带权 Paneitz 算子和带权圆盘振动问题的特征值不等式

杜锋^{1,2*}, 吴传喜²

1. 荆楚理工学院数理学院, 荆门 448000;

2. 湖北大学数学与统计学学院湖北省应用数学重点实验室, 武汉 430062

E-mail: defengdu123@163.com, cxwu@hubu.edu.cn

收稿日期: 2019-09-03; 接受日期: 2020-01-17; 网络出版日期: 2020-04-10; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11401131)、湖北省教育厅科学技术研究 (批准号: D20184301) 和湖北省应用数学重点实验室开放课题资助项目

摘要 本文研究光滑度量测度空间上带权 Paneitz 算子的闭特征值问题和带权圆盘振动问题, 给出 Euclid 空间、单位球面、射影空间和一般 Riemann 流形的 n 维紧子流形的权重 Paneitz 算子和带权圆盘振动问题的前 n 个特征值上界估计. 进一步地, 本文给出带权 Ricci 曲率有界的紧致度量测度空间上带权圆盘振动问题的第一特征值的下界估计.

关键词 带权 Paneitz 算子 特征值 不等式 带权 Ricci 曲率 振动问题

MSC (2020) 主题分类 35P15, 53C42, 53C21

1 引言

给定一个 n 维完备 Riemann 流形 (M, g) , 这里 g 表示度量. 设 $d\mu = e^{-f}d\nu$, 这里 f 是 M 上的光滑实值函数, 而 $d\nu$ 是与度量相关的 Riemann 体积元 (通常, 也称 $d\nu$ 为体积密度), 则 $(M, g, d\mu)$ 被称为光滑度量测度空间. 在光滑度量测度空间上, 定义带权 Laplace 算子 $\Delta_f u = \operatorname{div}_f(\nabla u) = \Delta u - \langle \nabla f, \nabla u \rangle$, 这里 $\operatorname{div}_f(\cdot) = e^f \operatorname{div}(e^{-f} \cdot)$ 表示带权散度, ∇ 和 Δ 分别表示梯度和 Laplace 算子. 定义 Bakry-Émery Ricci 张量 (也称为带权 Ricci 曲率):

$$\operatorname{Ric}_f = \operatorname{Ric} + \nabla^2 f,$$

这里 Ric 和 ∇^2 分别是 M 上的 Ricci 张量和 Hessian 算子. 最近, Roth^[1] 介绍了一类带权 Paneitz 型算子 $P_f^{a,b}$:

$$P_f^{a,b}u = \Delta_f^2 u - \operatorname{div}_f[(aR_f g + b\operatorname{Ric}_f)\nabla u], \quad (1.1)$$

英文引用格式: Du F, Wu C X. The eigenvalues inequalities of the weighted Paneitz operator and weighted vibration problem for a clamped plate (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 723–736, doi: 10.1360/SSM-2019-0213

这里 $R_f = \text{tr}(\text{Ric}_f)$ 是带权数量曲率, tr 表示迹. 当 f 是常函数时, $P_f^{a,b}$ 成为 Paneitz 型算子 $P_g^{a,b}$, 而当 $na+b>0$ 时, Xu 和 Yang^[2] 证明了 $P_g^{a,b}$ 是正定的. Chen 和 Li^[3,4] 给出了 $P_g^{a,b}$ 的第一非零特征值和第二非零特征值的一些估计, 而 Roth^[1] 将 Chen 和 Li^[3] 的部分结论推广到带权 Paneitz 型算子的第一非零特征值. 当 f 是常函数且 $a = \frac{2}{3}$ 和 $b = -2$ 时, $P_f^{a,b}$ 成为 4 维 Riemann 流形上经典的 Paneitz 算子 P_g (参见文献 [5]). 当 $n > 4$ 时, $P_g^{a,b}$ 被称为 Paneitz-Barson 算子 (参见文献 [6]), 其表达式为

$$P_g u = \Delta^2 u - \text{div}[(a_n Rg + b_n \text{Ric})\nabla u] - \frac{n-4}{2}Qu,$$

这里 $Q = c_n|\text{Ric}|^2 + d_n R^2 - \frac{1}{2(n-1)}\Delta R$ 是与度量 g 相关的 Q 曲率, 且

$$a_n = \frac{(n-2)^2 + 4}{2(n-1)(n-2)}, \quad b_n = -\frac{4}{n-2}, \quad c_n = -\frac{1}{(n-2)^2}, \quad d_n = \frac{n(n-2)^2}{8(n-1)^2(n-2)^2}.$$

Cheng^[7] 给出了 Euclid 空间上 n 维紧子流形上算子 P_g 的闭特征值的一些最优估计, 杜锋和吴传喜^[8] 给出了 Euclid 空间上 n 维嵌入超曲面上算子 P_g 的闭特征值的一些等周估计. 本文将 Cheng^[7] 的结论推广到带权 Paneitz 型算子 $P_f^{a,b}$. 事实上, 我们得到下面的定理:

定理 1.1 设 $\mathbb{R}^{n+k}$ 是一个赋予密度 $e^{-f}d\nu$ 的 $n+k$ 维 Euclid 空间, (M, g) 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的一个 n (≥ 4) 维紧子流形. 假设带权 Paneitz 型算子 $P_f^{a,b}$ 是正定的且 Λ_i 是其第 i 个闭特征值, 那么可得

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\int_M (n^2|\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na+b)R_f)d\mu \int_M (n^2|\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2)d\mu}}{|M|_f}, \quad (1.2)$$

这里 $|M|_f = \int_M e^{-f}d\nu$ 是 M 的 f - 体积, $\mathbf{H}$ 是 M 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的平均曲率向量. 如果 (1.2) 中等式成立, 那么 M 是平均曲率流的一个收缩自相似解且 $f = a - \frac{c}{2}r_p^2$, 这里 a 和 c 是两个常数, r_p 是到 M 的质点 p 的 Euclid 距离. 特别地, 如果 $k=1$, $|\mathbf{H}|>0$, 那么 M^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个球.

