



弹性超材料研究进展

胡更开

北京理工大学宇航学院, 北京 100081

E-mail: hugeng@bit.edu.cn

2024-10-17 收稿, 2024-12-18 修回, 2024-12-18 接受, 2024-12-20 网络版发表

国家自然科学基金(11632003, 11972083, 11991030)资助

摘要 弹性超材料是近年来在力学与材料科学交叉领域取得的重要进展, 具有调控弹性波传播的独特能力. 本文主要回顾了弹性超材料的发展历程, 分析了其在低频减振、波传播控制以及声学等工程应用中的潜力. 传统的固体介质对弹性波的调控能力有限, 而弹性超材料通过精心设计微观结构, 能够显著增强材料与波的耦合能力, 从而实现弹性波路径、相位和幅值的调节. 弹性超材料具有亚波长特性, 尤其在低频波动的调控方面展现出独特的优势. 本文介绍了几种主要类型的弹性波超材料, 包括负等效参数弹性波超材料、模式超材料、Willis介质和主动弹性超材料. 负等效参数超材料通过特定的设计阻隔波的传播, 具备良好的低频减隔振能力; 模式超材料则利用非共振机理, 能在较宽的频率范围内调控弹性波, 尤其在固体水声斗篷等应用中具有重要意义; Willis介质则是具有特殊弹性本构关系的材料, 理论上能够实现弹性波的全向阻抗匹配, 适用于设计弹性波斗篷; 主动弹性超材料则通过引入非保守系统, 能够打破时间反演对称性, 实现单向传播等先进功能. 此外, 针对弹性超材料的功能设计, 本文讨论了超材料对体波传播和振动的隔离、极化转换, 及利用属性梯度分布设计弹性波斗篷等, 还进一步介绍了弹性超表面的概念和进展, 最后就弹性超材料的发展趋势进行了讨论与展望.

关键词 弹性超材料, 低频波动调控, 主动超材料, 弹性波斗篷

当关心的时空尺度远大于构成材料基本构元(如原子、周期单元等)的相应尺度时, 材料的宏观响应可用等效材料参数来刻画, 这样可避免陷入细节而更专注宏观层次上的规律和应用, 连续介质力学的创建^[1]和后续复合材料力学的发展正是这一思想的体现^[2]. 为了构建复合材料基本构元与宏观等效参数的关联, 20世纪60年代发展起来的连续细观力学^[3,4]已被广泛用于设计高强和轻质复合材料. 这一阶段人们主要关注材料的静力学性质, 其特点是构元材料参数与复合材料等效参数属于同一类型, 只是数值上的差别. 在研究中也出现少数例外, 如负泊松比材料或拉胀材料^[5,6], 以及研究复合材料动态等效行为时提出的张量密度和动能与势能耦合的Willis介质^[7], 但对这类反常行为缺少系统深入的研究. 进入新世纪以来, 受电磁超材料研究

的启发^[8,9], Liu等人^[10,11]率先提出了具有动态等效负密度的复合材料, 开启了声学超材料的研究. 与追求高强和轻质复合材料设计不同, 超材料设计关注超越构元材料属性和类型的宏观性质, 如由正密度构元材料形成的宏观等效负密度超材料, 以及宏观负体积模量超材料^[12]和双负声学超材料^[13]等.

声学材料中只有纵波模式, 而固体弹性波具有横波和纵波两种模式, 分别由两个不同的材料弹性常数控制. 如果考虑固体的各向异性, 则可有多达21个材料参数, 因此弹性波超材料具有更丰富的内涵, 除了等效负密度^[14]和负体积模量^[15]外, 还有负等效剪切模量^[16-18]等. 另外, 声学材料可以看成弹性固体材料的退化, 传统固体弹性矩阵具有6个正特征值, 而声学材料有5个特征值为零(也称为五模材料). 因此, 可以根据

引用格式: 胡更开. 弹性超材料研究进展. 科学通报, 2025, 70: 1720-1735

Hu G. Advances in elastic metamaterials (in Chinese). Chin Sci Bull, 2025, 70: 1720-1735, doi: [10.1360/TB-2024-1084](https://doi.org/10.1360/TB-2024-1084)

弹性矩阵特征值为零的个数对材料进行分类^[19,20], 如有一个特征值为零称为一维材料, 以此类推. 弹性矩阵缺秩的材料称为极端材料(extremal material)或模式超材料. 通过在固体材料中放松约束, 引入机构位移模式(也称为零能模式), 可实现固体到声学介质(流体)的退化, 模式材料也构成了弹性波超材料的一类. 除了超越构元材料参数的类型, 还可以通过材料微结构设计, 使材料宏观等效关系超越其构元类型^[7,21], 如微观上构元满足胡克定律(应力与应变成正比), 而宏观上应力不仅与应变相关, 而且与质点速度相关, 这种弹性本构称为Willis本构, 相应的材料也称为Willis弹性超材料, 或Willis介质. 本文也将Willis介质作为弹性超材料的一类. 通过对材料系统输入或输出能量, 可增强材料与波的耦合作用, 这时宏观上材料体系为非保守系统或非厄米系统^[22], 超越了构元层次的保守体系. 本文将这样一类材料称为主动弹性超材料. 图1给出了本文要讨论的弹性超材料及机理和应用.

弹性超材料通过微结构增强对波的耦合和调节能力, 为解决工程问题提供了新的思路. 由于其亚波长特点, 在调控低频波方面具有天然优势. 如图1所示, 由于波矢为虚数, 单负参数弹性超材料可以用来阻隔波的传播, 通过谐振频率的设计可实现低频减隔振等功能^[23]. 模式超材料利用非共振机理, 可具有宽低频调控弹性波的能力, 尤其是五模材料能实现与水阻抗匹配, 是实现固体水声斗篷的关键^[24]. Willis介质是实现与

弹性Cauchy介质全向阻抗匹配少有的超材料类型, 且满足弹性波方程变换不变性^[25], 理论上可用于设计弹性波斗篷. 主动超材料可打破时间反演对称性, 实现弹性波的单向传播等^[26].

在工程中, 弹性波的载体通常是梁、板和壳等基本形式, 在本文讨论中不再分类, 将和体波一并讨论. 弹性超表面作为弹性超材料的二维形式, 通过一层或几层胞元对波的相位和幅值进行调控, 由于耗散低、制备简单等优点近期受到了关注^[27]. 此外, 由动力学发展起来的准零刚度概念, 在低频隔振方面具有突出的优势. 近些年来, 实现准零刚度的方式也由复杂的机构形式^[28]转变为材料功能一体化的准零刚度弹性超材料^[29], 为弹性超材料工程化奠定了基础. 因此, 本文在介绍弹性超材料功能设计时, 也将涵盖弹性超表面和准零刚度超材料两部分.

近年来, 将机构位移模式(如折纸等)引入材料和结构中, 进一步超越了传统材料的范畴(如微元不再满足仿射变形假设)^[30,31], 这样一类超材料打破了材料和结构的界限, 一般称为力学超材料^[32]. 此外, 还有对缺陷不敏感的拓扑弹性超材料^[33]. 尽管这两种超材料非常重要, 考虑篇幅所限, 将不在本文讨论之列, 有兴趣的读者可参阅相关文献. 本文用弹性超材料强调主要关注波动力学行为. 虽然弹性超材料经历了20年的发展, 但无论从内涵上、设计理论体系上, 还是工程应用层面, 都还需大量工作, 本文将在第三节就弹性超材料的

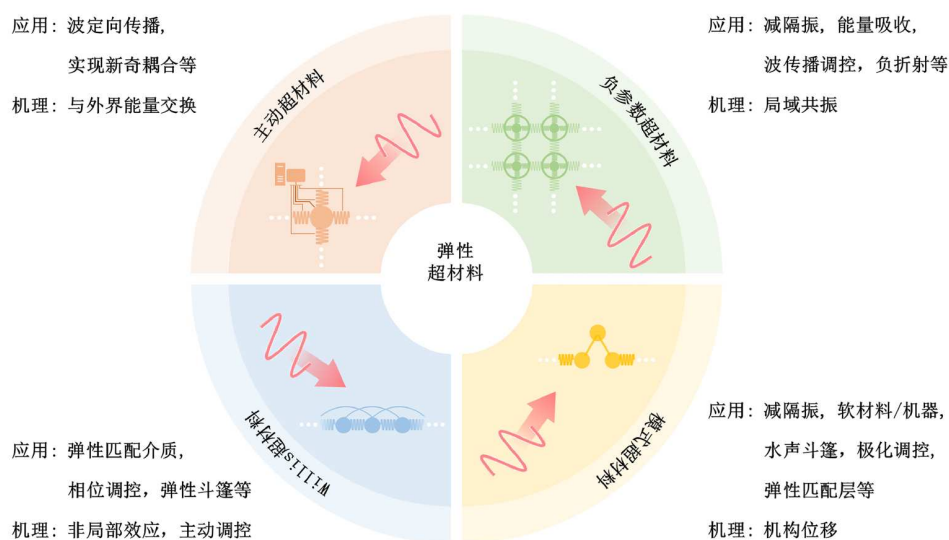


图1 弹性超材料机理与应用

Figure 1 Mechanisms and applications of elastic metamaterials

热点问题进行讨论. 本文首先讨论弹性超材料及设计方法, 然后介绍弹性超材料功能设计, 最后就弹性超材料的发展趋势进行讨论.

