \rangle^\gamma \langle D_v \rangle^{2s} f\| + \|\langle v \rangle^\gamma \langle v \wedge D_v \rangle^{2s} f\| + \|\langle v \rangle^{\gamma+2s} f\| \\ & + \|\langle v \rangle^{\gamma/(2s+1)} \langle D_x \rangle^{2s/(2s+1)} f\| + \|\langle v \rangle^{\gamma/(2s+1)} \langle v \wedge D_x \rangle^{2s/(2s+1)} f\| \\ & \leq C_\ell(\|\tilde{\mathcal{P}}f\| + \|\langle v \rangle^\ell f\|), \end{aligned}$$

这里的范数 $\|\cdot\|$ 表示 $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)}$.

这个工作的关键点是分解 $\mathcal{L} = a^w + \mathcal{K}$, 这里 a^w 是 Weyl- 象征为 $a(v, \eta) = \langle v \rangle^\gamma (1 + |\eta|^2 + |\eta \wedge v|^2 + |v|^2)^s$ 的拟微分算子, $\mathcal{K}$ 是可以由 a^w 控制的算子. 因此 a^w 是各向异性的椭圆型可逆算子, 这里的各向异性是关于权函数 $\langle v \rangle$ 的, 其中 $|\eta \wedge v|^2$ 是关键所在. 退化椭圆算子 $\mathcal{P}$ 和 $\tilde{\mathcal{P}}$ 的亚椭圆估计则类似于广义 Kolmogorov 算子 $\partial_t + v \cdot \nabla_x + c(t, x, v)(-\Delta_v)^s$. 这里需要特别强调的是, 除了上面已经解释了的算子 $\mathcal{L}$ 的复杂特性外, 由 $v \cdot \nabla_x$ 带来的关于 x 变量的退化性是这一类动理学方程的另外一个特点, 上述定理 4.2 给出了一个非常精细的各向异性带权整体次椭圆估计.

文献 [3] 定义了下列与 Boltzmann 算子相关的各向异性的范数:

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \iiint B(|v - v_*|, \cos \theta) \mu_*(g' - g)^2 dv dv_* d\theta \\ &+ \iiint B(|v - v_*|, \cos \theta) g_*^2 (\sqrt{\mu'} - \sqrt{\mu})^2 dv dv_* d\theta. \end{aligned}$$

这个范数非常精细地描述了线性 Boltzmann 算子的数学分析特性, 特别地, 有

$$\|g\|^2 \approx \|(a^{1/2})^w g\|_{L^2}^2 \approx (\mathcal{L}g, g)_{L^2(\mathbb{R}_v^3)} + C\|\langle v \rangle^{\gamma/2} g\|_{L^2(\mathbb{R}_v^3)}^2$$

以及

$$|(\Gamma(f, g), h)_{L_v^2}| \leq C\|f\|_{L^2}\|g\|\|h\|.$$

使用上述两个估计就可以证明定理 4.1, 即 Cauchy 问题 (4.3) 和 (4.6) 在相应带权 Sobolev 空间存在关于时间变量的整体解.

4.2 Boltzmann 方程和 Landau 方程的光滑效应

现在回到非线性动理学方程 (4.1) 和 (4.4), 与它们的线性化算子相同, 它们也有亚椭圆性, 首先在非小扰动的情形有下面的 C^∞ 光滑性.

定理 4.3 假设对于所有的 $\ell \in \mathbb{N}$, $f \in C^5((0, T); H_\ell^5)$ 是方程 (4.1) 或者 (4.4) 的一个非负解, 以及对于所有的 $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}_x^3$ 有 $\|f(t, x, \cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}_v^3)} > 0$, 则 $f \in C^\infty((0, T) \times \mathbb{R}_v^3; \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^3))$.