当 M 的外围空间是一般的 Riemann 流形时, 可以得到下面的定理:

定理 1.2 设 $\overline{M}$ 是一个赋予密度 $e^{-f}d\nu$ 的 $n+k$ 维 Riemann 流形, (M, g) 是 $\overline{M}$ 的一个 n (≥ 4) 维紧子流形. 假设带权 Paneitz 型算子 $P_f^{a,b}$ 是正定的且 Λ_i 是其第 i 个闭特征值, 那么可得

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\int_M (n^2|\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + nc^2 + (na+b)R_f)d\mu \int_M (n^2|\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + nc^2)d\mu}}{|M|_f}, \quad (1.3)$$

这里 $|M|_f = \int_M e^{-f}d\nu$ 是 M 的 f - 体积, $\mathbf{H}$ 是 M 在 $\overline{M}$ 中的平均曲率向量,

$$c = \max_{v \in TM, |v|=1} \{B_{\overline{M}}(v, v)\},$$

$B_{\overline{M}}$ 是 $\overline{M}$ 在 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 中的第二基本形式. 特别地, 当 $\overline{M}$ 是单位球面或射影空间时, 可得

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\int_M (n^2(|\mathbf{H}|^2 + C(n)) + |\nabla f|^2 + (na+b)R_f)d\mu \int_M (n^2(|\mathbf{H}|^2 + C(n)) + |\nabla f|^2)d\mu}}{|M|_f}, \quad (1.4)$$

这里 $C(n)$ 是一个常数, 当 $\overline{M}$ 是单位球面时, $C(n) = 1$; 当 $\overline{M}$ 是实射影空间时, $C(n) = \frac{2(n+1)}{n}$; 当 $\overline{M}$ 是复射影空间时, $C(n) = \frac{2(n+2)}{n}$; 当 $\overline{M}$ 是四元数射影空间时, $C(n) = \frac{2(n+4)}{n}$.

当带权 Paneitz 型算子 $P_f^{a,b}$ 不是正定算子时, 可以得到下面的定理:

定理 1.3 设 $\mathbb{R}^{n+k}$ 是一个赋予密度 $e^{-f}d\nu$ 的 $n+k$ 维 Euclid 空间, (M^n, g) ($n \geq 4$) 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的一个紧子流形. 假设 Λ_i 是 $P_f^{a,b}$ 第 i 个闭特征值, 那么可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (\Lambda_{j+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \sqrt{\int_M (n[n + (n-1)(na+b)]|\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na+b)\Delta f)u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu} \\ & \quad \times \sqrt{\int_M (n^2|\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2)u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

这里 u_1 是 $P_f^{a,b}$ 的规范第一特征函数. 当 (1.5) 中等式成立时, M^n 与球 $\mathbb{S}^n(r)$ 等度.

本文的第 2 节将研究夹圆盘振动问题的特征值. 设 $(M, g, d\mu)$ 是一个 n 维紧致带边光滑度量测度空间, ∂M 是其边界, 则夹圆盘振动问题为

$$\begin{cases} \Delta_f^2 u - \tau \Delta_f u = \Gamma u, & \text{在 } M \text{ 内,} \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{在 } \partial M \text{ 上,} \end{cases} \quad (1.6)$$

这里 τ 是一个非负常数, ν 表示边界 ∂M 的单位外法向量场. 当 f 是常数时, Payne^[9] 给出了 (1.6) 的特征值的一些等周不等式, 而 Xia^[10] 则给出了 (1.6) 的特征值的万有不等式. 当 $\tau = 0$ 时, 相关的特征值估计结果可参见文献 [11–14].

定理 1.4 设 $(M, g, d\mu)$ 是一个 n 维紧致带边光滑度量测度空间, ∂M 是其边界. 如果 M 等度浸入到一个权重 Euclid 空间 $\mathbb{R}^N$ 中, 设 Γ_i 是问题 (1.6) 的第 i 个特征值, 则有

$$\sum_{j=1}^n (\Gamma_{j+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{(n+3)\sqrt{4\Gamma_1 + \tau^2} + C_0 - 3\tau} \times \sqrt{3\sqrt{4\Gamma_1 + \tau^2} + C_0 - 3\tau}. \quad (1.7)$$

这里 $C_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} \{n^2|\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2\}$, $\mathbf{H}$ 是 M 在 $\mathbb{R}^N$ 中的平均曲率向量.

定理 1.5 设 $(M, g, d\mu)$ 是一个 n 维紧致带边光滑度量测度空间, ∂M 是其边界. 假设带权 Ricci 曲率满足 $\text{Ric}_f \geq kg$, 这里 k 是常数, 则对任意光滑向量场 X , 当 $\inf_M (\text{div}_f X - |X|^2) > 0$ 时, (1.6) 的第一特征值 Γ_1 满足

$$\Gamma_1 \geq \lambda_1 \left(\inf_M (\text{div}_f X - |X|^2) + k + \tau \right), \quad (1.8)$$

这里 λ_1 是带权 Laplace 算子 Δ_f 在 M 上的第一 Dirichlet 特征值.

令 $X = -\nabla(\ln u)$, 这里 u 是带权 Laplace 算子 Δ_f 在 M 上的第一 Dirichlet 特征值 λ_1 对应的正特征函数, 直接计算可以得到

$$\text{div}_f X - |X|^2 = \Delta_f(\ln u) - |\nabla(\ln u)|^2 = \lambda_1. \quad (1.9)$$

由 (1.8) 和 (1.9), 易得下述推论:

推论 1.1 设 $(M, g, d\mu)$ 是一个 n 维紧致带边光滑度量测度空间, ∂M 是其边界. 假设带权 Ricci 曲率满足 $\text{Ric}_f \geq kg$, 这里 k 是常数, 则可得

$$\Gamma_1 \geq \lambda_1(\lambda_1 + k + \tau). \quad (1.10)$$

2 预备知识

本节将首先介绍一些需要的概念和结论, 它们将在主要定理的证明中起到重要作用, 关于这些概念和结论的更多细节, 可参见文献 [15–17].

