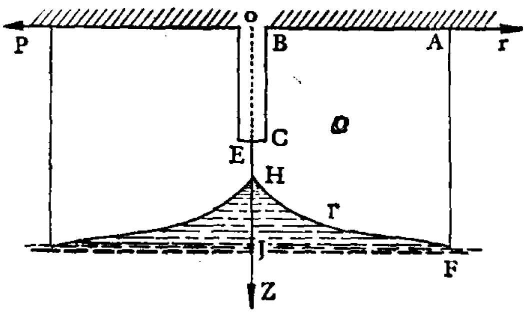
研究简报

稳态水锥的自由边界问题

张恭庆　　姜礼尚

（北京大学数学力学系）

在一类油层中，油浮于水上，开井后，油受高压往上喷射，底水随之上涨，油水界面形成一个锥面．在一定油压下，随喷射时间之延长，油水界面可能趋于一个稳定位置，这个稳定的油水界面就称为稳态水锥．确定稳态水锥的形状和位置是石油开发中的一个重要的基本课题；在数学上，这是一个椭圆型方程的自由边界问题：



$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_0=0,\ 于\Omega内,\quad(1)$$

其中 ϕ_0 是油位势；Ω 是曲边多边形 $ABCEHF$，表示油占区，它的一条边界 $\Gamma=\widehat{HF}$ 是未知的，称为自由边界；(r, z) 是柱坐标．边界条件如下：

$$\left.\begin{aligned}&\phi_0|_{AF}=p_c,\\&\phi_0|_{BC\cup CE}=p_w,\\&\left.\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\right|_{AB\cup\Gamma}=0,\\&\phi_0|_\Gamma=p_c-\Delta\gamma(h-z),\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

其中 p_c 是油田边界压力，p_w 是井口压力，$\Delta\gamma=r_B-r_0=$ 水的比重 $-$ 油的比重，h 是油层厚度即 AF 的长度；它们都是已知常数，作简单变换：

$$\phi=\frac{\phi_0-p_c}{\Delta\gamma}+h,\qquad(*)$$

记 $\alpha=h-\dfrac{p_c-p_w}{\Delta\gamma}$，方程及边界条件（1）、（2）化为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi=0,\ 于\Omega内\\&\phi|_{AF}=h,\\&\phi|_{BC\cup CE}=\alpha,\\&\phi|_\Gamma=z,\\&\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{AB\cup\Gamma}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

问题 I　求 $\{\Omega, \rho, \phi\}$ 如下：

（1）$\rho:[0, a]\to\mathbf{R}'$ 是一个严格上升的函数，满足：$\rho(a)=h$，$\rho(0)>b$，

本文 1977 年 11 月 16 日收到．

(2) $\Omega = \{(r, z) | \in D,\ r \in (0, a),\ z \in (0, \rho(r))\}$,

(3) $\phi \in C(\bar{\Omega})$, 并且

$$\int_\Omega \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] r dr dz \quad < +\infty,$$

还有 ϕ 满足方程及边界条件(3).

这里 a 是油田半径，即长度 OA，b 是打开深度即 BC 的长度，D 是多角形 $ABCEJF$.

几十年来，在工程上流行的是 Muskat 于 1932 年提出来的方法[1] 以及后人的改进[2]，这类方法的假设前提是把油、水两种不同介质看成是象红、蓝墨水一样的同一种介质，只有这样，才能迴避自由边界 Γ，但是这个假设不但没有根据，而且和后来推算水锥高度的条件无论如何是不相容的. 现在我们抛弃掉 Muskat 等人的这个不合理的前提，针对原始自由边界问题，研究问题 I 的存在唯一性以及数值解法，估计产量与压差以及油田几何尺寸间的关系.

本文限制在条件

$$p_e - p_w < (h - b)\Delta\gamma \tag{4}$$

之下进行讨论.

记 $\tilde{D} = \{(r, z, \theta) | (r, z) \in D,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ 为对应于 D 在 $\mathbf{R}^3$ 中的轴对称区域. 记 $Z^k(D)$ 为 $W_2^k(\tilde{D})$ 的闭子空间，其中元素由 $f(x, y, z) = \phi(\sqrt{x^2 + y^2}, z)$ 形式的函数构成，而 $\in W_2^k(\tilde{D})$, $k = 0, 1, 2, \cdots$. 记 Γ_D 为区域 D 的部分边界 $JF \cup FA \cup AB \cup BC$，而 $\Gamma_N = JE \cup CE$.