1 弹性超材料及设计方法

1.1 负等效材料参数

2000年, Liu等人^[10]利用软橡胶包裹铅颗粒和环氧树脂基体, 通过局域共振机制实现了负等效密度超材料; 2006年, Fang等人^[12]利用Helmholtz谐振腔实现了等效负体积模量超材料. 上述工作开启了声波超材料的研究. 在此期间, Goffaux等人^[34]和Wang等人^[35]分析了二维三相和双相材料体系的局域共振机理; Li和Chan^[36]利用软橡胶颗粒与水混合, 理论分析表明通过Mie谐振可构造声学双负介质. 对于声学超材料体系, 研究表明单极共振可产生负等效体积模量, 偶极共振可实现负密度. 基于共振机制, 负等效参数只在共振频率附近才会产生, 并且带宽很窄. 为了拓宽负密度的频率范围, Lee等人^[13]提出了固支薄膜型负密度超材料, 薄膜和周围空气单元的等效质量在小于谐振频率时均为负值. 在此基础上, Lee等人^[37,38]还结合产生负体积模量的Helmholtz谐振腔, 提出了声学双负材料, 并验证了声波逆多普勒效应. Liang和Li^[39]利用带折叠机制, 通过蜷曲空间对相位进行调节, 实现了非共振型低频双负声学超材料.

对于机械波, Milton和Willis^[40]提出了一维嵌套弹簧质量模型(图2(a)), 清晰地揭示了负等效质量机理,

其等效质量可以表示为

$$m_{\text{eff}} = \left[1 + \frac{1}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \frac{m_1}{m_0} \right] m_0, \quad (1)$$

其中, $\omega_1 = \sqrt{2k_1/m_1}$, 当 $\omega_1 < \omega < \omega_1\sqrt{1+m_1/m_0}$ 时, 等效质量为负值.

Yao等人^[14]从实验上揭示了弹簧质量系统的负等效质量概念和隔波机理并验证了零质量现象. 进一步, Yao等人^[41]将胞元中的隐含质量固定或设为无限大 $m_1 \rightarrow \infty$ (图2(b)), 发现这时系统的等效质量在 $0 < \omega < \sqrt{2k_1/m_0}$ 较宽的带宽内表现出负值, 并在此基础上提出了弹性填充固支波导来实现宽低频负质量模型.

在固体介质中实现单极共振比较困难, 因此很难在固体中实现负体积模量. 为此, Liu等人^[15]提出了一种新的机制: 通过旋转共振实现负等效体积模量. 如图2(a)中所示的弹簧圆盘模型, 其等效刚度可以表示为

$$k_{\text{eff}} = \frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \cos^2 \alpha \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right), \quad (2)$$

其中, 圆盘的转动谐振频率 $\omega_0 = 2\sqrt{k_2/m}$. 当 $\sqrt{k_1/(k_1+k_2\cos^2\alpha)} < \omega/\omega_0 < 1$, 胞元等效刚度为负值.

在上述工作的基础上并结合偶极共振, Zhu等人^[42]实现了弹性波双负超材料, 并实验验证了亚波长弹性波负折射现象. 将弹簧圆盘模型中弹簧 k_1 设为零, 与负等效质量一样, 这时可实现从零频开始的宽频负刚度^[43,44].

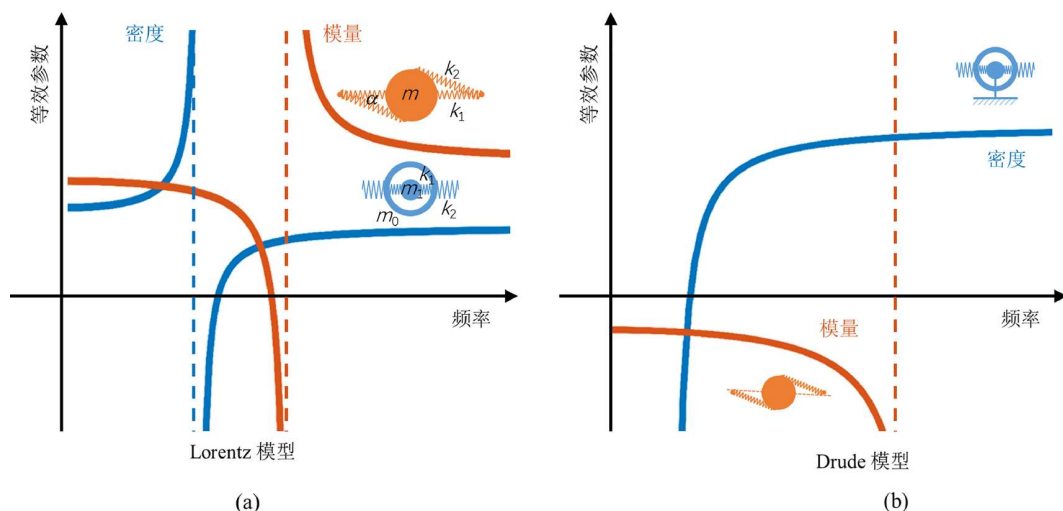


图2 不同机制等效参数与频率的关系. (a) Lorentz模型; (b) Drude模型

Figure 2 Effective parameter as a function of frequency. (a) Lorentz model; (b) Drude model

等效负剪切模量是弹性超材料的重要标志之一。Wu等人^[16]与Zhou和Hu^[17]通过分析涂层夹杂和基体构成的复合材料等效参数,发现负等效剪切模量与四极共振(quadrapole)相关。受上述机理的启发,Lai等人^[18]利用四相材料构建了弹性超材料胞元以便放大四极共振,数值上验证了所设计的超材料具有负剪切模量,并且可通过调节材料和几何参数实现双负弹性超材料。Zhang等人^[45]在构建弹性波斗篷时,通过构建质量弹簧单胞模型,计算表明在平动(单极)和旋转共振频率区间亦可实现双负弹性超材料。由于实现负等效剪切模量的频率范围很窄,在实验验证方面仍有困难。图3总结了本节所讨论的负等效参数弹性超材料和相应的实现机理。

利用局域共振机理对梁板壳等结构上的弹性波进行调控在工程上具有重要意义,可以在这类结构表面周期排列谐振子,形成低频局域共振带隙来对弯曲波进行调控^[46,47],或形成面内剪切模量和密度双负超材料^[48];亦可在这类结构面内刻蚀不同的局域共振微结构来实现对面内弹性波的控制^[49]。将这样一类具有谐

振单元的结构结合主动调控手段,将其等效成相应的均匀结构,可以实现诸如空间非局部密度^[50]、可调弯曲刚度^[51]或Willis介质^[52]等新奇性质。

1.2 模式超材料

根据Kelvin分解,弹性张量 C 可以表示为其特征值 λ_i 与特征向量 S_i (也称为硬模式)的组合,即

$$C = \sum_{i=1}^{6-N} \lambda_i S_i \otimes S_i. \quad (3)$$

对于传统弹性介质,弹性张量具有6个正特征根($N=0$),根据Christoffel方程可知这时总具有3个闭合的等频线。1995年,Milton和Cherkaev研究了弹性矩阵缺秩的模式超材料 $N \neq 0$,并根据特征值为零的个数定义了 N 模材料^[19]。模式材料的等频线不仅可以打开,而且其个数也与模式数相关,比如五模材料只有一个等频线,四模材料只有两个等频线等^[53]。模式材料这种对等频线个数和形状的塑造能力,赋予其极强的波动调控功能,由于没有利用谐振,这种调控功能具有宽频特点。