在光滑度量测度空间 $(M, g, d\mu)$ 上, 当 M 是 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的 n 维浸入子流形时, 可以定义权重平均曲率向量 $\mathbf{H}_f = n\mathbf{H} - (\bar{\nabla}f)^\perp$, 这里 $\mathbf{H}$ 是 M 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的平均曲率向量, $(\bar{\nabla}f)^\perp$ 是 $\bar{\nabla}f$ 在法丛 $T^\perp M$ 上的投影. 设 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是 M^n 上一点 p 的邻域的局部坐标系, 设 $\mathbf{y}$ 是点 p 在 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中的位置向量, 定义为

$$\mathbf{y} = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_{n+k}(x_1, \dots, x_n)).$$

令 g 表示 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的标准内积在 M 上的诱导度量, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 的标准内积, 因此有下面的引理:

引理 2.1 对任意函数 $u \in C^\infty(M)$, 有下述式子成立:

$$\sum_{\alpha=1}^{n+k} (g(\nabla y_\alpha, \nabla u))^2 = |\nabla u|^2, \quad (2.1)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+k} g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^{n+k} |\nabla y_\alpha|^2 = n, \quad (2.2)$$

$$\Delta_f \mathbf{y} = (\Delta_f y_1, \Delta_f y_2, \dots, \Delta_f y_{n+k}) = -n\mathbf{H} + \nabla f, \quad (2.3)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+k} |\Delta_f y_\alpha|^2 = n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2, \quad (2.4)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n+k} \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u) = -g(\nabla f, \nabla u), \quad (2.5)$$

∇ 是 M 上的梯度算子.

设 M 是 $n+k$ 维 Riemann 流形 $\bar{M}$ 的 n 维子流形, 由 Nash 嵌入定理, 可将 $\bar{M}$ 作为 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 的子流形, 用 D 表示 $\mathbb{R}^m$ 的协变微分和梯度, $\bar{\nabla}$ 表示 $\bar{M}$ 的梯度. 如果在 $\bar{M}$ 上赋予密度 e^{-f} , 可考虑将 f 拓展到 $\mathbb{R}^m$, 使得

$$Df|_{\bar{M}} = \bar{\nabla}f. \quad (2.6)$$

(2.6) 总是可以保证成立的, 例如, 在 $\bar{M}$ 的一个小的管型邻域, 令 $f(p+t\xi) = f(p)$, 这里 $p \in \bar{M}$, ξ 是 p 处的单位法向量场. 设 B 和 $\mathbf{H}_f$ 分别是 M 在 $\bar{M}$ 中的第二基本形式和权重平均曲率, $B_{\bar{M}}$ 是 $\bar{M}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的第二基本形式. 设 $\bar{B}$ 和 $\bar{\mathbf{H}}_f$ 分别是 M 在 $\mathbb{R}^m$ 中的第二基本形式和权重平均曲率. 令 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是 M 的局部正交标架, 可以得到

$$\bar{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^n \bar{B}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n B_{\bar{M}}(e_i, e_i) + \mathbf{H}. \quad (2.7)$$

由 (2.7), 注意到 $\mathbf{H}_f$ 和 $\bar{\nabla}f$ 切于 $\bar{M}$, $\sum_{i=1}^n B_{\bar{M}}(e_i, e_i)$ 正交于 $\bar{M}$, 可得

$$|\bar{\mathbf{H}}_f + Df|^2 = |\mathbf{H}_f + \bar{\nabla}f|^2 + \left| \sum_{i=1}^n B_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right|^2 \leq |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + nc^2, \quad (2.8)$$

这里 ∇ 是 M 上的梯度, 即 $\bar{\nabla}$ 在 TM 上的射影, $c = \max_{v \in TM, |v|=1} \{B_{\bar{M}}(v, v)\}$. 特别地, 当 M 是单位球面或射影空间 (包括实射影空间、复射影空间和四元素射影空间) 的紧子流形时, 可得

$$|\bar{H}|^2 \leq |H|^2 + C(n), \quad (2.9)$$

这里 $C(n)$ 是一个常数, 当 M 是单位球面时, $C(n) = 1$; 当 $\bar{M}$ 是实射影空间时, $C(n) = \frac{2(n+1)}{n}$; 当 $\bar{M}$ 是复射影空间时, $C(n) = \frac{2(n+2)}{n}$; 当 $\bar{M}$ 是四元数射影空间时, $C(n) = \frac{2(n+4)}{n}$.

3 定理 1.1–1.3 的证明

本节将给出定理 1.1–1.3 的证明. 在定理的证明中, 为方便起见, 令 $N = n + k$.

定理 1.1 的证明 设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ 是 M 在 $\mathbb{R}^N$ 中的位置向量, 则有

$$\int_M x_\alpha d\mu = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

上式意味着 x_α 正交于带权 Paneitz 型算子闭特征值问题的第一规范特征函数 $u_0 = 1/\sqrt{|M|}$. 设 $\{u_j\}_{j=0}^\infty$ 是带权 Paneitz 型算子闭特征值问题的规范正交特征函数, 接下来将说明存在一组新的坐标函数 $\{x'_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 使得

$$\int_M x'_\alpha u_\beta d\mu = 0, \quad (3.1)$$

这里 $\beta = 1, \dots, \alpha - 1$ 且 $\alpha = 2, \dots, N$. 为了说明上式是成立的, 我们定义一个 $N \times N$ 矩阵 $A = (a_{\alpha\beta})$, 这里 $a_{\alpha\beta} = \int_M x_\alpha u_\beta d\mu$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$. 由 QR 正交分解定理可知, 存在一个上三角矩阵 $T = (T_{\alpha\beta})$ 和一个正交矩阵 $B = (b_{\alpha\beta})$ 使得 $T = BA$, 即

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^n b_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \int_M \sum_{\gamma=1}^N b_{\alpha\gamma} x_\gamma u_\beta d\mu = 0, \quad 1 \leq \beta < \alpha \leq N.$$