我们用 Baiocchi 变换把问题 I 转化为一个带间断非线性项的椭圆型方程的固定边界的边值问题：先将函数 $\phi(r, z)$ 扩张到整个 D 上，令

$$\hat{\phi}(r, z) = \begin{cases} \phi(r, z), & (r, z) \in D, \\ z, & (r, z) \in D \backslash \Omega \end{cases} \tag{5}$$

以及它的 Baiocchi 变换[3].

$$w(r, z) = \int_z^h [\hat{\phi}(r, t) - t]\, dt, \quad \forall (r, z) \in D. \tag{6}$$

转向

问题 II　求常数 q 及函数 $w(r, z) \in Z^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ 满足:

$$Lw = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w = H(w) = \begin{cases} 1, & w > 0, \\ 0, & w \leqslant 0 \end{cases} \tag{7}$$

以及边界条件

$$w|_{\Gamma_D} = g_D, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\Gamma_N} = g_N, \tag{8}$$

其中

$$g_D = \begin{cases} 0, \text{在 } FJ \text{ 上}, \\ \frac{1}{2}(h - z)^2, \text{在 } AF \text{ 上}, \\ \frac{1}{2}h^2 + q\ln\frac{r}{a}, \text{在 } AB \text{ 上}, \\ \frac{1}{2}h^2 + q\ln\frac{r}{a} + \frac{1}{2}z^2 - az, \text{在 } BC \text{ 上}. \end{cases}$$

$$g_N=\begin{cases}0, & \text{在 } EJ \text{ 上},\\ \alpha-b, & \text{在 } CE \text{ 上}.\end{cases}$$

我们有:

定理 1 设 ϕ 是问题 I 的解,则其 Baiocchi 变换必是问题 II 的解.

转向求解问题 II, 记 $\mathscr{D}(D)=\left\{u\mid\in C^3(\overline{D}),\ u|_{\Gamma_D}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_N}=0\right\}$, $\mathring{Z}^2(D)$ 是 $\mathscr{D}(D)$ 在 $Z^2(D)$ 中的闭包. 则 L: $\mathring{Z}^2(D)\to Z^\circ(D)$ 是一个线性算子. 我们还有

定理 2 存在常数 C, 使得 $\forall u\in\mathring{Z}^2(D)$ 有

$$\|u\|^2_{Z^2(D)}\leqslant C(\|u\|^2_{Z^0(D)}+\|Lu\|^2_{Z^0(D)}),$$

即 L 是闭算子,其值域是闭的.

定理 3 L 是 $\mathring{Z}^2(D)\to Z^0(D)$ 的一个 Fredholm 算子,并且 $\dim\ker(L)=0$, $\dim\ \mathrm{coker}(L)=1$.

为计算 $\dim\mathrm{coker}(L)$, 步骤比较复杂,困难在于: (1) 区域 D 是角形的,含有钝角 $\angle C=270°$; (2) L 的边值是混合型的; (3) L 的系数在 $r=0$ 处有奇性. 主要步骤如下:

(1) 引入辅助算子

$$L_0=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}(1+\zeta(r))\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \text{定义域为 } \mathring{Z}^2(D),$$

其中

$$\zeta(r)=\begin{cases}1, & r\geqslant\delta_0,\\ 0, & r<\delta_0/2,\end{cases}\quad 0<\delta_0<r_w=\text{井半径}(OB\text{ 的长度})$$

$\zeta'(r)\geqslant 0$, 且 $\zeta\in C^\infty(\mathbf{R}'_+)$. 注意到 $L-L_0$ 是 $\mathring{Z}^2(D)\to Z^\circ(D)$ 的全连续线性算子, 因此 $\mathrm{index}(L)=\mathrm{index}(L_0)$. 另一方面容易证明 $\dim\ker(L)=\dim\ker(L_0)=0$.

(2) 引入集合 $M(D)=\{v\mid\in C^\infty(\overline{D}\backslash\{A, B, C, E, F, J\})\cap Z^\circ(D),\ L_0'v=0 \text{ 于 } D$, 且除角点外, $v|_{\Gamma_D}=\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma_N}=0\}$, 其中 L_0' 是 L_0 的形式共轭算子. 然后利用 Бирман、Скворцов[4] 的方法以及对称开拓的手续证明 $R(L_0)^\perp\subset M(D)$.

(3) 利用 Grisvard[5] 的方法证明 $\dim M(D)=1$, 即 $M(D)$ 中有唯一的线性无关元 u_0.

(4) 利用 Green 公式及阶的估计证明 $u_0\in R(L_0)^\perp$.

联合 (1)—(4) 得 $\dim\mathrm{coker}(L)=1$.

为了抬高 $Z^2(D)$ 解的可微性,我们还有

定理 4 设 $f\in L^p_{d\mu}(D)$, $d\mu=rdrdz$, $p\geqslant 6$, 又设 $u\in\mathring{Z}^2(D)$ 满足: $Lu=f$; 则必有 $u\in C^\kappa(\overline{D})$, $1\leqslant\kappa<3/2$.