尽管模式材料的概念提出很早,但一直没有引起

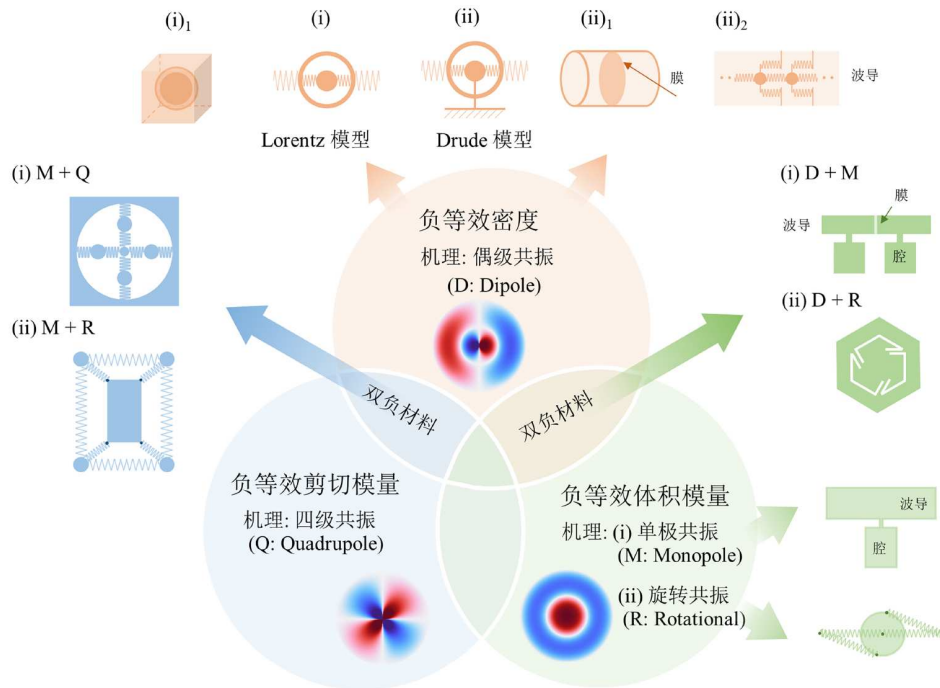


图3 负等效参数超材料及其机理: 颜色表示不同材料参数, 两种颜色重叠区表示双负超材料. (i), (ii)表示形成负等效参数的不同机理, 其下标表示相同机理但不同形式; 大写字母代表共振类型, 其组合表示两种共振机理形成双负超材料

Figure 3 Negative effective parameters and their mechanisms: The colors represent different parameters, and the overlapping areas of the two colors represent the double negative metamaterials. (i) and (ii) denote different mechanisms, and their subscripts denote the same mechanisms but in different forms; The capital letters represent the type of resonance, and their combination indicates the double negative metamaterial formed by the two resonance mechanisms

人们的关注. 直到2012年Kadic等人^[54]利用多光子光刻技术制备出了树脂基各向同性五模材料, 并进一步利用五模材料设计了静态力学斗篷^[55], 进而引发了人们对模式材料的关注^[20]. 利用柔顺结构易产生局部弯曲变形来降低剪切模量, 可较容易近似地实现固体五模材料. 利用这个思路, 许多五模材料构型先后被设计或制备出来^[56,57]. 基于五模材料的变换理论^[58], Chen等人^[24,59]设计并制备了固体水声斗篷, 实验验证了其宽频隐身效果. 五模材料还可以用于实现弹性波滤波和偏振器^[60,61]等功能. 模式材料除了相对简单的五模材料研究较充分外, 其他模式材料的研究相对缓慢, 其主要原因是缺乏一般性的设计方法. 针对五模材料, 由于只有一个硬模式, 将弹性张量根据式(3)用硬模式表示出来($N=5$), 然后采用拓扑优化^[62]或基结构优化的方法^[63]可以设计出相应的微结构.

但对于任意 N 模材料, 其由 $(6-N)$ 个硬模式 S_i 和 N 个软模式 E_i 构成. 在微结构设计时, 需要事先给定软硬模式, 然后进行微结构优化使其满足目标软硬模式, 采用拓扑优化或基结构优化的方法将会非常复杂. 为了简化分析, 可以从杆系构成的单胞开始(如图4(a)), 考虑周期性并根据Maxwell记数准则, 单胞中节点数 j 、杆数 b 和模式数 N 应该满足 $N \leq 3j - b - 6$. 单胞的协调方程表示为 $Bu=e$, 其中 B 为协调矩阵, u 为独立节点的位移向量, e 是杆系的应变向量. 根据协调矩阵 B 可以分析得到胞元内的机构变形模式和自应力模型. Wang等人^[64]提出了先根据软模式来确定胞元内杆系拓扑连接, 再通过优化杆系几何形状和材料来实现要求的硬模式,

其原理如图4(b)所示. 根据所提的方法, 原理上可以实现任意模式材料的定制^[65].

根据上述方法, Groß等人^[66]设计了只承受两组相互正交剪切应力的四模材料, 通过光刻技术制备了相应试样, 实验验证了该超材料具有极化选择的功能. 在此基础上, Wei等人^[67]提出了弹性双折射材料和弹性波四分之一波片的概念. 利用机构的设计, 在特定的软硬模式下, Hu等人^[68]设计出了不同模式数的模式超材料, 并进一步设计出硬模式可调节的三维五模超材料^[69]. 尽管近期模式材料的研究取得了一些进展, 但由于制备技术的限制和新功能挖掘不足, 其他三维模式材料的研究还不多见.

1.3 Willis介质

将非均匀材料单胞等效成一个均匀代表微元, 一般意味着均匀化后的材料形心和质心一致(即弹性中心和惯性中心一致), 但对于不具有空间反演对称性的非均匀胞元, 两者往往不一致. 这将会导致宏观上弹性势能与动能的耦合, 表现为胞元宏观应力 $\langle \sigma \rangle$ 与胞元平均速度 $\langle v \rangle$ 相关, 宏观动量 $\langle p \rangle$ 与胞元宏观应变 $\langle \varepsilon \rangle$ 相关, 即^[7]

$$\begin{cases} \langle \sigma \rangle = C : \langle \varepsilon \rangle + \Psi \cdot \langle v \rangle, \\ \langle p \rangle = \tilde{\Psi} : \langle \varepsilon \rangle + \rho \cdot \langle v \rangle, \end{cases} \quad (4)$$

其中, C 、 Ψ 、 $\tilde{\Psi}$ 、 ρ 分别表示模量、两个Willis耦合系数(对于保守系统, 它们互为伴随张量)和密度张量. 通常上述系数是时空卷积算子, 因此Willis本构能刻画时

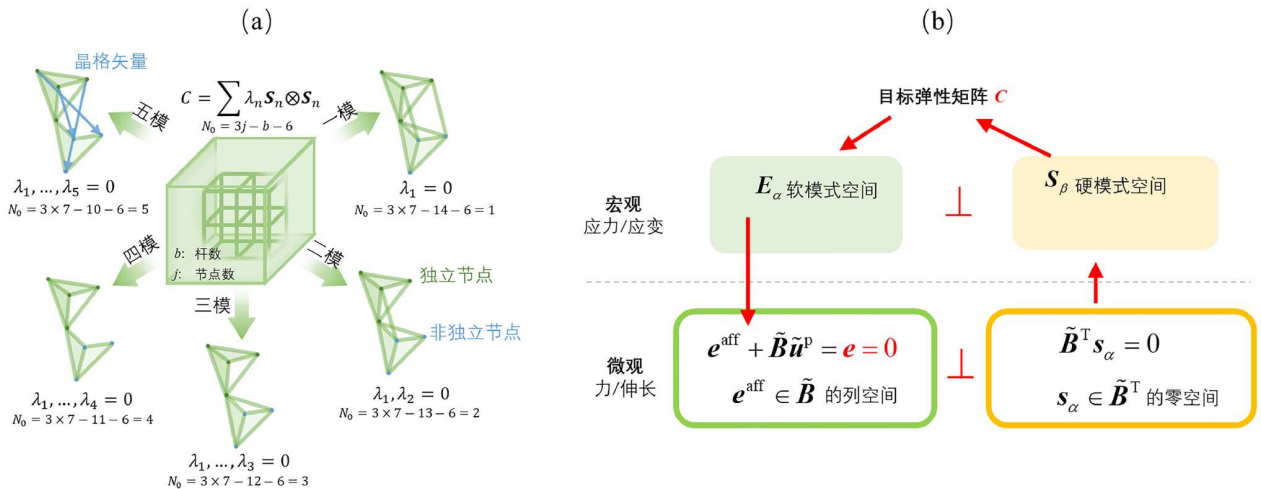


图 4 模式超材料的设计原理(a)和方法(b)

Figure 4 Design principle (a) and method (b) of extremal materials

空非局部性, 该现象与电磁材料中的双各向异性类似^[70]. 弹性Willis介质引起人们的关注不仅仅是因为其能够描述更复杂的耦合, 更重要的是其可用于实现基于变换设计的弹性波斗篷^[25]. 从动态均匀化层面, 已有不少工作可形式上给出Willis介质的宏观性质与微结构的关联^[71~73]以及所应满足的限制条件^[74], 但具体应用到材料设计时仍存在巨大的困难. 究其原因, 一方面是声学或弹性Willis介质的耦合系数较多, 不便于分析; 另一方面, 如何计算具有时空非局部的Willis参数仍不清楚, 目前多数针对Willis介质的研究都采用空间局部假设以及针对简单载荷情况. 打破微结构空间反演对称性是产生Willis耦合的一种机制(图5(c)). Muhlestein等人^[75]实验设计了一维声学非对称胞元, 通过测量不同入射方向的透射和反射系数, 再通过参数反演得到了该单元局部的Willis耦合系数. Melnikov等人^[76]设计了开口C型环声学非对称单元, 其Willis耦合系数可接近被动系统的上限. 利用Willis介质的耦合特性实现声波超表面, 可对透射和散射同时进行调控^[77,78]. 此外, 不同于传统声学介质, Willis声学介质形成的界面可以支持表面波, 并且与两个介质的耦合矢量的关系相关^[79].