文献 [3] 研究了 Boltzmann 方程, 但是完全同样的方法可以研究 Landau 方程. 这里在带权 Sobolev 空间中 $\|Q(f, g)\|_{H_\ell^m}$ 的上界估计和下界强制性估计

$$-(Q(f, g), g)_{L^2(\mathbb{R}_v^3)} \geq C_f \|g\|_{H_{\gamma/2}^s(\mathbb{R}_v^3)}^2 + (\text{低阶项})$$

是非常重要的, 但是要得到关于 (t, x) 变量的光滑性则需要使用文献 [2] 中的测不准原理推导出的次椭圆估计, 因此需要使用更加精细的微局部分析理论.

关于这个光滑性定理, 有一个基本的问题是相应的 Cauchy 问题经典解的存在性. 这还是一个挑战性的公开问题. 文献 [3, 定理 1.2] 对于一些特殊情形证明了关于时间局部解的存在性定理, 至于一般情形, 则仅有非常弱的重整化解 (参见文献 [8]).

但是在小扰动 $f = \mu + \sqrt{\mu}g \geq 0$ 的情形, 有非常好的经典解的存在性, 这时候有一系列的亚椭圆性的工作, 特别地有下面的 Gevery 光滑性的定理.

定理 4.4 假设 $f = \mu + \sqrt{\mu}g \geq 0$ 是定理 4.1 中的弱解 (或者有限阶光滑), g 在相应的函数空间的范数充分小, 则 $g \in G^{1+\frac{1}{2s}}((t_0, T) \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$, $\forall 0 < t_0 < T$. 这里对于 Boltzmann 方程是 $0 < s < 1$, 对于 Landau 方程是 $s = 1$.

对于各种不同情形的详细定理参见文献 [5, 17, 23], 这里线性化算子的次椭圆性非常重要. 研究结果的每一次改进都是由于有新的微局部结构的发现.

4.3 动理学方程的 Cauchy 问题的解析光滑效应

受热传导方程的 Cauchy 问题的解析光滑效应的启发, 本文研究 Boltzmann 方程和 Landau 方程的 Cauchy 问题的光滑效应.

定义 4.1 称一个发展方程的 Cauchy 问题有光滑效应, 如果对于在 $t = t_0$ 给定一个有限阶光滑的初始值, 当 $t > t_0$ 时其 Cauchy 问题的解有更加高阶的光滑性, 分别有 C^∞ 光滑效应、Gevrey 光滑效应和解析光滑效应.

如热传导方程, 对于任何初始值都有解析光滑效应. 对于动理学方程有下面的光滑性效应:

定理 4.5 ^[14, 19, 35, 36] 假设 $\gamma \geq 0$, f 是定理 4.1 中的解, 则

(1) $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, $f(t) \in G^1(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$, $\forall t > 0$;

(2) $0 < s < \frac{1}{2}$, $f(t) \in G^{\frac{1}{2s}}(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3)$, $\forall t > 0$.

因此, 对于非线性 Cauchy 问题 (4.3) 和 (4.6), 当 $\gamma \geq 0$ 时, 本文证明了最优的光滑效应, 特别是关于退化变量 x , 证明了它与非退化变量 v 一样有最优光滑效应. 因此动理学方程的微局部结构是非常奇妙的.

另外需要强调的是, 光滑性效应中在 $0 < t - t_0 \ll 1$ 的解析半径和 Gevrey 半径是 $(t - t_0)^\sigma$, $\sigma > 0$, 在 Maxwell 情形证明了关于变量 v 是 $\sigma = \frac{1}{2}$, 关于变量 x 是 $\sigma = \frac{3}{2}$, 因此这些指标是最优的 (最小的).

5 相关问题的展望和思考

20 世纪 70 年代是微局部分析理论的黄金年代, Hörmander ^[31] 的四卷著作是这个理论的经典总结. 随后这一理论在偏微分方程的各个领域都有广泛的应用, 包括大量的非线性数学物理方程的理论研究. 下面介绍本文作者对几个相关问题的展望和思考.

