基于率态模型的颗粒材料剪切强度理论

童立红, 温斌强, 徐长节, 雷祖祥*

华东交通大学土木建筑学院, 岩土工程研究所, 南昌 330013

* E-mail: zxlei@ecjtu.edu.cn

收稿日期: 2020-11-04; 接受日期: 2020-12-29; 网络版发表日期: 2021-06-23

江西省自然科学基金(编号: 20202BAB204025)和高铁联合基金重点基金(编号: U1934208)资助项目

摘要 颗粒材料在工程中非常普遍, 发展精确的颗粒材料强度理论是其得以应用的基础和关键. 本文基于颗粒接触微观模型, 考虑剪应变由接触颗粒的滑移和颗粒自身旋转共同作用的结果, 建立了剪切带上的应变分量关系. 结合经典的摩擦率态模型, 以能量原理为基础, 构建了颗粒材料剪切强度的耦合演化模型, 该模型可用于分析颗粒材料系统的内摩擦系数随剪切变形的全过程演化状态. 为了验证所得模型的合理性, 使用平均粒径为0.15 mm的规则球状玻璃珠分别进行了等竖向压力变剪切速率和等剪切速率变竖向压力的直剪实验. 实验结果表明, 颗粒材料系统内摩擦系数随剪切位移的变化规律与本文推导的理论模型预测完全一致, 从而验证了本文所提出模型的合理性. 通过进一步对模型参数进行详细分析, 研究了剪切速率和竖向压力对模型参数及材料强度的影响. 结果表明, 颗粒材料系统的剪切强度并非严格遵守库仑强度理论, 剪胀角对剪切强度会产生明显的影响; 颗粒材料竖向应力的增大会使其在剪切破坏前经历更大的变形, 提高颗粒材料系统的韧性. 本文提出的模型可以综合考虑更多的强度影响因素, 提高了模型的准确性, 进一步丰富了颗粒材料强度分析理论.

关键词 直剪实验, 颗粒材料, 剪切强度, 颗粒摩擦模型, 速率状态摩擦定律

1 引言

颗粒材料的研究在工业和岩土工程中有着广泛的应用, 其影响范围涉及土木建筑、农业、化工等行业, 因此对于颗粒材料力学行为的研究具有重大意义. 颗粒材料在宏观表现为离散颗粒的集合体, 单个颗粒的形状、大小、粗糙度在一定程度上影响着颗粒体系的力学性质, 这种离散性、颗粒间的差异性导致了颗粒材料复杂的宏观力学行为, 甚至在很多情况下呈现出类似复杂流体的性质^[1-3]. 虽然对颗粒体系宏观性质的

研究很多^[4-8], 但受实验手段的限制, 确定单个颗粒力学行为比较困难, 近年来得益于实验方法的完善, 颗粒体系在颗粒水平的结构和动力学研究才有了一定程度的发展.

目前针对颗粒材料微观行为的研究方式主要有两种. 一种是采用现代先进的测试技术并结合数值模型进行数值分析, 对颗粒空间分布、接触力分布、颗粒破碎、颗粒位移和旋转以及微观剪切带进行观测, 定性分析颗粒体微观行为. Drescher和de Josselin de Jong^[9]以及Allersma^[10]利用光弹性材料颗粒进行光弹

引用格式: 童立红, 温斌强, 徐长节, 等. 基于率态模型的颗粒材料剪切强度理论. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 489–498

Tong L H, Wen B Q, Xu C J, et al. Shear strength theory of granular materials based on rate-state model (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 489–498, doi: 10.1360/SST-2020-0439