令 $x'_\alpha = \sum_{\gamma=1}^N b_{\alpha\gamma} x_\gamma$, $\alpha = 1, \dots, N$, 可得 (3.1). 既然 $B = (b_{\alpha\beta})$ 是一个正交矩阵, 则 $\{x'_\alpha\}_{\alpha=1}^N$ 也是一组坐标函数. 因此, 仍然用 x_α ($\alpha = 1, \dots, N$) 表示 x'_α ($\alpha = 1, \dots, N$), 我们有

$$x_\alpha \neq 0, \quad \int_M x_\alpha d\mu = \int_M x_\alpha u_1 d\mu = \dots = \int_M x_\alpha u_{\alpha-1} d\mu = 0, \quad \alpha = 1, \dots, N.$$

那么由 Rayleigh-Ritz 不等式可得

$$\Lambda_i \int_M x_\alpha^2 d\mu \leq \int_M x_\alpha P_f^{a,b} x_\alpha d\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

既然 $P_f^{a,b} x_\alpha = \Delta_f^2 x_\alpha - \operatorname{div}_f[(aR_f g + b\operatorname{Ric}_f)\nabla x_\alpha]$, 由 Stokes 公式可得

$$\Lambda_i \int_M x_\alpha^2 d\mu \leq \int_M [(\Delta_f x_\alpha)^2 + aR_f |\nabla x_\alpha|^2 + b\operatorname{Ric}_f(\nabla x_\alpha, \nabla x_\alpha)] d\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (3.3)$$

在上式中对 α 由 1 到 N 求和, 代入

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Delta_f x_\alpha)^2 = n^2 |H|^2 + |\nabla f|^2, \quad \sum_{\alpha=1}^N |\nabla x_\alpha|^2 = n, \quad \sum_{\alpha=1}^N \operatorname{Ric}_f(\nabla x_\alpha, \nabla x_\alpha) = \operatorname{tr}(\operatorname{Ric}_f) = R_f,$$

可得

$$\sum_{\alpha=1}^N \Lambda_{\alpha} \int_M x_{\alpha}^2 d\mu \leq \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na + b)R_f) d\mu. \quad (3.4)$$

另一方面, 由 Schwartz 不等式可知, 对任意的正常数 δ , 有

$$\Lambda_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \int_M |\nabla x_{\alpha}|^2 d\mu = -\Lambda_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \int_M x_{\alpha} \Delta_f x_{\alpha} d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\delta \Lambda_{\alpha} \int_M x_{\alpha}^2 d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (\Delta_f x_{\alpha})^2 d\mu \right),$$

在上式中对 α 由 1 到 N 求和, 代入 (3.4), 可得

$$\sum_{\alpha=1}^N \Lambda_{\alpha}^{\frac{1}{2}} \int_M |\nabla x_{\alpha}|^2 d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\delta \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na + b)R_f) d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2) d\mu \right). \quad (3.5)$$

既然 $\sum_{\alpha=1}^N |\nabla x_{\alpha}|^2 = n$, 则对任意点 $p \in M$, 通过合适的坐标变换, 可得 $|\nabla x_{\alpha}|^2 \leq 1$, $\alpha = 1, \dots, N$. 那么,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \Lambda_{\alpha}^{\frac{1}{2}} |\nabla x_{\alpha}|^2 &\geq \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{\frac{1}{2}} |\nabla x_i|^2 + \Lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}} \sum_{A=n+1}^N |\nabla x_A|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{\frac{1}{2}} |\nabla x_i|^2 + \Lambda_{n+1}^{\frac{1}{2}} \left(n - \sum_{j=1}^n |\nabla x_j|^2 \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \Lambda_i^{\frac{1}{2}} |\nabla x_i|^2 + \sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}} (1 - |\nabla x_j|^2) \\ &= \sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

综合 (3.5) 和 (3.6), 可得

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}} |M|_f \leq \frac{1}{2} \left(\delta \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na + b)R_f) d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2) d\mu \right). \quad (3.7)$$

令

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2) d\mu}{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na + b)R_f) d\mu}},$$

可得

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2 + (na + b)R_f) d\mu} \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2) d\mu}{|M|_f}. \quad (3.8)$$

(1.2) 得证. 当 (3.8) 中等式成立时, 可知 $\Lambda_1 = \dots = \Lambda_N$ 和 $\Delta_f x_{\alpha} = -\delta \Lambda_n x_{\alpha}$, $\alpha = 1, \dots, N$. 由 $\Delta_f \mathbf{x} = \mathbf{H} + \nabla f$ 可知, $\mathbf{H} + \nabla f = -\delta \Lambda_n \mathbf{x}$. 因此, $\nabla f = -\delta \Lambda_n \mathbf{x}^{\top}$ 和 $\mathbf{H} = -\delta \Lambda_n \mathbf{x}^{\perp}$, 这里 $\mathbf{x}^{\top}$ 和 $\mathbf{x}^{\perp}$ 分别是 $\mathbf{x}$ 的切向和法向部分. 则由 $\mathbf{H} = -\delta \Lambda_n \mathbf{x}^{\perp}$ 和 $\delta \Lambda_n > 0$ 可知, M 是平均曲率流的收缩自相似解. 我们可以由 $\mathbf{x}^{\top} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{x}|^2$ 和 $\nabla f = \delta \lambda_n \mathbf{x}^{\top}$ 推得 $\nabla (f + \frac{\delta \Lambda_n}{2} |\mathbf{x}|^2) = 0$. 因此, $f|_M = a - \frac{\delta \Lambda_n}{2} |\mathbf{x}|^2$, 这里 a 是一个常数. 特别地, 如果 $k = 1$, $\mathbf{H} > 0$, 那么由文献 [18] 可知 M 是一个测地超球面. 至此, 定理 1.1 得证. $\square$

定理 1.2 的证明 由 Nash 嵌入定理, 可将 $\overline{M}$ 看作高维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 的子流形, 则将关系式 (2.8) 和 (2.9) 代入 (1.2), 易得 (1.3) 和 (1.4). 至此, 定理 1.2 得证. $\square$