5.1 二阶次椭圆算子

众所周知, 二阶椭圆算子与 Riemann 几何理论密切相关, 二阶次椭圆算子则与相应的退化 Riemann 几何理论相关, 称为次 Riemann 几何.

定义 5.1 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是连通开区域, L 是由 (1.1) 定义的二阶退化椭圆算子, $x, y \in \Omega$, 定义“ L -次单位距离”如下:

$$d_L(x, y) = \inf\{\rho; \text{存在 Lipschitz “} L\text{-次单位路径” } \gamma: [0, \rho] \rightarrow \Omega, \gamma(0) = x, \gamma(\rho) = y\}.$$

由定义, 对于 $x \in \Omega$, $\rho > 0$, 立即有 $B_L(x, \rho) = \{y \in \Omega; d_L(x, y) < \rho\}$. 如果 L 满足 (2.5), 则称 (Ω, d_L) 为次 Riemann 流形.

下面将主要关注 L 是 Hörmander 齐次平方和算子 H_0 的情形, 即 $X_0 = 0$, $X = (X_1, \dots, X_m)$,

$$X_\ell = \sum_{p=1}^d \alpha_{\ell p}(x) \partial_{x_p}, \quad \ell = 1, \dots, m$$

是定义在 Ω 上的光滑向量场组, 满足 r -阶 Hörmander 条件, 现在 L 的二阶项为

$$L_0 = - \sum_{j,k=1}^d a_{jk}(x) \partial_{jk}^2, \quad a_{j,k}(x) = \sum_{\ell=1}^m \alpha_{\ell j}(x) \alpha_{\ell k}(x).$$

因此向量场 X_j , $j = 1, \dots, m$ 的积分曲线都是“ L_0 -次单位路径”, 由这些向量场的积分曲线组成的 Lipschitz 折线也是“ L_0 -次单位路径”. 这时候可以定义 $d_{L_0}(x, y) = d_X(x, y) = \inf\{\rho; \text{存在由向量场 } X_j, j = 1, \dots, m \text{ 的积分曲线组成的 Lipschitz 折线 } \gamma: [0, \rho] \rightarrow \Omega, \gamma(0) = x, \gamma(\rho) = y\}$. 还有与向量场组 X 相关的“带权 Sobolev 空间”:

$$H_X^p(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); X^J f \in L^2(\Omega), |J| \leq p\}, \quad \|f\|_{H_X^p} = \left(\sum_{|J| \leq p} \|X^J f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}, \quad p \in \mathbb{N},$$

这里 $J = (j_1, \dots, j_\ell) \in \{1, \dots, m\}^\ell$, $X^J = X_{j_1} \cdots X_{j_\ell}$, $|J| = \ell$. 则 $H_X^p(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 记 $H_{X,0}^p(\Omega)$ 为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_X^p(\Omega)$ 的闭包.

假设向量场组 $X = (X_1, \dots, X_m)$ 满足 Hörmander 条件, 现在有如下的密切相关的 3 个研究对象.

5.1.1 次椭圆型偏微分方程

这里主要关注由 (2.1) 定义的 Hörmander 平方和算子, 这方面已经有非常多的类似于二阶椭圆方程的工作, 本文在前面已经介绍了很多工作, 如亚椭圆性等. 这里特别强调一个退化方程特有的工作, 假设 Ω' 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega'$ 的开区域, $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, 考虑下列带特征边界点的 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} H_0 u = f & \text{在 } \Omega' \text{ 上,} \\ u|_{\partial\Omega'} = \phi, \end{cases} \quad (5.1)$$

这里 $H_0 = -\sum_{j=1}^m X_j^2$, 称 $x_0 \in \partial\Omega'$ 为特征边界点, 如果 $X_1, \dots, X_m$ 在 x_0 都与 $\partial\Omega'$ 相切. 这种情形对椭圆方程不会有, 因此“带特征边界点的边值问题”是退化方程特有的问题, 情况非常复杂, 现在成系统的研究工作还非常少. 如果考虑由 (2.1) 定义的完整的 Hörmander 算子 H 或者发展型算子 $\partial_t + H$, 则情况更加复杂. 这里除了 Dirichlet 问题 (5.1) 的 (也可以考虑其他类型的边值问题) 存在唯一性问题外, 解的光滑到特征边界点是一个非常复杂和困难的问题.