实验, 得到颗粒材料内的应力分布场和位移分布场。杨荣伟和程晓辉^[11]通过光弹实验发现, 直剪作用加剧了颗粒材料几何结构的各向异性; 当颗粒系统到达峰值强度后, 随着剪切变形持续增加, 颗粒系统各向异性减弱。1979年, Cundall和Strack^[12]首先提出利用离散元 (discrete element method, DEM) 数值模型分析颗粒材料受力特性, 为建立颗粒材料宏观与微观性质的联系提供了重要工具。Sitharam^[13]基于离散元模型, 从微观力学角度考虑了围压对颗粒材料力学行为的影响, 研究表明, 在高围压下, 颗粒各向异性的减小降低了剪切强度。Cui和O'Sullivan^[14]探讨了宏观尺度响应对表面摩擦的敏感性以及试样的生成方法。Kuhn^[15]研究了颗粒材料在剪切过程中微带 (microband) 的形成和发展以及微带内及其附近颗粒的滑移和旋转状态。另一种研究方法是在微观观测和力学实验的基础上建立起相应的力学模型, 将宏观力学量与微观力学量联系起来, 并定量地分析颗粒体的力学行为。Christoffersen等人^[16]根据各微观运动学变量推导出定性和定量上都与实验观测相符的膨胀方程, 钟晓雄和袁建新^[17]在前人的基础上提出了充分考虑散粒体微观组构变化的本构理论。Niemeijer和Spiers^[18], Chen和Spiers^[19]分别用应力平衡法和能量平衡法建立了微观与宏观之间的联系, 推导出一个符合实际的碳酸盐岩摩擦模型。但以往的研究缺乏对颗粒系统强度与微观颗粒体行为两者内在联系的探讨。目前没有一个很好的理论来描述颗粒系统强度的发展与单个颗粒间力学行为的关系, 因此有必要对此问题展开初步研究。

本文试图在前人基础上, 从微观角度对颗粒摩擦行为进行阐释, 推导出符合实际的颗粒系统剪切强度模型。该模型考虑了颗粒的滑移与自旋以及系统的膨胀特性, 并结合速率状态摩擦定律, 得到了最终的颗粒材料剪切强度模型。通过直剪实验, 将本实验结果与模型进行对比, 以验证本实验模型的准确性; 最后将参数进行分析, 预测其他条件下的颗粒摩擦行为。

2 模型推导

鉴于颗粒材料复杂的力学行为, 为了建立颗粒材料宏观剪切强度理论模型, 本实验将从微单元体出发, 考虑颗粒间的接触行为对颗粒系统整体力学行为的影响。引入剪胀角、颗粒滑移和转动、接触摩擦, 再由能

量平衡方程建立颗粒材料宏观强度的理论模型。为了进一步描述颗粒材料系统强度随剪切变形的演化关系, 颗粒接触处的摩擦行为假定满足经典的摩擦率态模型 (rate and state frictional model), 最终形成颗粒材料系统宏观强度的演化分析理论模型。模型的具体推导过程如下。

2.1 应变分量关系

为了简化模型的构建, 假设颗粒材料的剪切变形主要由颗粒的滑移和颗粒自旋引起, 即忽略剪切过程中颗粒本身破碎及变形的影响。Niemeijer和Spiers^[18]的研究表明, 剪切变形主要由剪切带中的颗粒位移引起, 对于密实颗粒材料系统, 其在剪切变形过程中会出现剪胀现象, 假设对应的剪胀角为 ψ , 剪切引起的竖向应变为 ε , 切应变为 γ , 如图1所示。

考虑到剪切过程中, 颗粒不仅有滑移还有旋转, 因此切应变率可表示为滑移引起的切应变率 $\dot{\gamma}_s$ 及旋转引起的切应变率 $\dot{\gamma}_r$ 之和:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_s + \dot{\gamma}_r. \quad (1)$$

剪切带上的附加竖向应变主要由剪胀引起, 对剪胀有贡献的切应变主要是颗粒滑移引起的切应变, 颗粒旋转引起的切应变对颗粒剪胀并无贡献, 由图1可知, 附加竖向应变 (以压应变为正) 可表示为

$$\dot{\varepsilon} = -\tan\psi(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_r). \quad (2)$$

若令颗粒平均粒径为 d , 颗粒的平均自旋率为 $\dot{\alpha}$, 则可将颗粒旋转引起的切应变率表示为

$$\dot{\gamma}_r = \frac{d\dot{\alpha}}{2h}, \quad (3)$$

图1 (网络版彩图)理想化结构示意图, 其中 γ 由 γ_r 和 γ_s 共同组成

Figure 1 (Color online) Idealized diagram of structure, where γ is composed of γ_r and γ_s .

h 为单元高度, 一般有 $h=nd$, 根据Chen和Spiers^[19]的发现, $n \approx \cos\psi$, 即 $h=d\cos\psi$, 代入到式(3)中, 则旋转引起的切应变率进一步写为

$$\dot{\gamma}_r = \frac{\dot{\alpha}}{2\cos\psi}. \quad (4)$$

将式(4)代入式(2), 可将附加竖向应变率表示为旋转率影响的方程:

$$\dot{\varepsilon} = -\tan\psi \left(\dot{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}}{2\cos\psi} \right). \quad (5)$$