定理 1.3 的证明 设 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是带权 Paneitz 型算子闭特征值问题的单位正交特征函数, 则对坐标函数 x_α , $\alpha = 1, \dots, N$, 定义一个 $N \times N$ 矩阵 $A = (a_{\alpha\beta})$, 这里 $a_{\alpha\beta} = \int_M x_\alpha u_1 u_{\beta+1} d\mu$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$. 由 QR 正交分解定理可知, 存在一个上三角矩阵 $T = (T_{\alpha\beta})$ 和一个正交阵 $B = (b_{\alpha\beta})$ 使得 $T = BA$, 即

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^n b_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \int_M \sum_{\gamma=1}^N b_{\alpha\gamma} x_\gamma u_1 u_{\beta+1} d\mu = 0, \quad 1 \leq \beta < \alpha \leq N.$$

令 $y_\alpha = \sum_{\gamma=1}^N b_{\alpha\gamma} x_\gamma$, 且 $\phi_\alpha = (y_\alpha - a_\alpha)u_1$, 这里 $a_\alpha = \int_M y_\alpha u_1^2 d\mu$, 那么可得 $\int_M \phi_\alpha u_\beta d\mu = 0$, $1 \leq \beta < \alpha \leq N$. 由 Rayleigh-Ritz 不等式可得

$$\Lambda_{\alpha+1} \int_M \phi_\alpha^2 d\mu \leq \int_M \phi_\alpha P_f^{a,b} \phi_\alpha d\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

既然 $P_f^{a,b} \phi_\alpha = P_f^{a,b}(y_\alpha u_1) - a_\alpha P_f^{a,b} u_1 = P_f^{a,b}(y_\alpha u_1) - \Lambda_1 a_\alpha u_1$, 直接计算可得

$$\begin{aligned} P_f^{a,b}(y_\alpha u_1) &= \Delta_f^2(y_\alpha u_1) - \operatorname{div}_f[(aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla(y_\alpha u_1)] \\ &= \Delta_f^2 y_\alpha u_1 + 2\Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 + 2\Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) \\ &\quad + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) + y_\alpha \Delta_f^2 u_1 + 2g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) \\ &\quad - \operatorname{div}_f[u_1(aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla y_\alpha] - \operatorname{div}_f[y_\alpha(aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla u_1] \\ &= \Delta_f^2 y_\alpha u_1 + 2\Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 + 2\Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) + 2g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) \\ &\quad - \operatorname{div}_f[u_1(aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla y_\alpha] - g(\nabla y_\alpha, (aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla u_1) + y_\alpha P_f^{a,b} u_1 \\ &= s_\alpha + \Lambda_1 y_\alpha u_1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

这里

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \Delta_f^2 y_\alpha u_1 + 2\Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 + 2\Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) + 2g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) \\ &\quad - \operatorname{div}_f[u_1(aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla y_\alpha] - g(\nabla y_\alpha, (aRg + b\operatorname{Ric}_f)\nabla u_1). \end{aligned}$$

由 Stokes 公式可得

$$\int_M s_\alpha u_1 d\mu = 0. \quad (3.11)$$

由此可得 $\int_M \phi_\alpha P_f^{a,b} \phi_\alpha d\mu = \int_M \phi_\alpha (P_f^{a,b}(y_\alpha u_1) - \Lambda_1 a_\alpha u_1) d\mu = \int_M \phi_\alpha (s_\alpha + \Lambda_1 \phi_\alpha) d\mu$, 综合 (3.9)–(3.11) 可知,

$$(\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu \leq \int_M \phi_\alpha s_\alpha d\mu = \int_M y_\alpha u_1 s_\alpha d\mu. \quad (3.12)$$

直接计算可得

$$2 \int_M y_\alpha u_1 g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) d\mu = \int_M (\Delta_f y_\alpha)^2 u_1^2 d\mu + \int_M \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1^2) d\mu - \int_M (y_\alpha \Delta_f^2 y_\alpha) u_1^2 d\mu,$$

$$\begin{aligned}
 2 \int_M y_\alpha u_1 \Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) d\mu &= 2 \int_M y_\alpha \Delta_f u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) d\mu + \int_M \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1^2) d\mu \\
 &\quad + 4 \int_M g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1^2)^2 d\mu, \\
 2 \int_M y_\alpha u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) d\mu &= -2 \int_M u_1 y_\alpha \Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 d\mu - 2 \int_M u_1 \Delta_f u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) d\mu \\
 &\quad - 2 \int_M y_\alpha \Delta_f u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) d\mu.
 \end{aligned}$$

将上述等式代入 (3.12) 并将 s_α 展开可得

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu &\leq \int_M y_\alpha u_1 s_\alpha d\mu \\
 &= \int_M (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1))^2 d\mu \\
 &\quad + \int_M u_1^2 g((aR_f g + b\text{Ric}_f) \nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) d\mu - 2 \int_M g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) u_1 \Delta_f u_1 d\mu,
 \end{aligned}$$

在上式中, 对 α 由 1 到 N 求和并代入

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha=1}^N (\Delta_f x_\alpha)^2 &= n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2, \quad \sum_{\alpha=1}^N g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)^2 = |\nabla u_1|^2, \\
 \sum_{\alpha=1}^N \text{Ric}_f(\nabla x_\alpha, \nabla x_\alpha) &= \text{tr}(\text{Ric}_f) = R_f, \\
 4 \sum_{\alpha=1}^N u_1 \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) &= -4u_1 g(\nabla f, \nabla u_1) \leq 2(|\nabla f|^2 u_1^2 + |\nabla u_1|^2),
 \end{aligned}$$

可得

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu \leq \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + (na + b)R_f) u_1^2 d\mu + 2(n + 3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu. \quad (3.13)$$

另一方面, 可知

$$\begin{aligned}
 \int_M \phi_\alpha (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)) d\mu &= \int_M (y_\alpha - a_\alpha) u_1 (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)) d\mu \\
 &= \int_M |u_1 \nabla y_\alpha|^2 d\mu.
 \end{aligned}$$

那么, 对任意正常数 δ , 由 Schwartz 不等式可得

$$\begin{aligned}
 (\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} \int_M |u_1 \nabla y_\alpha|^2 d\mu &= -(\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} \int_M \phi_\alpha (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)) d\mu \\
 &\leq \frac{1}{2} \left\{ \delta (\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1))^2 d\mu \right\},
 \end{aligned}$$