5.1.2 次 Riemann 流形

首先, “次 Riemann 流形” (Ω, d_X) 作为距离空间是由 $L_0 - \epsilon \Delta_x$ 导出的 Riemann 流形的极限 ($\epsilon \rightarrow 0$), 因此“次 Riemann 流形”有很多类似 Riemann 流形的性质, 这方面有很多工作, 这里同样特别强调一个退化方程特有的工作: “次 Riemann 流形”的“测地曲线”问题. 我们知道 Hörmander 条件保证 Ω 是一个“ L -次单位路径”连通区域 (参见文献 [20]), 但是实现两点之间的“ L -次单位距离” $d_X(x, y)$ 的“ L -次单位路径”问题是一个非常复杂的问题, 这也是研究退化方程的控制理论或者退化情形下最优路径问题特别关心的问题.

另外, 特征值问题是数学研究领域中的一个重要的研究课题, 与 Ω' 、 $\partial\Omega'$ 和由 d_X 导出的几何结构密切相关, 作为经典椭圆算子的一种自然推广, 对退化椭圆算子的特征值问题的研究具有重要的意义. 这方面的工作可参见文献 [16], 除了研究 Dirichlet 特征值上下界估计和渐近估计外 (参见文献 [26]), 在带特征边界点的有界区域上渐近展开的前几项的系数的精确估计也是非常有意义的研究课题, 因为这些问题涉及 Ω' 和 $\partial\Omega'$ 在度量 d_X 下的 Hausdorff 维数的计算, 同时还需要给出第一和第二 Poincaré 不等式的最佳系数. 因此“次 Riemann 流形” (Ω, d_X) 是一个非常重要的研究课题.

5.1.3 与 Hörmander 向量场相关的函数空间

函数空间 $H_X^s(\Omega)$ 是各向异性的 Sobolev 空间, 或者是带权的 Sobolev 空间, 与经典的 Sobolev 空间和椭圆算子的关系相同, 函数空间 $H_X^s(\Omega)$ 与退化算子 H 密切相关. 这里有相应的 Sobolev 嵌入定理, 应用 Hörmander 条件, 或者亚椭圆估计 (2.3), 立即有下列的到经典 Sobolev 空间的包含关系:

$$H_{X,0}^s(\Omega) \subset H^{s\epsilon}(\Omega).$$

由此可以推导出到 L^p 空间或者到经典的 Hölder 空间的嵌入关系, 但是这样的嵌入关系损失太多, 为此, 定义与 Hörmander 向量场相应的 Hölder 函数空间:

$$C_X^{s,\alpha}(\Omega) = \{f \in L^\infty(\Omega); [f]_{s,\alpha} < \infty\}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

这里

$$[f]_{s,\alpha} = \sum_{|J| \leq s} \|X^J f\|_{L^\infty} + \sum_{|J|=s} \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|X^J f(x) - X^J f(y)|}{d_X(x,y)^\alpha},$$

$$J = (j_1, \dots, j_\ell) \in \{1, \dots, m\}^\ell, \quad |J| = \ell, \quad X^J = X_{j_1} \cdots X_{j_\ell}.$$

则 $C_X^{s,\alpha}(\Omega)$ 是 Banach 空间, 也可以定义与 Hörmander 向量场相应的 BMO (bounded mean oscillation) 空间和 VMO (vanishing mean oscillation) 空间. 在二阶 Hörmander 条件假设下, 文献 [15] 研究了精确的 $H_X^s(\Omega)$ 到 $C_X^{s',\alpha}(\Omega)$ 的 Sobolev 嵌入. 该文献使用了非常强的微局部分分析方法, 本文作者认为在高阶 Hörmander 条件假设下, 相应的精确的 $H_X^s(\Omega)$ 到 $C_X^{s',\alpha}(\Omega)$ 的 Sobolev 嵌入是一个具有挑战性的微局部分分析问题.