针对机械系统, Milton^[21]提出了一个由多质量和弹簧构成的胞元模型, 其宏观等效性质可展现出Willis耦合效应. 在此基础上, 对不同隐含质量位置进行调节和组合, 可实现对二维弹簧质量系统的Willis耦合系数定制^[80]. 对于连续弹性系统, 无论从理论还是实验方面揭示Willis耦合效应都具有一定难度. 通过构造具有非对称微结构的梁单元, 测量不同入射方向弯曲波(或扭转波)的透反射, 可以揭示其Willis耦合效应^[81,82].

Willis本构具有时空非局部特性, 波在非均匀介质中的多重散射是形成时空非局部的一个重要机理(图5(c)). 针对电磁超材料, Alu^[83]提出了有源驱动的动态均匀化方法, 即在超材料中独立施加 $(\omega, \mathbf{k})$, 通过计算局部散射场再通过平均可得到超材料的时空非均本构方程. 有源驱动的优点是除了可计算带结构上行波的有效性, 还可以计算禁带内的有效性. 随后, Sieck等人^[84]将其推广到声学Willis介质均匀化. Li等人^[85]给出了具有虚波矢时声学Willis等效参数的计算方法, 并分析了不同声学Willis介质界面波的传播规律, 考虑空间非局部特性可以很好地描述沿垂直界面方向界面波随频率的凋落情况. 尽管声学有源驱动的均匀化可适用弹性介质, 但由于涉及的弹性常数和耦合系数多, 目

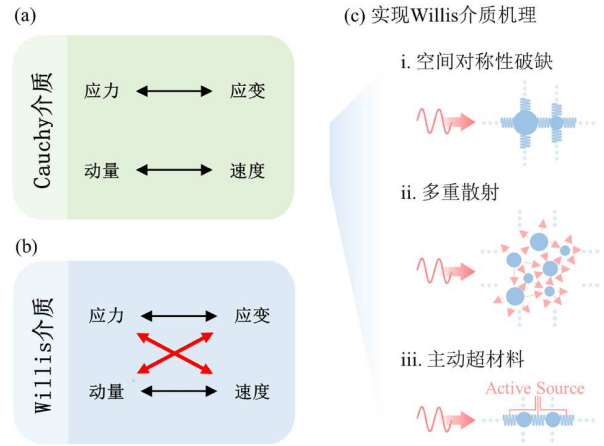


图5 传统弹性介质(a)和Willis介质(b)及Willis介质产生机理(c)
 Figure 5 Traditional elastic materials (a), Willis media (b), and different mechanisms for Willis metamaterials (c)

前仍缺乏可用于指导微结构设计的弹性Willis动态均匀化方法.

对于被动材料系统, Willis耦合效应一般只在谐振频率附近才比较明显. 为了克服上述局限性, 可通过有源的方式来增强Willis耦合系数. 这时材料系统与外界有能量交换, 能量守恒和互易性原理对材料本构参数的限制不再成立^[86], 这样也使得主动Willis可用于描述波的非互易传播和趋肤效应等. Zhai等人^[87]在一维声波导中构造了集探测-控制-反馈一体的主动散射体, 可用声学Willis介质刻画其波传输特性, 并进一步构造了超表面实现波的非互易传播. 同样, Chen等人^[88]通过在梁或板上构造一层由压电片形成的探测器和执行器, 通过控制器可实现该层梁(板)不同变形模态的耦合, 从而实现对弯曲波的非互易传播. Cheng和Hu^[89]利用二维主动声学Willis介质研究了声波的局域化效应(即趋肤效应), 发现局域化方向由材料的Willis耦合系数决定.

1.4 主动弹性超材料

前面讨论的弹性超材料, 主要是通过微结构设计, 在微观上调节波动能量的分配和输运, 使其宏观上表现出具有反常的波动行为. 这种方法不仅增加了制备上的困难, 同时也限制了可调性. 将如压电、磁流体等智能材料与传统材料相连, 通过向传统材料输入和输出能量, 同样也可以实现波动能量的调控. 如此设计的主动超材料不仅可以调节谐振频率和拓展负等效参数

的带宽^[90,91],还可以改变超材料的形态,产生新的波动调控功能^[92].主动超材料可以分成三大类^[93]:(1)将智能材料周期分布在梁板壳等结构上,通过外场改变智能材料的属性,进而调节超材料的等效性质来控制波的传播特性;(2)通过设计传感和作动控制回路,控制梁板壳等结构上分布的智能材料,实现奇特宏观等效性质和反常波传播特性;(3)通过外场改变超材料构型.针对第一种类型(图6(b)),以压电智能材料为例,考察如图6(a)所示的沿 x_3 方向极化的压电片,在压电片上下表面(垂直 x_3 方向)镀上金属电极,并串联一阻抗为 Z_{su} 的电路(即分流电路).这时,含串联电路的压电片内杨氏模量可表示为^[94]

$$E_p(\omega) = \frac{E_p^{sc}}{1 - k_{31}^2} \left(1 - \frac{k_{31}^2}{1 + i\omega C_p^s Z_{su}} \right), \quad (5)$$

其中, E_p^{sc} 为压电片短路时的面内杨氏模量, k_{31} 为拉伸机电耦合系数, C_p^s 为等应变下固有电容.上式表明可以通过外接电路,调整相关电路参数来调节压电片内杨氏模量,进而改变与之相连接梁板的整体弯曲刚度,同时也实现了对波的调控^[92,95].从超材料设计的角度,这种方式可以实现对面内或弯曲刚度任意定制^[51,96].一般与压电片连接的分流电路可分为谐振分流、负电容分流以及电路网络分流等类型,形成了不同类型的主动超材料,具体讨论请参见综述论文^[93].调节的外场不仅仅局限于电场,也可以是任意可改变材料参数的外场,如磁场等^[97].

第二种类型超材料是在第一种的基础上增加了决策与控制环节(图6(c)),即传感器测得波动信息,然后输

入控制器,控制器根据输入信息及控制规律产生输出信息,并作用在作动器上,进而产生所需要的波动行为.这种主动弹性超材料可灵活地调节单元输入和输出的关系,在宽低频减振降噪方面有着广泛的用途^[98,99].利用这类超材料属性的可控性,可实现如在线实时改变胞元输入和输出关系的可编程超材料^[100],以及自适应超材料^[101].由于输入和响应关系不再仅仅由基体材料(梁板等)决定,因此这类主动超材料(也称为数字超材料(digital metamaterials))可以作为一个理论和实验平台,研究具有新奇耦合效应的弹性超材料,如奇弹性^[102]、奇微极介质^[103]或奇质量^[104]等,以及非互易传播和趋肤效应等新的波传播特性.

第三类主动弹性超材料主要是通过外场改变材料构型(图6(d)),如质量分布^[105]、晶格形状和尺寸^[106],进而改变材料的带结构,为超材料的结构可变和功能可调提供了一种手段^[107].

2 弹性超材料功能设计

弹性超材料对波的调控可分为两种方式:第一种对体波传播进行调控,包括利用超材料的奇异特性,如单负参数材料实现对波的阻隔、双负参数对波的折射进行调节、模式材料对低频弹性波极化的调控以及准零刚度低频隔振等.对体波调控还包括利用材料各向异性 and 性能梯度变化实现对传播轨迹的控制,典型代表包括弹性波斗篷、聚焦成像等.第二种是利用一层或几层超材料单元(也称为超表面),对透反射波的相位和幅值进行调控.弹性超表面具有耗散小和易加工等优点,近些年来受到了关注^[27].