对上式求和并代入 (3.13), 可得

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} \int_M |u_1 \nabla y_\alpha|^2 d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} \left\{ \delta(\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1))^2 d\mu \right\} \\
&\leq \frac{\delta}{2} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + (na+b)R_f) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\delta} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

由类似于 (3.6) 的讨论可知,

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Lambda_{\alpha+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} |\nabla y_\alpha|^2 \geq \sum_{j=1}^n (\Lambda_{j+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.15}$$

综合 (3.14) 和 (3.15), 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (\Lambda_{j+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{\delta}{2} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + (na+b)R_f) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\delta} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\}. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

由 Gauss 方程可知,

$$R = n(n-1)|\mathbf{H}|^2 - (S - n|\mathbf{H}|^2) \leq n(n-1)|\mathbf{H}|^2,$$

这里 S 是 M 的第二基本形式的平方, 而 R 是数量曲率. 另一方面, 由 $R_f = \text{tr}(\text{Ric}_f) = \text{tr}(\text{Ric} + \nabla^2 f) = R + \Delta f$ 可知, $R_f \leq n(n-1)|\mathbf{H}|^2 + \Delta f$. 将上式代入 (3.16) 得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n (\Lambda_{j+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{\delta}{2} \left\{ \int_M (n[n + (n-1)(na+b)]|\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + (na+b)\Delta f) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2\delta} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\},
\end{aligned}$$

取

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}{\int_M (n[n + (n-1)(na+b)]|\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + (na+b)\Delta f) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}},$$

可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n (\Lambda_{j+1} - \Lambda_1)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{\int_M (n[n + (n-1)(na+b)]|\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + (na+b)\Delta f) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu} \\
&\quad \times \sqrt{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

(1.3) 得证. 如果 (3.17) 中等式成立, 则有 $\Lambda_1 = \cdots = \Lambda_N$ 且 $S \equiv n|\mathbf{H}|^2$, 那么 M 是全脐的, 因而, M 等度于一个球. 定理 1.3 得证. $\square$

4 定理 1.4 和 1.5 的证明

本节将给出定理 1.4 和 1.5 的证明.

定理 1.4 的证明 设 $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ 是特征值问题 (1.5) 的单位正交特征函数, 则对坐标函数 x_α ($\alpha = 1, \dots, N$), 定义一个 $N \times N$ 矩阵 $A = (a_{\alpha\beta})$, 这里 $a_{\beta\alpha} = \int_M x_\alpha u_1 u_{\beta+1} d\mu$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, N$. 由 QR 正交分解定理可知, 存在一个上三角矩阵 $T = (T_{\beta\alpha})$ 和一个正交阵 $B = (b_{\alpha\beta})$ 使得 $T = BA$, 即

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^n b_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta} = \int_M \sum_{\gamma=1}^N b_{\alpha\gamma} x_\gamma u_1 u_{\beta+1} d\mu = 0, \quad 1 \leq \beta < \alpha \leq N.$$

令 $y_\alpha = \sum_{\gamma=1}^N b_{\alpha\gamma} x_\gamma$, 且 $\phi_\alpha = (y_\alpha - a_\alpha)$, 这里 $a_\alpha = \int_M y_\alpha u_1^2 d\mu$, 那么可得 $\int_M \phi_\alpha u_\beta d\mu = 0$, $1 \leq \beta < \alpha \leq N$. 由 Rayleigh-Ritz 不等式可得

$$\Lambda_{\alpha+1} \int_M \phi_\alpha^2 d\mu \leq \int_M \phi_\alpha (\Delta_f^2 - \tau \Delta_f) \phi_\alpha d\mu, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

直接计算可得

$$(\Delta_f^2 - \tau \Delta_f)(\phi_\alpha) = (\Delta_f^2 - \tau \Delta_f)(y_\alpha u_1) - a_\alpha (\Delta_f^2 - \tau \Delta_f)(u_1) \quad (4.2)$$

和

$$\begin{aligned} (\Delta_f^2 - \tau \Delta_f)(y_\alpha u_1) &= \Delta_f^2 y_\alpha u_1 + 2\Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 + 2\Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) \\ &\quad + y_\alpha \Delta_f^2 u_1 + 2g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) - \tau u_1 \Delta_f y_\alpha - 2\tau g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) - \tau y_\alpha \Delta_f u_1 \\ &= q_\alpha + \Gamma_1 y_\alpha u_1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

这里

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \Delta_f^2 y_\alpha u_1 + 2\Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 + 2\Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) \\ &\quad + 2g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) - \tau u_1 \Delta_f y_\alpha - 2\tau g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1). \end{aligned}$$

由 Stokes 公式可得

$$\int_M q_\alpha u_1 d\mu = 0. \quad (4.4)$$

由此可得

$$\int_M \phi_\alpha (\Delta_f^2 - \tau \Delta_f) \phi_\alpha d\mu = \int_M \phi_\alpha ((\Delta_f^2 - \tau \Delta_f)(y_\alpha u_1) - \Gamma_1 a_\alpha u_1) d\mu = \int_M \phi_\alpha (q_\alpha + \Gamma_1 \phi_\alpha) d\mu,$$

综合 (4.1)–(4.4) 可知,

$$(\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu \leq \int_M \phi_\alpha q_\alpha d\mu = \int_M y_\alpha u_1 q_\alpha d\mu. \quad (4.5)$$