2.2 剪切过程能量平衡方程

为了建立颗粒系统剪切强度模型, 假设剪切带上的切应力为 τ , 正应力为 σ_n . 本实验所研究的剪切并非冲击剪切行为, 故认为系统的自由能不变. 另外, 考虑颗粒材料本身刚度比系统刚度大很多, 因此颗粒本身变形产生的弹性势能可以忽略不计, 则根据热力学定律, 外部做功全部转化为摩擦耗散, 因此有

$$\tau \dot{\gamma} + \sigma_n \dot{\varepsilon} = \dot{D}_c, \quad (6)$$

式中 $\dot{D}_c$ 为单位体积耗散功率. 假设单位体积内的平均接触数量为 N_c , 每个接触的耗散功率为 $\dot{\Delta}_c$, 可得

$$\dot{D}_c = N_c \dot{\Delta}_c. \quad (7)$$

颗粒接触处由于接触应力的作用, 会形成平面接触, 接触面积用 a_c 表示, 接触处的法向和切向应力分别用 σ_n 和 τ 表示, 如图1所示, 则可建立单个接触耗散功率 $\dot{\Delta}_c$ 与颗粒滑移速度和旋转速率的关系:

$$\dot{\Delta}_c = \tau a_c \left(\dot{v}_c + \frac{d}{2} \dot{\alpha} \right). \quad (8)$$

由几何关系可知, 颗粒滑动引起的水平位移速度 v_{gr} 与滑动切应变率 $\dot{\gamma}_s$ 的关系可表示为

$$v_{gr} = h \dot{\gamma}_s \approx (d\cos\psi) \dot{\gamma}_s, \quad (9)$$

式中 $h \approx d\cos\psi$ 是单位单元高度. 而接触滑移速度 $\dot{v}_c$ 与 v_{gr} 的关系为 $\dot{v}_c = v_{gr} / \cos\psi$, 因此结合式(9)可得接触滑移速度与滑动切应变率 $\dot{\gamma}_s$ 的关系:

$$\dot{v}_c = d \dot{\gamma}_s. \quad (10)$$

将式(10)代入式(8), 可得

$$\dot{\Delta}_c = \tau a_c \left(d \dot{\gamma}_s + \frac{d}{2} \dot{\alpha} \right). \quad (11)$$

再将式(1)和(4)代入式(11), 颗粒接触耗散功率可进一步表示为

$$\dot{\Delta}_c = \tau a_c \left(d \dot{\gamma} - \frac{d \dot{\alpha}}{2\cos\psi} + \frac{d}{2} \dot{\alpha} \right). \quad (12)$$

Chen和Spiers^[19]的研究表明, 颗粒系统单位体积的平均接触数 N_c 与膨胀角满足简单的关系 $N_c \approx 1/(d^3 \cos\psi)$, 将该关系及式(12)代入式(7), 可得系统单位体积的耗散功率:

$$\dot{D}_c = \frac{\tau a_c \left(\dot{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}}{2\cos\psi} + \frac{\dot{\alpha}}{2} \right)}{d^2 \cos\psi}. \quad (13)$$

2.3 剪切强度模型

对于无黏性颗粒材料接触强度满足库仑摩擦强度理论, 即 $\tau = \tilde{\mu} \sigma_n$, 式中 $\tilde{\mu}$ 是颗粒接触摩擦系数. 因此, 当颗粒材料系统受到切应力滑动时, 耗散功率 $\dot{D}_c$ 可由接触竖向应力 σ_n 进一步表示为

$$\dot{D}_c = \frac{\tilde{\mu} \sigma_n a_c \left(\dot{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}}{2\cos\psi} + \frac{\dot{\alpha}}{2} \right)}{d^2 \cos\psi}. \quad (14)$$

另一方面, 假设均匀剪切过程, 忽略惯性力影响, 应力处于极限平衡状态, 则颗粒接触竖向应力满足平衡方程:

$$\sigma_n = \frac{(\sigma_n d^2 \cos\psi + \tau d^2 \sin\psi)}{a_c}. \quad (15)$$