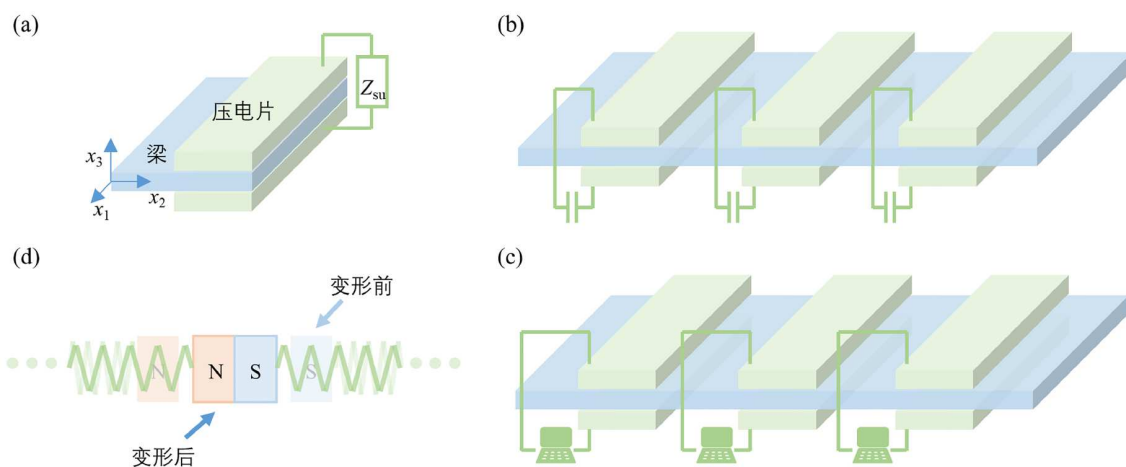


图6 主动超材料. (a) 压电片和梁构成的单元; (b) 分流电路型; (c) 反馈控制型; (d) 可变构型

Figure 6 Active metamaterials. (a) The unit cell of the piezoelectric patch and beam; (b) shunted circuit; (c) feedback control; (d) variable

2.1 体波传播控制

根据色散关系, 单负材料中的波矢为虚数, 波无法在其中传播. 因此, 局域共振型弹性超材料常被用来阻隔低频弹性波, 可针对目标频率, 设计单个或多个类型局域谐振子^[46,108]. 在不增加附加质量的条件下, 如何在较大频率范围内阻隔低频弹性波是这样一类弹性超材料需要解决的问题. Xiao等人^[109]通过分析一维弦上周期分布质量弹簧振子的波传播特性, 发现通过振子参数和周期分布参数设计可使局域共振禁带和Bragg禁带耦合, 形成宽频禁带. 采用前面讨论的符合Drude模型负质量或模量构型, 可实现低频波的阻隔^[41,43], 但这往往需要固支边界或零能模式(无法承受高静载荷). 准零刚度弹性超材料既能承受高的静载荷, 又能隔离极低频振动, 备受关注^[110]. 其初始概念源于非线性动力学, 试图解决线性系统中承载(高刚度)与隔振(低刚度)的矛盾. 通过机构的方式可同时实现具有高静态承载和低动态刚度, 其原理可由图7(a)表示^[28]. 系统由质量 m 、两个刚度系数为 k_2 的斜弹簧和一个刚度系数为 k_1 的竖直弹簧构成. 在静态平衡位置, 两个斜弹簧处于水平位置, 并以此为原点建立 x 坐标系. 当质量 m 在平衡点附近做小幅振动时, 可计算出弹簧作用在质量 m 上的合力, 进而得到系统的无量纲切线刚度:

$$k_{nc} = 1 + 2k \left(1 - \frac{1 + \bar{a}}{(1 + \bar{x}^2)^{3/2}} \right), \quad (6)$$

其中, $k_{nc} = k_{eff} / k_1$, $k = k_2 / k_1$, $\bar{a} = \Delta a / a$, $\bar{x} = x / a$. 在平衡位置, 有 $k_{nc} = 1 - 2k\bar{a}$, 因此可以调节弹簧刚度和初始弹簧长度, 使质量 m 在平衡位置时的切线刚度(动刚度)为零: $k_{nc} = 0$, 而不影响其静承载能力即 $k_1 \Delta h$. 形成准零刚度的核心是构造一个负刚度单元(平衡位置时两

个斜弹簧), 使得系统的力位移曲线具有切线为零的平台(图7(b)).

在微结构设计中, 可通过屈曲实现负刚度单元, 并且很容易通过梁板壳的几何构型设计来定制具有平台段的力位移曲线^[28,111,112]. 这样可以将准零刚度系统通过超材料(或超结构)进行小型化和集成化. 在新型准零刚度超材料设计时, 需要更关注多自由度系统、高静载以及宽载荷适用范围等. 为此提出了不同的策略, 如不同载荷单元串并联提高承载的适用范围^[111], 或用数字化单元优化定制^[113]亦或通过拓扑优化对材料微结构进行优化设计^[114].

弹性超材料拓展了材料参数选择空间和类型, 可以在空间上将超材料胞元形成梯度分布, 进而实现对弹性波的轨迹调控, 其中最具有挑战的是实现弹性波斗篷. 通过材料设计对弹性波轨迹控制是典型的反问题, 其中包括两个层面^[115]: 一是根据功能, 设计材料属性的分布; 二是根据每点要求的属性设计出相应的微结构. 对于第一个问题, 如果波动控制方程具有坐标变换不变性, 则可很容易得到实现斗篷所需要的材料参数分布, 这时要求的材料属性往往需要超材料才能实现^[116]. 所谓变换不变性是指一个物理现象的控制方程, 经过坐标变换形式仍然保持不变, 这样由几何操作(变换)后定义的变换场可由变换材料来实现. 对于电磁和声波, 变换前后材料本构为同类型, 但对于弹性波, 变换前后材料则不属于同类型^[117]. 如变换前为Cauchy介质, 根据位移场变换前($U(X)$)和变换后($u(x)$)的规范 A^T 不同($U=A^T u$), 变换后介质可为极化介质或非对称介质($A=\text{const.}$)^[118], 或Willis介质($A=\nabla_X x$)^[25]. 因此, 构造弹性波斗篷的关键变为如何实现上述两种弹性超材料. Willis介质在第1.3节已经进行介绍, 下面简要介绍极性

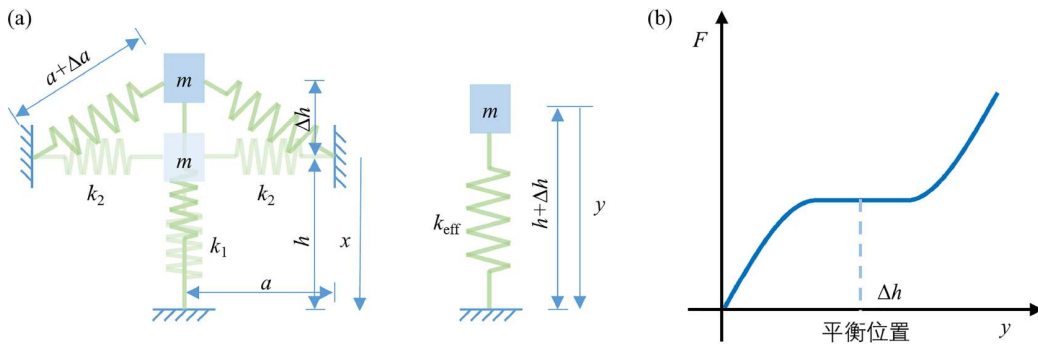


图7 准零刚度. (a) 准零刚度结构示意图; (b) 力位移曲线

Figure 7 Quasi-zero stiffness. (a) Scheme of the QZS mechanism; (b) load-displacement curve

超材料的进展. 极性超材料是指弹性张量不满足小对称的介质^[45,119], 可看作退化的微极介质或具有特殊零能模式的微极介质. 极化介质是最早因为需要构造弹性波匹配层, 提出的一种假想的数学材料, 并被广泛应用于弹性波计算时吸波边界条件的设置^[120]. 其物理上可通过接地约束旋转^[119]、转动惯量与剪力偶自平衡^[45]或外界磁场^[121]实现, 并在微结构层面实现了相应的弹性波斗篷. 基于Willis介质实现弹性波斗篷仍面临诸多挑战, 最大的困难是还无法按需设计二维Willis介质, 近期Nassar和Brucks^[122]做了有意义的尝试.

对于二维梁板壳结构, 也可以通过引入主动方法, 如引入压电片和电路, 调节每个胞元梁板的等效弯曲刚度, 可实现主动的弯曲波斗篷^[123]. 还可以利用压电片作为传感器, 对入射波进行全吸收, 然后在斗篷的相应位置通过计算和控制发射任意想要波的形式, 可实现如弹性波斗篷、弹性波幻象等新奇的器件, 而且具有宽频特性^[124].

对于长波条件下的波隐身, 最简单直观的方法是采用中性夹杂法(neutral inclusion). 如图8(b)所示, 一个均匀背景介质中, 区域 Ω 不被波探测到最直观的条件是令该域内材料与背景介质一致. 在长波条件, 该条件可放宽近似表示为(中性夹杂法): 区域 Ω 内材料的等效性质与背景介质一致, 利用这个条件就可对该域内材料进行设计来实现长波隐身^[125]. 中性夹杂法源于如下静态问题: 设计一个区域使得该区域对周围静态场不产生影响^[2]. 对于动态问题, 中性夹杂条件本质上是使区域 Ω 的前三阶散射系数为零^[126], 最早提出通过电磁超材料设计隐身的工作本质属于中性夹杂方法^[127]. 中性夹杂法可适用于任意波动问题.