直接计算可得

$$2 \int_M y_\alpha u_1 g(\nabla(\Delta_f y_\alpha), \nabla u_1) d\mu = \int_M (\Delta_f y_\alpha)^2 u_1^2 d\mu + \int_M \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1^2) d\mu - \int_M (y_\alpha \Delta_f^2 y_\alpha) u_1^2 d\mu,$$

$$\begin{aligned}
2 \int_M y_\alpha u_1 \Delta_f g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) d\mu &= 2 \int_M y_\alpha \Delta_f u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) d\mu + \int_M \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1^2) d\mu \\
&\quad + 4 \int_M g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)^2 d\mu, \\
2 \int_M y_\alpha u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla(\Delta_f u_1)) d\mu &= -2 \int_M u_1 y_\alpha \Delta_f y_\alpha \Delta_f u_1 d\mu - 2 \int_M u_1 \Delta_f u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) d\mu \\
&\quad - 2 \int_M y_\alpha \Delta_f u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) d\mu, \\
-2 \int_M y_\alpha u_1 g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) d\mu &= \int_M g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) u_1^2 d\mu - 2 \int_M u_1^2 y_\alpha \Delta_f y_\alpha d\mu.
\end{aligned}$$

将上述等式代入 (4.5) 并将 q_α 展开可得

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu &\leq \int_M y_\alpha u_1 q_\alpha d\mu \\
&= \int_M (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1))^2 d\mu \\
&\quad - 2 \int_M g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) u_1 \Delta_f u_1 d\mu + \tau \int_M g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) u_1^2 d\mu,
\end{aligned}$$

在上式中, 对 α 由 1 到 N 求和并代入

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^N (\Delta_f x_\alpha)^2 &= n^2 |\mathbf{H}|^2 + |\nabla f|^2, \quad \sum_{\alpha=1}^N g(\nabla y_\alpha, \nabla y_\alpha) = n, \quad \sum_{\alpha=1}^N g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)^2 = |\nabla u_1|^2, \\
4 \sum_{\alpha=1}^N u_1 \Delta_f y_\alpha g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1) &= -4u_1 g(\nabla f, \nabla u_1) \leq 2(|\nabla f|^2 u_1^2 + |\nabla u_1|^2),
\end{aligned}$$

可得

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu \leq \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + n\tau) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu. \quad (4.6)$$

另一方面, 可知

$$\int_M \phi_\alpha (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)) d\mu = \int_M (y_\alpha - a_\alpha) u_1 (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)) d\mu = \int_M |u_1 \nabla y_\alpha|^2 d\mu.$$

那么, 对任意正常数 δ , 由 Schwartz 不等式可得

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \int_M |u_1 \nabla y_\alpha|^2 d\mu &= -(\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \int_M \phi_\alpha (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1)) d\mu \\
&\leq \frac{1}{2} \left\{ \delta (\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1))^2 d\mu \right\},
\end{aligned}$$

对上式求和并结合 (4.6), 可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^N (\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \int_M |u_1 \nabla y_\alpha|^2 d\mu \\
&\leq \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} \left\{ \delta (\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1) \int_M \phi_\alpha^2 d\mu + \frac{1}{\delta} \int_M (u_1 \Delta_f y_\alpha + 2g(\nabla y_\alpha, \nabla u_1))^2 d\mu \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\delta}{2} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + n\tau) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\delta} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

由类似于 (3.6) 的讨论可知,

$$\sum_{\alpha=1}^N (\Gamma_{\alpha+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} |\nabla y_\alpha|^2 \geq \sum_{j=1}^n (\Gamma_{j+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

综合 (4.7) 和 (4.8), 可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\Gamma_{j+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} &\leq \frac{\delta}{2} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + n\tau) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2\delta} \left\{ \int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

取

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + n\tau) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}},$$

可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (\Gamma_{j+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2 + n\tau) u_1^2 d\mu + 2(n+3) \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu} \\ &\quad \times \sqrt{\int_M (n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2) u_1^2 d\mu + 6 \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

在 $\Delta_f^2 u_1 - \tau \Delta_f u_1 = \Gamma_1 u_1$ 两边乘以 u_1 并在 M 上积分, 可得

$$\int_M (\Delta_f u_1)^2 d\mu + \tau \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu = \Gamma_1. \quad (4.11)$$

再由 Schwartz 不等式可得

$$\int_M |\nabla u_1|^2 d\mu = \int_M -u_1 \Delta_f u_1 d\mu \leq \left(\int_M u_1^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_M (\Delta_f u_1)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_M (\Delta_f u_1)^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

将 (4.12) 代入 (4.11), 可得

$$\left(\int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \right)^2 + \tau \int_M |\nabla u_1|^2 d\mu - \Gamma_1 \leq 0.$$

求解不等式可得

$$\int_M |\nabla u_1|^2 d\mu \leq \frac{\sqrt{4\Gamma_1 + \tau^2} - \tau}{2}. \quad (4.13)$$

代入 (4.10), 并注意到 $C_0 = \max_{x \in \bar{\Omega}} \{n^2 |\mathbf{H}|^2 + 3|\nabla f|^2\}$, 可得

$$\sum_{j=1}^n (\Gamma_{j+1} - \Gamma_1)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{C_0 - 3\tau + (n+3)\sqrt{4\Gamma_1 + \tau^2}} \times \sqrt{C_0 + 3(\sqrt{4\Gamma_1 + \tau^2} - \tau)}.$$

定理 1.4 得证. □

定理 1.5 的证明 设 u 是 M 上与 Γ_1 对应的特征函数, 则对任意的光滑向量场 X , 直接计算并使用 Kato 不等式可得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_f(|\nabla u|^2 X) &= |\nabla u|^2 \operatorname{div}_f X + 2|\nabla u|g(X, \nabla|\nabla u|) \\ &\geq |\nabla u|^2 \operatorname{div}_f X - 2|\nabla u||X||\nabla|\nabla u|| \\ &\geq |\nabla u|^2 \operatorname{div}_f X - |\nabla u|^2 |X|^2 - |\nabla|\nabla u||^2 \\ &\geq |\nabla u|^2 (\operatorname{div}_f X - |X|^2) - |\nabla^2 u|^2.\end{aligned}\quad (4.14)$$

另一方面, 既然在边界上有 $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, 则可知 $\nabla u|_{\partial M} = 0$, 因而由分部积分公式可得

$$\int_M \operatorname{div}_f(|\nabla u|^2 X) d\mu = \int_{\partial M} |\nabla u|^2 g(X, \nu) = 0,$$