将式(15)代入式(14), 可将耗散功率 $\dot{D}_c$ 用切应力 τ 及正应力 σ_n 表示为

$$\dot{D}_c = \tilde{\mu} (\sigma_n + \tau \tan\psi) \left(\dot{\gamma} - \frac{\dot{\alpha}}{2\cos\psi} + \frac{\dot{\alpha}}{2} \right). \quad (16)$$

将式(16)代入能量平衡方程(6)中, 假设颗粒旋转引起的滑移占总滑移的比例为 λ , 即 $\dot{\gamma}_s = \lambda \dot{\gamma}$, 则可得颗粒系统剪切强度模型:

$$\mu_s = \frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\lambda(\tilde{\mu} + \tan\psi) + \cos\psi(1-\lambda)\tilde{\mu}}{1 - \lambda\tilde{\mu}\tan\psi - \cos\psi(1-\lambda)\tilde{\mu}\tan\psi}. \quad (17)$$

式(17)所示强度模型中颗粒材料接触摩擦系数 $\tilde{\mu}$ 并非常量, 而是随着剪切位移演化的量. 根据Dieterich^[20]

和Ruina^[21]提出的经典速率(v)-状态(θ)摩擦定律(rate- and state-dependent friction, RSF), 摩擦系数演化方程为

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 + a \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) + b \ln\left(\frac{v_0 \theta}{L}\right), \quad (18)$$

式中, $\tilde{\mu}_0$ 是稳定状态下摩擦系数; a 和 b 是材料常量, 分别用于描述剪切速度 v 突变对摩擦系数引起的“直接”作用及“演化”效应; v_0 是模型参考速度; L 是特征滑移距离. Ruina^[21]的研究表明, 状态 θ 的演化可由一个简单的微分方程控制:

$$\dot{\theta} = 1 - \frac{v\theta}{L}. \quad (19)$$

如果给定初始条件 $\theta|_{t=0}=\theta_0$, 求解方程(19)可得状态 θ 的演化函数:

$$\theta = \left(\theta_0 - \frac{L}{v}\right)e^{-\frac{v}{L}t} + \frac{L}{v}. \quad (20)$$

对于常应变率情况, 例如直剪实验, 剪切位移 $S=vt$, 则式(20)可进一步表示为剪切位移的函数:

$$\theta = \left(\theta_0 - \frac{L}{v}\right)e^{-\frac{s}{L}} + \frac{L}{v}. \quad (21)$$

将式(17), (18)和(21)联合, 便得到颗粒材料系统剪切强度模型的耦合方程:

$$\mu_s = \frac{\tau}{\sigma_n} = \frac{\lambda(\tilde{\mu} + \tan\psi) + \cos\psi(1-\lambda)\tilde{\mu}}{1 - \lambda\tilde{\mu}\tan\psi - \cos\psi(1-\lambda)\tilde{\mu}\tan\psi}, \quad (22a)$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 + a \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) + b \ln\left(\frac{v_0 \theta}{L}\right), \quad (22b)$$

$$\theta = \left(\theta_0 - \frac{L}{v}\right)e^{-\frac{s}{L}} + \frac{L}{v}. \quad (22c)$$

求解时, 先由方程(22c)确定状态演化函数, 再将状态演化函数代入(22b)式确定颗粒接触摩擦演化, 最后由(22a)式确定颗粒材料系统剪切强度与剪切位移的关系.

3 模型验证及结果分析

3.1 实验方案

为了说明本文的颗粒材料剪切强度模型的合理性, 采用颗粒较为均匀的球形玻璃珠材料模拟颗粒材料系统, 对其进行直剪实验研究. 直剪仪采用的是电动控制式, 主要由电子控制仪表盘、剪切盒、垂直加荷构件、剪切力施加构件和百分表等组成, 示意图如图2所示. 剪切盒尺寸为内径61.8 mm, 高20 mm. 垂向荷载通过施加的砝码重量控制, 剪切力大小可通过百分表读取.

实验所使用的颗粒材料平均粒径为0.15 mm, 实验材料如图2所示. 实验中, 为了研究竖向应力的影响, 共采用6组竖向应力进行实验, 依次为100, 300, 350, 400, 500和600 kPa. 由推导的剪切强度模型可以看出, 剪切速率对剪切强度也有影响, 因此对于同一种竖向应力荷载作用, 分别采用不同的剪切速率进行实验, 分别为0.1, 0.4, 0.8, 1.2, 1.8和2.4 mm/min. 实验时, 向剪切盒内定量倒入100 g颗粒材料, 为了保证应力的均匀, 在实验材料上部加装一块平整透水石, 再加载相应的竖向应力. 实验开始前, 先让试样在所加载的应力作用下静置15 min, 保证材料系统进入平衡稳定状态. 由于实验所使用的直剪盒直径和高度远远超出颗粒材料

图2 (网络版彩图)实验仪器与实验材料

Figure 2 (Color online) Experimental instruments and material used for tests.