另外一个非常重要的课题是研究 $H_X^s(\Omega)$ 的函数在 Ω 的一个光滑曲面 Σ 上的“迹”, 这个问题与非齐次 Dirichlet 问题 (5.1) 密切相关. 在二阶 Hörmander 条件假设下, 文献 [10] 研究了在非特征曲面和带非退化特征点的曲面上的“迹定理”. 同样具有挑战性的问题是带一般特征点的曲面上的“迹定理”, 或者在高阶 Hörmander 条件假设下的“迹定理”.

这 3 个方向的研究课题各有侧重点, 分别是偏微分方程、几何分析与调和分析的研究课题, 但是又是密切相关的, 这里各向异性的微局部结构是这 3 个问题的中心点.

5.2 动理学方程 Cauchy 问题的最优光滑效应

动理学方程的微局部分析也还有很多问题要研究, 因为动理学方程的微局部分析结构非常丰富, 特别是与速度变量权函数的各向异性结构交叉混合. 这里仅提出几个与解的光滑性有关的问题, 当然, 其中得到的“先验估计”也可能有助于研究解的存在性.

5.2.1 软势 Boltzmann 方程和 Landau 方程 Cauchy 问题的最优光滑效应

对于 Boltzmann 方程的 Cauchy 问题 (4.3) 和 Landau 方程的 Cauchy 问题 (4.6), 类似于定理 4.5 的解析光滑效应当 $\gamma < 0$ 时也是一个非常有意思的问题. 这时候从定理 4.2 可以观察到线性化算子 $\mathcal{L}$ 关于 v 在无穷远处是退化的, 因此问题更加复杂. 特别是 $-3 \leq \gamma \leq -2s < 0$ 的时候, 例如 Landau 方程的 $\gamma = -3$ 时的 Coulomb 势尤其重要.

5.2.2 非指数衰减扰动的动理学方程 Cauchy 问题的最优光滑效应

回到 Boltzmann 方程 (4.1) 和 Landau 方程 (4.4), 考虑形如 $f = \mu + g$ 扰动, 则有

$$Q(\mu + g, \mu + g) = Q(\mu, g) + Q(g, \mu) + Q(g, g),$$

相应的线性化算子为 $Lg = -Q(\mu, g) - Q(g, \mu)$. 原来的 Cauchy 问题 (4.1) 和 (4.4) 转换成下列关于扰动 g 的 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} g_t + v \cdot \nabla_x g + Lg = Q(g, g), & t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0. \end{cases} \quad (5.2)$$

这时候线性化算子 L 关于变量 v 也是 (分数阶) 椭圆型的, 当然关于权函数 $\langle v \rangle$ 同样是各向异性的, 线性算子 $\partial_t + v \cdot \nabla_x + L$ 也与 $\partial_t + v \cdot \nabla_x + \mathcal{L}$ 有类似的特性. 因此, 应用强有力的微局部分分析方法, 相信可以得到类似于定理 4.5 的 Cauchy 问题的最优光滑性效应.

综上所述, 微局部分析方法是研究线性或者非线性退化椭圆型和退化抛物型方程的非常好且非常有效的工具, 因此相信可以研究其他一些退化型数学物理方程 Cauchy 问题的最优光滑效应, 如 Prandtl 边界层方程^[9]、线性或者非线性超抛物型方程等.

致谢 作者感谢审稿人和《中国科学: 数学》编委的修改建议, 特别是提醒关于退化椭圆算子的解析亚椭圆性的问题.