在 (4.14) 两边积分可以得到

$$0 \geq \inf_M (\operatorname{div}_f X - |X|^2) \int_M |\nabla u|^2 d\mu - \int_M |\nabla^2 u|^2 d\mu. \quad (4.15)$$

对带权 Bochner 公式^[19]

$$\frac{1}{2} \Delta_f |\nabla u|^2 = |\nabla^2 u|^2 + g(\nabla(\Delta_f u), \nabla u) + \operatorname{Ric}_f(\nabla u, \nabla u),$$

两边积分, 注意到 $\operatorname{Ric}_f \geq kg$, 可得

$$\begin{aligned}0 &= \int_M |\nabla^2 u|^2 d\mu + \int_M g(\nabla(\Delta_f u), \nabla u) d\mu + \int_M \operatorname{Ric}_f(\nabla u, \nabla u) d\mu \\ &\geq \int_M |\nabla^2 u|^2 d\mu - \int_M u \Delta_f^2 u d\mu + k \int_M |\nabla u|^2 d\mu.\end{aligned}\quad (4.16)$$

将 (4.15) 代入 (4.16), 整理后可得

$$\int_M |\Delta_f u|^2 d\mu - \tau \int_M u \Delta_f u d\mu \geq \inf_M (\operatorname{div}_f X - |X|^2 + k) \int_M |\nabla u|^2 d\mu - \tau \int_M u \Delta_f u d\mu.$$

既然 u 是第一特征函数, 再由分部积分公式, 可得

$$\Gamma_1 \int_M u^2 d\mu \geq \inf_M (\operatorname{div}_f X - |X|^2 + k + \tau) \int_M |\nabla u|^2 d\mu.$$

再由 Poincaré 不等式, 可知 $\lambda_1 \leq \frac{\int_M |\nabla u|^2 d\mu}{\int_M u^2 d\mu}$, 从而可得 (1.8). 定理 1.5 得证. $\square$

致谢 感谢审稿人对本文的仔细审阅和提出的宝贵意见, 使得本文的质量得以极大提升. 同时也感谢编委在处理本文时所付出的辛勤劳动.

参考文献

- 1 Roth J. Reilly-type inequalities for Paneitz and Steklov eigenvalues. *Potential Anal*, 2020, 53: 773–798
- 2 Xu X W, Yang P C. Positivity of Paneitz operators. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2001, 7: 329–342
- 3 Chen D, Li H. The sharp estimates for the first eigenvalue of Paneitz operator on 4-dimensional submanifolds. *arXiv:1010.3102*, 2010
- 4 Chen D, Li H. Second eigenvalue of Paneitz operators and mean curvature. *Comm Math Phys*, 2011, 305: 555–562

- 5 Paneitz S. A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary). *SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl*, 2008, 4: 1–3
- 6 Branson T P. Group representations arising from Lorentz conformal geometry. *J Funct Anal*, 1987, 74: 199–291
- 7 Cheng Q M. Estimates for eigenvalues of the Paneitz operator. *J Differential Equations*, 2014, 257: 3868–3886
- 8 Du F, Wu C X. Isoperimetric upper bounds for the first eigenvalue of the Paneitz operator and the p -Laplace operator (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2017, 47: 1047–1054 [杜锋, 吴传喜. Paneitz 算子和 p -Laplace 算子的第一特征值的等周上界. *中国科学: 数学*, 2017, 47: 1047–1054]
- 9 Payne L E. New isoperimetric inequalities for eigenvalues and other physical quantities. *Comm Pure Appl Math*, 1956, 9: 531–542
- 10 Xia C. Universal inequalities for eigenvalues of the vibration problem for a clamped plate on Riemannian manifolds. *Q J Math*, 2011, 62: 235–258
- 11 Xia C, Xu H. Inequalities for eigenvalues of the drifting Laplacian on Riemannian manifolds. *Ann Global Anal Geom*, 2014, 45: 155–166
- 12 Du F, Bezerra A C. Estimates for eigenvalues of a system of elliptic equations with drift and of bi-drifting Laplacian. *Commun Pure Appl Anal*, 2017, 16: 475–491
- 13 Du F, Wu C, Li G, et al. Estimates for eigenvalues of the bi-drifting Laplacian operator. *Z Angew Math Phys*, 2015, 66: 703–726
- 14 Shouman A. Generalization of Philippin’s results for the first Robin eigenvalue and estimates for eigenvalues of the bi-drifting Laplacian. *Ann Global Anal Geom*, 2019, 55: 805–817
- 15 Chen D, Cheng Q M. Extrinsic estimates for eigenvalues of the Laplace operator. *J Math Soc Japan*, 2008, 60: 325–339
- 16 Domingo-Juan M C, Miquel V, Zhu J J. Reilly’s type inequality for the Laplacian associated to a density related with shrinkers for MCF. *J Differential Equations*, 2021, 272: 958–978
- 17 Li H, Wei Y. f -minimal surface and manifold with positive m -Bakry-Émery Ricci curvature. *J Geom Anal*, 2015, 25: 421–435
- 18 Huisken G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J Differential Geom*, 1990, 31: 285–299
- 19 Wei G, Wylie W. Comparison geometry for the Bakry-Émery Ricci tensor. *J Differential Geom*, 2009, 83: 337–405

The eigenvalues inequalities of the weighted Paneitz operator and weighted vibration problem for a clamped plate

Feng Du & Chuanxi Wu

Abstract In this paper, we study the closed eigenvalue problem of the weighted Paneitz operator and weighted vibration problem for a clamped plate on smooth metric measure spaces, and give the upper bounds for the first n eigenvalues on n -dimensional compact submanifolds of a Euclidean space, or a unit sphere, or a projective space, or a general Riemannian manifold. In addition, we give the lower bounds of the first eigenvalue of the weighted vibration problem for a clamped plate on a compact smooth metric measure space with the bounded weighted Ricci curvature.

Keywords weighted Paneitz operator, eigenvalues, inequalities, weighted Ricci curvature, vibration problem

MSC(2020) 35P15, 53C42, 53C21

doi: 10.1360/SSM-2019-0213