粒径, 因此可以最大化排除尺寸效应的干扰^[22].

3.2 实验结果

根据上述实验方案, 分别进行了实验并对实验结果进行了详细记录. 图3给出了不同剪切速率下, 所用颗粒材料系统剪切强度随竖向应力的变化关系. 令人惊讶的是, 实验中不同剪切速率的条件下, 无量纲峰值强度 μ_s^p 随着竖向应力的增大呈下降趋势, 如图4所示. 另外, 随着剪切位移的增大, 颗粒材料系统的内摩擦系数逐渐增大直至达到峰值 μ_s^p 后保持稳定. 通过对比不同竖向应力下系统达到峰值的剪切位移可以发现, 竖向应力越大, 其达到峰值强度的剪切位移也越大, 即 $d\mu_s/ds$ 随着竖向应力的增大而减小, 如图3所示. 这些现象说明: (1) 颗粒材料系统的峰值强度在经过一定剪切作用后才能达到; (2) 颗粒材料系统的剪切强度并非严格遵守库仑强度理论; (3) 颗粒材料系统剪切面上竖向应力的增大使得系统的宏观韧性增加脆性减弱.

3.3 模型验证

为了验证本文推导的剪切强度模型的合理性, 用

模型(22)分别对上述实验结果进行了拟合, 如图5所示. 图5仅列出了100 kPa竖向应力条件下各个剪切速率的对比结果, 其他竖向应力下的对比结果如附录中的附图1~5所示. 对于同种颗粒材料组成的颗粒系统, 其 a , b , $\bar{\rho}_0$ 是确定的, 为材料参数, 其中 $\bar{\rho}_0 = 0.332$. 如果其他条件保持不变, 进一步假设不同竖向应力作用下颗粒材料内部的力链形态(力的传递路径)保持不变, 则参数 λ 也可以视为常数. 另外, 观察模型(22)可知, θ_0 与 L/v 的大小直接决定了颗粒材料系统为剪切增强型还是剪切弱化型系统, 为了方便模型的拟合, 可取 $\theta_0 = \kappa \cdot L/v$, 其中 κ 是未定系数; 当 $\kappa > 1$ 时, 表示系统具有剪切弱化效应, 当 $\kappa < 1$ 时, 表示系统具有剪切增强效应, 而当 $\kappa = 1$ 时, 则表示系统为稳定系统. 除了上述讨论的参数外, 其他参数均可以拟合得到. 本文使用MATLAB软件对获得的实验数据进行了拟合, 在对数据进行拟合的过程中发现, 当 $a=0.861$, $b=0.753$ 以及 $\lambda=0.33$ 时, 对不同条件下的实验数据都拟合得比较好. 因此, 当剪切速率和法向压力改变时, 只需要分别确定 v_0 , L , ψ 和参数 κ 的值即可. 通过对实验数据的拟合发现, κ 和剪胀角 ψ 仅与法向压力有关, 而与剪切速率无关, 如表1所示. 特征滑移距离 L 和参考速度 v_0 则表现出与剪切速率和法

图3 不同剪切速率和法向荷载下, 颗粒材料系统剪切强度随剪切位移的变化

Figure 3 The shear strength of granular materials varies with shear displacement under different shear rates and normal stresses.

图4 (网络版彩图)无量纲峰值强度 μ_s^p 随着竖向应力的关系曲线

Figure 4 (Color online) Dimensionless peak strength μ_s^p versus normal stress.

向压力的相关性. 表2列出了法向压力为100 kPa时, 不同剪切速率对应的特征滑移距离 L 和参考速度 v_0 的取值, 其余竖向应力对应的参数见附表1~5. 由图5和附图1~5可见, 本文的理论模型和实验数据曲线吻合得非常好, 说明本文推导的剪切强度理论模型具有较高的精度.