参考文献

- Alexandre R, Hérau F, Li W X. Global hypoelliptic and symbolic estimates for the linearized Boltzmann operator without angular cutoff. *J Math Pures Appl* (9), 2019, 126: 1–71
- Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Uncertainty principle and kinetic equations. *J Funct Anal*, 2008, 255: 2013–2066
- Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Regularizing effect and local existence for the non-cutoff Boltzmann equation. *Arch Ration Mech Anal*, 2010, 198: 39–123
- Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: II. Global existence for hard potential. *Anal Appl (Singap)*, 2011, 9: 113–134
- Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: Qualitative properties of solutions. *Arch Ration Mech Anal*, 2011, 202: 599–661
- Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. Global existence and full regularity of the Boltzmann equation without angular cutoff. *Comm Math Phys*, 2011, 304: 513–581
- Alexandre R, Morimoto Y, Ukai S, et al. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: I. Global existence for soft potential. *J Funct Anal*, 2012, 262: 915–1010
- Alexandre R, Villani C. On the Boltzmann equation for long-range interactions. *Comm Pure Appl Math*, 2002, 55: 30–70
- Alexandre R, Wang Y G, Xu C J, et al. Well-posedness of the Prandtl equation in Sobolev spaces. *J Amer Math Soc*, 2015, 28: 745–784
- Bahouri H, Chemin J Y, Xu C J. Trace and trace lifting theorems in weighted Sobolev spaces. *J Inst Math Jussieu*, 2005, 4: 509–552
- Baouendi M S, Goulaouic C. Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. *Ann Sci Éc Norm Supér* (4), 1971, 4: 31–46
- Baouendi M S, Goulaouic C. Nonanalytic-hypoellipticity for some degenerate elliptic operators. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1972, 78: 483–486
- Bony J M. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann Sci Éc Norm Supér* (4), 1981, 14: 209–246
- Cao H, Li W X, Xu C J. Analytic smoothing effect of the spatially inhomogeneous Landau equations for hard potentials. *J Math Pures Appl* (9), 2023, 176: 138–182
- Chemin J Y, Xu C J. Inclusions de Sobolev en calcul de Weyl-Hörmander et champs de vecteurs sous-elliptiques. *Ann Sci École Norm Sup* (4), 1997, 30: 719–751
- Chen H, Chen H G. Eigenvalue problem of degenerate elliptic operators (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2021, 51: 833–846 [陈化, 陈洪葛. 退化椭圆算子的特征值问题. *中国科学: 数学*, 2021, 51: 833–846]
- Chen H, Hu X, Li W X, et al. The Gevrey smoothing effect for the spatially inhomogeneous Boltzmann equations without cut-off. *Sci China Math*, 2022, 65: 443–470
- Chen H, Li W X, Xu C J. Gevrey regularity of subelliptic Monge-Ampère equations in the plane. *Adv Math*, 2011, 228: 1816–1841
- Chen J-L, Li W X, Xu C J. Sharp regularization effect for the non-cutoff Boltzmann equation with hard potentials. *Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire*, 2025, in press
- Chow W L. Über Systeme von linearen partiellen differentialgleichungen erster ordnung. In: *The Collected Papers of Wei-Liang Chow*. World Scientific Series in 20th Century Mathematics, vol. 8. Singapore: World Scientific, 2002, 47–54
- Derridj M, Zuily C. Régularité analytique et Gevrey, pour des classes d'opérateurs elliptiques paraboliques dégénérés du second ordre. *Astérisque*, 1973, 52: 309–336
- Derridj M, Zuily C. Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander. *J Math Pures Appl* (9), 1973, 52: 309–336
- Duan R, Li W X, Liu L. Gevrey regularity of mild solutions to the non-cutoff Boltzmann equation. *Adv Math*, 2022, 395: 108–159
- Duan R, Liu S, Sakamoto S, et al. Global mild solutions of the Landau and non-cutoff Boltzmann equations. *Comm*