对弹性波极化的调节是弹性超材料特有的功能, 包括形成相应的禁带, 选择性地阻隔或传输不同极化模式的波^[128], 或通过模式材料对输出波的极化模式进行选择^[66]; 也可对弹性波不同极化模式进行转换, 如通过引入手性单元实现纵波到横波的转换^[129], 引入人工维度(额外系统参数)对系统本征态进行相位调控, 可实现弹性波极化和轨迹同时调控^[130], 或设计各向异性超材料将线极化剪切波转化成圆极化剪切波^[131].

2.2 弹性超表面

可通过仅仅一层或几层超材料胞元来实现对波透反射的幅值和相位调节, 这样一类二维版本的超材料称为超表面^[132]. 超表面可减少传输损耗, 容易加工和

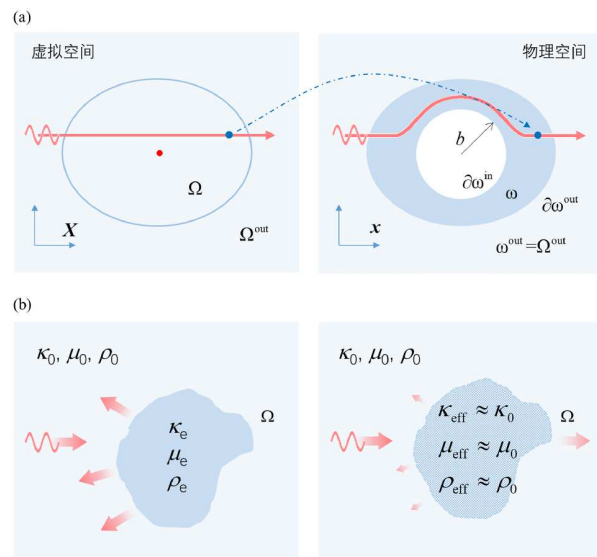


图8 斗篷设计. (a) 基于变换方法; (b) 基于中性夹杂法
Figure 8 Cloak design. (a) Transformation method; (b) neutral inclusion

集成, 近年来受到了关注^[27,133,134]. 亚波长适用是超表面区别频率选择表面的主要特征, 这样超表面的性质仍可以用一层均匀等效材料来描述.

根据不同功能, 超表面又分为对波前调控的梯度超表面以及根据具体功能沿界面均匀分布的超表面(后者简称超表面). 梯度超表面通过沿表面性能梯度分布实现相位(通过波速)的调节, 根据广义snell定律^[132], 以及波前调控具体功能要求, 可确定超表面性能梯度分布形式, 进而设计相应微结构^[28]. 梯度超表面可实现波的聚焦^[135,136]、异常折反射^[137,138]和波整形^[139,140]等功能. 为了提高传输效率, 除了考虑相位外, 还需要考虑阻抗, 这对超表面胞元设计提出了更高要求. 采用拓扑优化、遗传算法或机器学习等方法, 可以设计出多功能的超表面单元^[141~143], 并进行组合形成可调的弹性波超表面^[144]. 另一类超表面主要利用体材料的行为, 即一层或几层胞元的等效性质仍可用周期分布胞元超材料来估计. 这样不同功能的弹性超材料, 选择一到几层胞元形成超表面依然能实现相同的功能, 如通过面内五模材料设计可形成单一极化的弹性超表面^[60], 并形成宽频模式分离弹性超表面^[61], 或实现弹性波模式转换^[145]. 超表面胞元的离散特点会产生高阶散射以及胞元间的非局部相互作用, 这时设计需要考虑非局部效应, 如考虑高阶散射的耗散梯度超表面实现宽频弯曲波的吸收^[146], 或有意利用这种非局部效应实现宽频

的弹性超表面^[147]等。

3 总结与展望

自2000年Liu等人^[10]的开创性工作以来, 声波和弹性波超材料进入了快速发展期, 其概念和内涵被不断拓展, 从波动到静载、局域到全局、结构到机构、保守到主动, 并被泛化为通过微结构而非化学组分实现对材料宏观行为的调节^[115]。研究方法从最先理论上突破, 到概念的验证, 发展到结合数值计算手段和3D打印技术的功能设计与实现。近期基于数据科学, 通过机器学习的范式来建立超材料微结构与功能的关联越来越引起重视^[148~150], 并显示出较强的预测能力, 将会为弹性超材料的发展注入新的动力。超材料表现出来的新奇现象不断拓展人们认知边界, 并提出新的问题, 对传统理论框架也提出了挑战。就作者的认知, 就以下几个方面进行简要展望。

(1) 非厄米系统: 尽管智能材料的力学行为已有很多研究, 作为构元, 通过多场与外界能量交换并行成新材料体系的主动构元, 这样一类材料体系在生物界很常见, 但系统研究这类非保守系统动力学特性的研究刚起步^[22,151]。近期的研究已表明, 通过与外界能量交换, 可产生许多新奇的耦合现象^[103~105], 但如何去对这样一类材料进行表征与刻画, 仍需要进一步研究。

(2) 非局部性: 在静力学中非局部效应一般体现为高阶项, 往往在小尺度下相对效应才会体现出来^[152]。然而针对波动载荷, 材料胞元尺度与波长之比不再无限小, 随着该比值增大, 非局部效应会更加明显, 如研究表明非局部效应导致Roton-like的频散曲线^[153]、多

重散射造成的空间非局部效应导致界面波不同凋落模式^[86]以及引入局部机构模式在非 Γ 点形成具有零频锥形频散曲线^[154]等。超材料可精心设计微结构, 因此有助于厘清材料非局部效应与其微观结构的定量关联, 为有目的的设计和利用非局部性进行材料设计奠定了基础。

(3) 时空超材料: 目前多数超材料设计局限于三维空间维度, 即通过材料属性在空间变化实现对波的调制。随着智能材料和控制技术的发展, 在时间维度上对材料参数设计成为可能, 并形成时空超材料^[155]。相较于空间维度设计的超材料, 时空弹性超材料可打破时间反演对称性^[27]。时间界面也可改变透反射波频率, 因此为弹性波的调控提供了更多自由度^[156]。此外, 利用二维梁板结构和压电片(或其他智能材料)以及相应的控制电路可较方便地构建研究时空弹性超材料的实验平台, 这时需要发展时空弹性超材料理论, 指导实验去发现、设计和实现更多有价值的新颖功能。

(4) 连续介质理论: 200多年前创建的连续介质力学对人类文明与进步起到了关键性作用, 根据认知的螺旋性上升规律, 目前又到达了新的起点: 设想材料由这样一类超原子构成, 每个超原子由一个或多个可设计的小机器构成, 各构件能产生弹性变形、机构位移并可注入和输出能量, 超原子间具有长程复杂的相互作用, 能否建立一套行之有效的连续介质力学理论, 对这样的超材料和由此构成的结构性能进行准确预报、设计并指导工程应用? 回答这个问题是弹性超材料力学的核心所在, 也将是对Cauchy等人^[1]发展的连续介质力学理论的继承和发展。

致谢 文中的图均由博士生魏宇绘制, 表示感谢。

参考文献

- 1 Cauchy A. Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluids, élastiques ou non élastiques. *Bull Soc Philomath*, 1823, 9-13
- 2 Milton G. *The Theory of Composites*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- 3 Hill R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J Mech Phys Solids*, 1965, 13: 89-101
- 4 Hu G, Zheng Q, Huang Z. Micromechanics methods for effective elastic properties of composite materials (in Chinese). *Adv Mech*, 2001, 31: 361-393 [胡更开, 郑泉水, 黄筑平. 复合材料有效弹性性质分析方法. *力学进展*, 2001, 31: 361-393]
- 5 Lakes R. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 1987, 235: 1038-1040
- 6 Yu X, Zhou J, Liang H, et al. Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review. *Prog Mater Sci*, 2018, 94: 114-173
- 7 Willis J R. Variational principles for dynamic problems for inhomogeneous elastic media. *Wave Motion*, 1981, 3: 1-11