3.4 参数分析

为了更为清晰地展示剪切速率和竖向应力对模型参数的影响, 下面分别对模型参数的变化进行详细分析. 图6给出了剪胀角 ψ 随竖向应力 σ_n 的变化曲线. 可以明显看到剪胀角 ψ 随竖向应力的增大而减小. 根据Bolton^[23]提出的砂土峰值内摩擦角和剪胀角 ψ 的线性拟合关系, 有 $\phi_p = \chi\psi + \phi_{cv}$, ϕ_p 是峰值内摩擦角, ϕ_{cv} 是临界状态内摩擦角, χ 是一常量比例系数, 仅与颗粒材料种类有关(Bolton的研究表明对于砂土 $\chi=0.8$). 研究表明, 颗粒材料系统临界状态内摩擦角不受初始状态的影响^[23,24], 即临界状态内摩擦角 ϕ_{cv} 是颗粒材料力学参数, 为定值. 由此可推断, 由本研究理论模型所得的峰值内摩擦角必然随着竖向应力的增大而减小. 事实上, Frydman和Shaham^[25]针对砂土的研究也得出过类似的结论.

为了证实上述推论, 本文将不同竖向应力作用下的峰值剪切应力 τ_{max} 进行对比, 如图7所示. 由图7可见, 剪切速率从0.1 mm/min依次增大到2.4 mm/min时, 峰值剪切应力几乎没有变化, 即在所施加的剪切速率范围内, 剪切速率对颗粒材料的剪切强度几乎没有影响. 另一方面, 峰值剪切应力并非随着竖向应力增加呈线

图5 (网络版彩图)竖向压力为100 kPa时模型拟合值与实验数据的对比曲线

Figure 5 (Color online) Comparison between theoretical predictions and experimental data under normal stress 100 kPa.

表 1 不同竖向应力下参数 κ 的取值和剪胀角大小**Table 1** Values of parameter κ and dilatancy angle under different normal stresses

竖向应力 (kPa)	参数 κ	剪胀角 ψ (°)
100	0.505	5.97
300	0.512	5.769
350	0.518	5.696
400	0.522	5.607
500	0.53	5.413
600	0.534	5.222

表 2 σ_n 为100 kPa时 v_0 和 L 的取值**Table 2** Values of v_0 and L for $\sigma_n=100$ kPa

剪切速率 v (mm/min)	参考速度 v_0 (10^{-5} m/s)	特征滑移距离 L (10^{-3} m)
0.1	0.04	0.43
0.4	0.165	0.47
0.8	0.335	0.52
1.2	0.498	0.6
1.8	0.75	0.63
2.4	1.02	0.68

图 6 剪胀角与竖向应力关系曲线**Figure 6** Dilatancy angle versus normal stress.

性增加, 说明摩尔库仑强度准则对于颗粒材料系统并非完全适用。

图8给出了峰值内摩擦角随着剪胀角的变化, 可以看出, 峰值内摩擦角随着膨胀角近似线性增加, 这与Bolton^[23]基于砂土所得结论是一致的。但是本实验所

用的颗粒材料是更加规则的球形颗粒材料, 在剪切过程中存在颗粒的旋转, 因此比例系数 χ 与砂土并不相同, 而变为 $\chi=4$ 。这说明球形颗粒材料相较于形状不规则的砂土材料, 其峰值内摩擦角对膨胀角敏感性更高。以上论述也间接证明了本文模型参数取值的合理性及所推导的剪切强度模型的适用性。

接下来研究施加的剪切速率对参考速度的影响。图9给出了不同竖向应力下剪切速率与参考速度的关系曲线。由图可以看出, 随着剪切速率的增大, 参考速度线性增大, 说明剪切速率会对颗粒材料系统的初始状态产生明显影响。值得注意的是, 竖向应力越大, 参考速度增长得越快, 即 dv_0/dv 越大。

图10(a)给出了不同剪切速率下, 特征滑移距离与

图 7 峰值剪应力与竖向应力的关系曲线**Figure 7** Peak shear stress versus normal stress. **图 8** 峰值内摩擦角随剪胀角的关系**Figure 8** Peak internal friction angle versus dilatancy angle.

图9 (网络版彩图)参考速度与剪切速度的关系

Figure 9 (Color online) Reference velocity versus shear velocity.