- Pure Appl Math, 2021, 74: 932–1020
- 25 Fefferman C, Phong D H. The uncertainty principle and sharp Garding inequalities. *Comm Pure Appl Math*, 1981, 34: 285–331
 - 26 Fefferman C, Phong D H. Subelliptic eigenvalue problems. In: *Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, vol. 2. Belmont: Wadsworth International Group, 1981, 590–606
 - 27 Guan P. Regularity of a class of quasilinear degenerate elliptic equations. *Adv Math*, 1997, 132: 25–45
 - 28 Hong J, Huang G, Wang W. Existence of global smooth solutions to Dirichlet problem for degenerate elliptic Monge-Ampère equations. *Comm Partial Differential Equations*, 2011, 36: 635–656
 - 29 Hong J, Zuily C. Existence of C^∞ local solutions for the Monge-Ampère equation. *Invent Math*, 1987, 89: 645–661
 - 30 Hörmander L. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math*, 1967, 119: 147–171
 - 31 Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, I–IV. Berlin: Springer-Verlag, 1983–1985
 - 32 Kohn J J. Pseudo-differential operators and hypoellipticity. *Proc Sympos Pure Math*, 1973, 23: 61–69
 - 33 Lerner N, Morimoto Y, Pravda-Starov K, et al. Spectral and phase space analysis of the linearized non-cutoff Kac collision operator. *J Math Pures Appl* (9), 2013, 100: 832–867
 - 34 Lerner N, Morimoto Y, Pravda-Starov K, et al. Gelfand-Shilov and Gevrey smoothing effect for the spatially inhomogeneous non-cutoff Kac equation. *J Funct Anal*, 2015, 269: 459–535
 - 35 Morimoto Y, Xu C J. Ultra-analytic effect of Cauchy problem for a class of kinetic equations. *J Differential Equations*, 2009, 247: 596–617
 - 36 Morimoto Y, Xu C J. Analytic smoothing effect for the nonlinear Landau equation of Maxwellian molecules. *Kinet Relat Models*, 2020, 13: 951–978
 - 37 Nagel A, Stein E M, Wainger S. Balls and metrics defined by vector fields I. Basic properties. *Acta Math*, 1985, 155: 103–147
 - 38 Oleinik O A, Radkevich E V. *Second Order Equations with Nonnegative Characteristic Form*. New York: Plenum Press, 1973 [奥列尼克 O A, 拉德克维奇 E B. 具非负特征形式的二阶微分方程. 现代数学译丛. 辜联, 张克农, 洪乃断, 等, 译. 北京: 科学出版社, 1986]
 - 39 Rothschild L P, Stein E M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta Math*, 1977, 137: 247–320
 - 40 Xu C J. Opérateurs sous-elliptiques et régularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en deux variables. *Comm Partial Differential Equations*, 1986, 11: 105–117
 - 41 Xu C J. Régularités des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires associées à un système de champs de vecteurs. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1987, 37: 1575–1603
 - 42 Xu C J. Regularity for quasilinear second-order subelliptic equations. *Comm Pure Appl Math*, 1992, 45: 77–96

Microlocal analysis theory of degenerate elliptic operators

Chaojiang Xu

Abstract In this paper, we first present the important improvement up to the beginning of 21st century on microlocal analysis of degenerate elliptic operators, and then focus on the recent applications on the nonlinear kinetic equations. We concentrate on the microlocal degenerate elliptic structure for this class of equations, and study the anisotropic ultra-parabolic properties and hypoellipticity of the Boltzmann equation and Landau equation. We also introduce several related problems for further research.

Keywords degenerate elliptic operators, microlocal analysis, hypoelliptic theory, Boltzmann equation, Landau equation

MSC(2020) 35A27, 35H10, 35J70, 76P05, 82C40

doi: 10.1360/SSM-2024-0047