这定理因涉及角形区域,在角点上的光滑性需用到 Волков[6] 的结果.

下面把 q 看成是参数,求解方程

$$\begin{cases}Lw_q=H(w_q),\\ w_q|_{\Gamma_D}=g_D,\quad \left.\frac{\partial w_q}{\partial n}\right|_{\Gamma_N\backslash C}=g_N|_{\Gamma_N\backslash C}.\end{cases}\tag{9}$$

先将其化为齐次边值问题:

$$Lu = H(u+v_q) - f_q, \quad u|_{\Gamma_D} = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_N \backslash C} = 0, \tag{10}$$

其中 $v_q \in Z^2(D) \cap C^2(\bar{D})$，满足：$v_q|_{\Gamma_D} = g_D, \frac{\partial v}{\partial n} q\Big|_{\Gamma_N} = g_N, f_q = Lv_q$. 把(10)看成是求下列集值映射的不动点：$Kf_q \in (I + K\circ\Phi)u$，其中$K$对应着$L$的弱解的 Green 算子,$K$: $L^p_{d\mu}(D) \to C(\bar{D})$ 全连续线性，$p \geqslant 2$. 而

$$\Phi: u \to \Phi(u),\ \Phi(u)(r, z) = \begin{cases} 1, \text{ 当 } (u+v_q)(r,z) > 0, \\ [0,1] \text{ 之间任意可测函数，当 } (u+v_q)(r,z) = 0, \\ 0, \text{ 当} (u+v_q)(r,z) < 0 \end{cases}$$

是 $C(\bar{D}) \to L^p_{d\mu}(D)$ $(p \geqslant 2)$ 的上半连续凸集值映射，利用张恭庆、姜伯驹[7]及张恭庆[8]已有的结果可得

定理 5 $\forall q \in \mathbb{R}'$，存在唯一的 $w_q \in Z^1(D) \cap C(\bar{D})$，并且对于 D 中任一个不含 C 点的开集 U，有 $w_q|_U \in W^2_p(U)$，$p \geqslant 6$，满足方程(9)；此外，当 $0 \leqslant q \leqslant q_0 = \dfrac{h^2 + b^2 - 2ab}{2\ln \dfrac{a}{r_w}}$ 时，$w_q \geqslant 0$；若记 $\Omega_q = \{(r, z) | \in D, w_q(r, z) > 0\}$，则在$\Omega_q$上，$Lw_q(r, z) = 1$.

那么哪个 q 对应的解 $w_q \in Z^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ 呢？我们可以证明：若 $\bar{q}$ 是方程

$$\mathscr{F}(q) = (u_1, H(w_q) + f_q)_{L^2_{d\mu}(D)} = 0$$

的实根，其中 $u_1 \in R(L)^\perp$，f_q，w_q 定义如上，则 $\bar{q} \in (0, q_0)$，并且这时 $w_{\bar{q}} \in Z^2(D) \cap C'(\bar{D})$.

定理 6 存在 $\bar{q} \in (0, q_0)$ 及非负函数 $w = w_{\bar{q}}$，满足(7)与(8)式，即问题II有解.

通过 $w(r, z) = w_{\bar{q}}(r, z)$，令

$$\begin{aligned} &\Omega = \{(r, z) | \in D, w(r, z) > 0\}, \\ &\rho(r) = \sup\{z | (r, z) \in \Omega\}, \\ &\phi(r, z) = z - \frac{\partial}{\partial z} w(r, z) \end{aligned} \tag{11}$$

及 Baiocchi[1] 中的方法证明：

定理 7 设 $\{w, \bar{q}\}$ 是问题 II 的解，规定 $\{\Omega, \rho, \phi\}$ 如(11)式，则它们构成问题 I 的解.

最后，若 $w_q \in C^1(\bar{D})$，$\phi_q = z - \dfrac{\partial w_q}{\partial z}$，则

$$\begin{aligned} q = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \Big\{ &\int_0^b [\phi_q(r_w + \lambda, z) - \phi_q(r_w, z)] r_w dz \\ &- \int_0^{r_w + \lambda} [\phi_q(r, b + \lambda) - \phi_q(r, b)] r dr \Big\}. \end{aligned} \tag{12}$$

利用它得到

定理 8 问题 I 的解是唯一的.

这样就回答了问题 I，即问题 I 的解是存在唯一的.

公式(12)表明 $\bar{q}$ 的物理意义正是与ϕ对应的体积流量除以 2π，注意到ϕ与 ϕ_0 的关系(*)，油的体积流量 $Q = 2\pi \cdot \Delta\gamma\, \bar{q}$，因此有估计式：

[下转 669 页]