竖向应力的关系曲线。可以看出, 特征滑移距离随着竖向应力的增加整体上呈上升趋势。为了更清晰地展现特征滑移距离与竖向应力的关系, 图10(b)将同一竖向应力的特征滑移距离取平均值作出与竖向应力的关系曲线; 从图中可以看出, 特征滑移距离与竖向应力近似呈线性关系。由式(21)可以看出, 当剪切速率一定时, 特征滑移距离 L 越大, 系统达到稳定状态所经历的滑移距离(时间)越大(长)。因此, 颗粒材料竖向应力的增大能够使其在剪切破坏前经历更大的变形(或者说韧性增加), 这与图3的直接观测结果是一致的。当分析剪切速率对特征滑移距离的影响时发现(尤其是对于竖向应力为100和600 kPa的情况), 剪切速率的增加总体上也会使特征滑移距离增大, 即在相同竖向应力条件下, 剪切速率的增大也在一定程度增大了颗粒材料系统的韧性。

4 结论

本文从颗粒微观角度出发, 建立了颗粒材料系统的变形关系, 再基于能量原理得到了颗粒材料系统剪切强度模型, 结合经典率态摩擦理论, 建立一套耦合的颗粒材料强度理论。为了验证该模型的适用性, 本团队进行了36组直剪实验, 研究了竖向应力和剪切速率对颗粒材料强度的影响。通过与实验结果的对比分析发现, 本研究的模型可以很好地吻合实验结果。最后通过参数分析, 确定影响颗粒材料系统强度的关键参数, 得出的初步结论如下。

图10 (网络版彩图)特征滑移距离与竖向应力的关系曲线。(a) 不同速率下的取值; (b) 同一竖向应力下的平均值

Figure 10 (Color online) Characteristic slip distance versus normal stress. (a) Values at different rates; (b) average values under the same normal stress.

(1) 颗粒材料系统的剪切强度并非严格遵守库仑强度理论, 更为精细化的强度模型需要考虑剪胀角的影响。

(2) 剪切荷载施加初期, 颗粒材料系统的摩擦系数随剪切位移的增大而增大, 这种现象可用经典率态摩擦模型进行合理的解释。

(3) 颗粒材料系统等效内摩擦角与膨胀角呈线性关系, 这与在砂土中得到的结论具有一致性。

(4) 参考剪切速度与剪切速率呈正比, 而竖向应力的增加会提高参考剪切速度和剪切速率的比例系数。

(5) 颗粒材料竖向应力的增大会使系统的特征滑移距离增大, 从而使其在剪切破坏前经历更大的变形, 提高颗粒材料的韧性。

补充材料

本文的补充材料见网络版 techcn.scichina.com. 补充材料为作者提供的原始数据, 作者对其学术质量和内容负责.