- 8 Pendry J B, Holden A J, Stewart W J, et al. Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. *Phys Rev Lett*, 1996, 76: 4773–4776
- 9 Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, et al. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Trans Microwave Theor Techn*, 1999, 47: 2075–2084
- 10 Liu Z, Zhang X, Mao Y, et al. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000, 289: 1734–1736
- 11 Liu Z, Chan C T, Sheng P. Analytic model of phononic crystals with local resonances. *Phys Rev B*, 2005, 71: 014103
- 12 Fang N, Xi D, Xu J, et al. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nat Mater*, 2006, 5: 452–456
- 13 Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Composite acoustic medium with simultaneously negative density and modulus. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 054301
- 14 Yao S, Zhou X, Hu G. Experimental study on negative effective mass in a 1D mass-spring system. *New J Phys*, 2008, 10: 043020
- 15 Liu X N, Hu G K, Huang G L, et al. An elastic metamaterial with simultaneously negative mass density and bulk modulus. *Appl Phys Lett*, 2011, 98: 251907
- 16 Wu Y, Lai Y, Zhang Z Q. Effective medium theory for elastic metamaterials in two dimensions. *Phys Rev B*, 2007, 76: 205313
- 17 Zhou X, Hu G. Analytic model of elastic metamaterials with local resonances. *Phys Rev B*, 2009, 79: 195109
- 18 Lai Y, Wu Y, Sheng P, et al. Hybrid elastic solids. *Nat Mater*, 2011, 10: 620–624
- 19 Milton G W, Cherkaev A V. Which elasticity tensors are realizable? *J Eng Mater Tech*, 1995, 117: 483–493
- 20 Chen Y, Liu X, Xiang P, et al. Pentamode material for underwater acoustic wave control (in Chinese). *Adv Mech*, 2016, 46: 382–434 [陈毅, 刘晓宁, 向平, 等. 五模材料及其水声调控研究. *力学进展*, 2016, 46: 382–434]
- 21 Milton G W. New metamaterials with macroscopic behavior outside that of continuum elastodynamics. *New J Phys*, 2007, 9: 359
- 22 Geng L, Yuan J, Cheng W, et al. Fundamental principles and research progress of non-Hermitian mechanical systems (in Chinese). *Adv Mech*, 2024, 54: 1–60 [耿琳琳, 袁锦波, 程文, 等. 非厄米力学系统基本原理与研究进展. *力学进展*, 2024, 54: 1–60]
- 23 Yin J, Cai L, Fang X, et al. Review on research progress of mechanical metamaterials and their applications in vibration and noise control (in Chinese). *Adv Mech*, 2022, 52: 508–586 [尹剑飞, 蔡力, 方鑫, 等. 力学超材料研究进展与减振降噪应用. *力学进展*, 2022, 52: 508–586]
- 24 Chen Y, Zheng M, Liu X, et al. Broadband solid cloak for underwater acoustics. *Phys Rev B*, 2017, 95: 180104
- 25 Milton G W, Briane M, Willis J R. On cloaking for elasticity and physical equations with a transformation invariant form. *New J Phys*, 2006, 8: 248
- 26 Nassar H, Yousefzadeh B, Fleury R, et al. Nonreciprocity in acoustic and elastic materials. *Nat Rev Mater*, 2020, 5: 667–685
- 27 Chen A L, Wang Y S, Wang Y F, et al. Design of acoustic/elastic phase gradient metasurfaces: Principles, functional elements, tunability, and coding. *Appl Mech Rev*, 2022, 74: 020801
- 28 Alabuzhev P, Gritchin A, Kim L, et al. *Vibration Protecting and Measuring Systems with Quasi-Zero Stiffness*. New York: Hemisphere Publishing, 1989
- 29 Zhao J, Zhou G, Zhang D, et al. Integrated design of a lightweight metastructure for broadband vibration isolation. *Int J Mech Sci*, 2023, 244: 108069
- 30 Chen Y, Gu Y. Review on origami kinematics (in Chinese). *Adv Mech*, 2023, 53: 154–197 [陈焱, 顾元庆. 折纸运动学综述. *力学进展*, 2023, 53: 154–197]
- 31 Misseroni D, Pratapa P P, Liu K, et al. Origami engineering. *Nat Rev Methods Primers*, 2024, 4: 40
- 32 Surjadi J U, Gao L, Du H, et al. Mechanical metamaterials and their engineering applications. *Adv Eng Mater*, 2019, 21: 1800864
- 33 Chen Y, Zhang Q, Zhang Y, et al. Research progress of elastic topological materials (in Chinese). *Adv Mech*, 2021, 51: 189–256 [陈毅, 张泉, 张亚飞, 等. 弹性拓扑材料研究进展. *力学进展*, 2021, 51: 189–256]
- 34 Goffaux C, Sánchez-Dehesa J, Yeyati A L, et al. Evidence of Fano-like interference phenomena in locally resonant materials. *Phys Rev Lett*, 2002, 88: 225502
- 35 Wang G, Wen X, Wen J, et al. Two-dimensional locally resonant phononic crystals with binary structures. *Phys Rev Lett*, 2004, 93: 154302
- 36 Li J, Chan C T. Double-negative acoustic metamaterial. *Phys Rev E*, 2004, 70: 055602
- 37 Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Acoustic metamaterial with negative density. *Phys Lett A*, 2009, 373: 4464–4469
- 38 Lee S H, Park C M, Seo Y M, et al. Reversed Doppler effect in double negative metamaterials. *Phys Rev B*, 2010, 81: 241102
- 39 Liang Z, Li J. Extreme acoustic metamaterial by coiling up space. *Phys Rev Lett*, 2012, 108: 114301
- 40 Milton G W, Willis J R. On modifications of Newton's second law and linear continuum elastodynamics. *Proc R Soc A*, 2007, 463: 855–880
- 41 Yao S, Zhou X, Hu G. Investigation of the negative-mass behaviors occurring below a cut-off frequency. *New J Phys*, 2010, 12: 103025
- 42 Zhu R, Liu X N, Hu G K, et al. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nat Commun*, 2014, 5: 5510
- 43 Oh J H, Assouar B. Quasi-static stop band with flexural metamaterial having zero rotational stiffness. *Sci Rep*, 2016, 6: 33410
- 44 Wang Y, Zhao J, Zhang M, et al. Mechanism-based metamaterials for low-frequency broadband wave control (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2022,

- 67: 1326–1336 [王倚天, 赵建雷, 张铭凯, 等. 含机构位移模式的超材料低频宽带波动控制. 科学通报, 2022, 12: 1326–1336]
- 45 Zhang H K, Chen Y, Liu X N, et al. An asymmetric elastic metamaterial model for elastic wave cloaking. *J Mech Phys Solids*, 2020, 135: 103796
- 46 Xiao Y, Wen J, Wen X. Flexural wave band gaps in locally resonant thin plates with periodically attached spring–mass resonators. *J Phys D-Appl Phys*, 2012, 45: 195401
- 47 Jin Y, Pennec Y, Bonello B, et al. Physics of surface vibrational resonances: Pillared phononic crystals, metamaterials, and metasurfaces. *Rep Prog Phys*, 2021, 84: 086502
- 48 Wang W, Bonello B, Djafari-Rouhani B, et al. Elastic stubbed metamaterial plate with torsional resonances. *Ultrasonics*, 2020, 106: 106142
- 49 Zhu R, Huang G L, Huang H H, et al. Experimental and numerical study of guided wave propagation in a thin metamaterial plate. *Phys Lett A*, 2011, 375: 2863–2867
- 50 Li P, Yao S, Zhou X, et al. Effective medium theory of thin-plate acoustic metamaterials. *J Acoust Soc Am*, 2014, 135: 1844–1852
- 51 Chen Y, Hu G, Huang G. A hybrid elastic metamaterial with negative mass density and tunable bending stiffness. *J Mech Phys Solids*, 2017, 105: 179–198
- 52 Nassar H, Xu X C, Norris A N, et al. Modulated phononic crystals: Non-reciprocal wave propagation and Willis materials. *J Mech Phys Solids*, 2017, 101: 10–29
- 53 Wei Y, Hu G. Wave characteristics of extremal elastic materials. *Extreme Mech Lett*, 2022, 55: 101789
- 54 Kadic M, Bückmann T, Stenger N, et al. On the practicability of pentamode mechanical metamaterials. *Appl Phys Lett*, 2012, 100: 191901
- 55 Bückmann T, Thiel M, Kadic M, et al. An elasto-mechanical unfeelability cloak made of pentamode metamaterials. *Nat Commun*, 2014, 5: 4130
- 56 Hladky-Hennion A C, Vasseur J O, Haw G, et al. Negative refraction of acoustic waves using a foam-like metallic structure. *Appl Phys Lett*, 2013, 102: 144103
- 57 Layman C N, Naify C J, Martin T P, et al. Highly anisotropic elements for acoustic pentamode applications. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 024302
- 58 Norris A N. Acoustic cloaking theory. *Proc R Soc A*, 2008, 464: 2411–2434
- 59 Chen Y, Liu X, Hu G. Latticed pentamode acoustic cloak. *Sci Rep*, 2015, 5: 15745
- 60 Zheng M, Liu X, Chen Y, et al. Theory and realization of nonresonant anisotropic singly polarized solids carrying only shear waves. *Phys Rev Appl*, 2019, 12: 014027
- 61 Zheng M, Park C I, Liu X, et al. Non-resonant metasurface for broadband elastic wave mode splitting. *Appl Phys Lett*, 2020, 116: 171903
- 62 Dong H W, Zhao S D, Miao X B, et al. Customized broadband pentamode metamaterials by topology optimization. *J Mech Phys Solids*, 2021, 152: 104407
- 63 Li Z, Luo Z, Zhang L C, et al. Topological design of pentamode lattice metamaterials using a ground structure method. *Mater Des*, 2021, 202: 109523
- 64 Wang K, Lv H, Liu X, et al. Design of two-dimensional extremal material based on truss lattices. *Acta Mech Sin*, 2023, 39: 723044
- 65 Cai M, Liu X, Hu G, et al. Customization of two-dimensional extremal materials. *Mater Des*, 2022, 218: 110657
- 66 Groß M F, Schneider J L G, Wei Y, et al. Tetramode metamaterials as phonon polarizers. *Adv Mater*, 2023, 35: 2211801
- 67 Wei Y, Cai M, Hu G. Elastic birefringent metamaterials and quarter-wave plate. *Int J Mech Sci*, 2024, 281: 109684
- 68 Hu Z, Wei Z, Wang K, et al. Engineering zero modes in transformable mechanical metamaterials. *Nat Commun*, 2023, 14: 1266
- 69 Wei Z, Hu Z, Zhu R, et al. A transformable anisotropic 3D penta-mode metamaterial. *Mater Des*, 2023, 234: 112306
- 70 Kong J. *Electromagnetic Wave Theory*. Cambridge: EMW Publishing, 2008
- 71 Shuvalov A L, Kutsenko A A, Norris A N, et al. Effective Willis constitutive equations for periodically stratified anisotropic elastic media. *Proc R Soc A*, 2011, 467: 1749–1769
- 72 Nemat-Nasser S, Srivastava A. Overall dynamic constitutive relations of layered elastic composites. *J Mech Phys Solids*, 2011, 59: 1953–1965
- 73 Wang L, Xu J, Wang J, et al. A mechanism-based spatiotemporal non-local constitutive formulation for elastodynamics of composites. *Mech Mater*, 2019, 128: 105–116
- 74 Muhlestein M B, Sieck C F, Alù A, et al. Reciprocity, passivity and causality in Willis materials. *Proc R Soc A*, 2016, 472: 20160604
- 75 Muhlestein M B, Sieck C F, Wilson P S, et al. Experimental evidence of Willis coupling in a one-dimensional effective material element. *Nat Commun*, 2017, 8: 15625
- 76 Melnikov A, Chiang Y K, Quan L, et al. Acoustic meta-atom with experimentally verified maximum Willis coupling. *Nat Commun*, 2019, 10: 3148
- 77 Li J, Shen C, Díaz-Rubio A, et al. Systematic design and experimental demonstration of bianisotropic metasurfaces for scattering-free manipulation of acoustic wavefronts. *Nat Commun*, 2018, 9: 1342
- 78 Esfahlani H, Mazon Y, Alù A. Homogenization and design of acoustic Willis metasurfaces. *Phys Rev B*, 2021, 103: 054306
- 79 Li Z, Qu H, Zhang H, et al. Interfacial wave between acoustic media with Willis coupling. *Wave Motion*, 2022, 112: 102922
- 80 Qu H, Liu X, Hu G. Mass-spring model of elastic media with customizable willis coupling. *Int J Mech Sci*, 2022, 224: 107325