参考文献

- 1 Nguyen V B, Darnige T, Bruand A, et al. Creep and fluidity of a real granular packing near jamming. *Phys Rev Lett*, 2011, 107: 138303
- 2 Kou B, Cao Y, Li J, et al. Granular materials flow like complex fluids. *Nature*, 2017, 551: 360–363
- 3 Hanotin C, Kiesgen de Richter S, Marchal P, et al. Vibration-induced liquefaction of granular suspensions. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 198301
- 4 Kouakou N M, Cuisinier O, Masroui F. Estimation of the shear strength of coarse-grained soils with fine particles. *Transp Geotech*, 2020, 25: 100407
- 5 Cai Z Y, Li X S. Deformation characteristics and critical state of sand. *Chin J Geotech Eng*, 2004, 26: 697–701
- 6 Dai B B, Yang J, Zhou C Y. An experimental study on the effect of inter-particle friction on shear behavior of granular materials (in Chinese). *Chin J Theoret Appl Mech*, 2013, 45: 375–383 [戴北冰, 杨峻, 周翠英. 颗粒摩擦对颗粒材料剪切行为影响的试验研究. *力学学报*, 2013, 45: 375–383]
- 7 Dai B B, Yang J, Zhou C Y. A preliminary investigation on effect of particle size on mechanical behavior of granular materials (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2014, 35: 1878–1884 [戴北冰, 杨峻, 周翠英. 颗粒大小对颗粒材料力学行为影响初探. *岩土力学*, 2014, 35: 1878–1884]
- 8 Xu S H, Zheng G, Xu G L. Critical state constitutive model of sand with shear hardening (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2009, 31: 953–958 [徐舜华, 郑刚, 徐光黎. 考虑剪切硬化的砂土临界状态本构模型. *岩土工程学报*, 2009, 31: 953–958]
- 9 Drescher A, de Josselin de Jong G. Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *J Mech Phys Solids*, 1972, 20: 337–340
- 10 Allersma H G B. Optical analysis of stress and strain in photoelastic particle assemblies. Dissertation for Doctoral Degree. Delft: Delft University of Technology, 1987
- 11 Yang R W, Cheng X H. Direct shear experiments of photoelastic granular materials (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2009, 30: 103–109 [杨荣伟, 程晓辉. 光弹颗粒材料的直剪实验研究. *岩土力学*, 2009, 30: 103–109]
- 12 Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 1979, 29: 47–65
- 13 Sitharam T G. Micromechanical modeling of granular materials: Effect of confining pressure on mechanical behavior. *Mech Mater*, 1999, 31: 653–665
- 14 Cui L, O'Sullivan C. Exploring the macro- and micro-scale response of an idealised granular material in the direct shear apparatus. *Géotechnique*, 2006, 56: 455–468
- 15 Kuhn M R. Structured deformation in granular materials. *Mech Mater*, 1999, 31: 407–429
- 16 Christoffersen J, Mehrabadi M M, Nemat-Nasser S. A micromechanical description of granular material behavior. *J Appl Mech*, 1981, 48: 339–344
- 17 Zhong X X, Yuan J X. Microfabrics and constitutive relations of granular materials (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 1992, 14: 39–48 [钟晓雄, 袁建新. 散粒体的微观组构与本构关系. *岩土工程学报*, 1992, 14: 39–48]
- 18 Niemeijer A R, Spiers C J. A microphysical model for strong velocity weakening in phyllosilicate-bearing fault gouges. *J Geophys Res*, 2007, 112: B10405
- 19 Chen J, Spiers C J. Rate and state frictional and healing behavior of carbonate fault gouge explained using microphysical model. *J Geophys Res Solid Earth*, 2016, 121: 8642–8665
- 20 Dieterich J H. Time-dependent friction and the mechanics of stick-slip. *Pure Appl Geophys*, 1978, 116: 790–806
- 21 Ruina A. Slip instability and state variable friction laws. *J Geophys Res*, 1983, 88: 10359–10370
- 22 Zhang Q, Hou M Y. Research on size effect of direct shear test (in Chinese). *Acta Phys Sin*, 2012, 61: 348–353 [张祺, 厚美瑛. 直剪颗粒体系的尺寸效应研究. *物理学报*, 2012, 61: 348–353]
- 23 Bolton M D. The strength and dilatancy of sands. *Géotechnique*, 1986, 36: 65–78
- 24 Rowe P W. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proc R Soc Lond A*, 1962, 269: 500–527
- 25 Frydman S, Shaham I. Pullout capacity of slab anchors in sand. *Can Geotech J*, 1989, 26: 385–400

Shear strength theory of granular materials based on rate-state model

TONG LiHong, WEN BinQiang, XU ChangJie & LEI ZuXiang

Institute of Geotechnical Engineering, School of Civil Engineering and Architecture, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China

Granular materials are very common in engineering applications. Thus, it is essential to develop an accurate strength theory for their description. In this paper, we establish a relationship between the strain components in the shear band based on the microscopic particle contact model. More specifically, we consider the shear strain caused by both the slip and the rotation of the particles. From the principle of energy, a coupled evolution model of the shear strength of granular materials was constructed. This model can be used to analyze the entire evolution process of the internal friction coefficient in granular materials with shear deformation. To verify the model, we used materials composed of glass beads with an average particle size of 0.15 mm. We conducted the shear tests under both constant normal stress and constant shear rate. The experimental results showed that the variation of the internal friction coefficient with shear displacement was consistent with the prediction of our theoretical model. The influences of shear rate and normal stress on the strength were studied by further detailing the model parameters. More specifically, we demonstrated that the shear strength of the granular material system did not strictly follow the Coulomb strength theory, and the dilatancy angle had a significant effect on the shear strength. The increase of normal stress in granular materials resulted in larger deformations before failure. Hence the toughness of granular material was significantly enhanced. The proposed model allowed to comprehensively consider more influencing factors of strength, improve the accuracy of the model, and further enrich the strength analysis theory of granular materials.

direct shear test, granular material, shear strength, granular frictional model, rate and state frictional model

doi: [10.1360/SST-2020-0439](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0439)