- 81 Liu Y, Liang Z, Zhu J, et al. Willis metamaterial on a structured beam. *Phys Rev X*, 2019, 9: 011040
- 82 Hao Y, Shen Y, Groby J P, et al. Experimental demonstration of Willis coupling for elastic torsional waves. *Wave Motion*, 2022, 112: 102931
- 83 Alù A. First-principles homogenization theory for periodic metamaterials. *Phys Rev B*, 2011, 84: 075153
- 84 Sieck C F, Alù A, Haberman M R. Origins of Willis coupling and acoustic bianisotropy in acoustic metamaterials through source-driven homogenization. *Phys Rev B*, 2017, 96: 104303
- 85 Li Z, Han P, Hu G. Willis dynamic homogenization method for acoustic metamaterials based on multiple scattering theory. *J Mech Phys Solids*, 2024, 189: 105692
- 86 Quan L, Yves S, Peng Y, et al. Odd Willis coupling induced by broken time-reversal symmetry. *Nat Commun*, 2021, 12: 2615
- 87 Zhai Y, Kwon H S, Popa B I. Active Willis metamaterials for ultracompact nonreciprocal linear acoustic devices. *Phys Rev B*, 2019, 99: 220301
- 88 Chen Y, Li X, Hu G, et al. An active mechanical Willis meta-layer with asymmetric polarizabilities. *Nat Commun*, 2020, 11: 3681
- 89 Cheng W, Hu G. Acoustic skin effect with non-reciprocal Willis materials. *Appl Phys Lett*, 2022, 121: 041701
- 90 Zhu R, Chen Y Y, Barnhart M V, et al. Experimental study of an adaptive elastic metamaterial controlled by electric circuits. *Appl Phys Lett*, 2016, 108: 011905
- 91 Chen Y Y, Hu G K, Huang G L. An adaptive metamaterial beam with hybrid shunting circuits for extremely broadband control of flexural waves. *Smart Mater Struct*, 2016, 25: 105036
- 92 Wang Y F, Wang Y Z, Wu B, et al. Tunable and active phononic crystals and metamaterials. *Appl Mech Rev*, 2020, 72: 040801
- 93 Yi K, Chen Y, Zhu R, et al. Electromechanical active metamaterials and their applications in controlling elastic wave propagation (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2021, 66: 1290–1304 [易凯军, 陈洋洋, 朱睿, 等. 机电耦合主动超材料及其弹性波调控. 科学通报, 2021, 66: 1290–1304]
- 94 Hagood N W, von Flotow A. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *J Sound Vib*, 1991, 146: 243–268
- 95 Trainiti G, Xia Y, Marconi J, et al. Time-periodic stiffness modulation in elastic metamaterials for selective wave filtering: theory and experiment. *Phys Rev Lett*, 2019, 122: 124301
- 96 Kovacevich D A, Popa B I. Active acoustic metamaterials with on-demand bulk modulus and full mass density tensor. *Smart Mater Struct*, 2024, 33: 105012
- 97 Chen X, Xu X, Ai S, et al. Active acoustic metamaterials with tunable effective mass density by gradient magnetic fields. *Appl Phys Lett*, 2014, 105: 071913
- 98 Fuller C, Elliott S, Nelson P. Active Control of Vibration. New York: Academic Press, 1996
- 99 Wang Y Z, Li F M, Wang Y S. Active feedback control of elastic wave metamaterials. *J Intelligent Material Syst Struct*, 2017, 28: 2110–2116
- 100 Sugino C, Ruzzene M, Erturk A. Digitally programmable resonant elastic metamaterials. *Phys Rev Appl*, 2020, 13: 061001
- 101 Li X, Chen Y, Hu G, et al. A self-adaptive metamaterial beam with digitally controlled resonators for subwavelength broadband flexural wave attenuation. *Smart Mater Struct*, 2018, 27: 045015
- 102 Scheibner C, Souslov A, Banerjee D, et al. Odd elasticity. *Nat Phys*, 2020, 16: 475–480
- 103 Chen Y, Li X, Scheibner C, et al. Realization of active metamaterials with odd micropolar elasticity. *Nat Commun*, 2021, 12: 5935
- 104 Wu Q, Xu X, Qian H, et al. Active metamaterials for realizing odd mass density. *Proc Natl Acad Sci USA*, 2023, 120: e2209829120
- 105 Wang Z, Zhang Q, Zhang K, et al. Tunable digital metamaterial for broadband vibration isolation at low frequency. *Adv Mater*, 2016, 28: 9857–9861
- 106 Jiang T, Han Q, Li C. Topologically tunable local-resonant origami metamaterials for wave transmission and impact mitigation. *J Sound Vib*, 2023, 548: 117548
- 107 Bertoldi K, Vitelli V, Christensen J, et al. Flexible mechanical metamaterials. *Nat Rev Mater*, 2017, 2: 1
- 108 Baravelli E, Ruzzene M. Internally resonating lattices for bandgap generation and low-frequency vibration control. *J Sound Vib*, 2013, 332: 6562–6579
- 109 Xiao Y, Mace B R, Wen J, et al. Formation and coupling of band gaps in a locally resonant elastic system comprising a string with attached resonators. *Phys Lett A*, 2011, 375: 1485–1491
- 110 Hamzehei R, Bodaghi M, Wu N. Mastering the art of designing mechanical metamaterials with quasi-zero stiffness for passive vibration isolation: A review. *Smart Mater Struct*, 2024, 33: 083001
- 111 Zhang Q, Guo D, Hu G. Tailored mechanical metamaterials with programmable quasi-zero-stiffness features for full-band vibration isolation. *Adv Funct Mater*, 2021, 31: 2101428
- 112 Cai C, Guo X, Yan B, et al. Modelling and analysis of the quasi-zero-stiffness metamaterial cylindrical shell for low-frequency band gap. *Appl Math Model*, 2024, 135: 90–108
- 113 Zeng C, Liu L, Hu Y, et al. Stair-stepping mechanical metamaterials with programmable load plateaus. *Adv Funct Mater*, 2024, 34: 2408887
- 114 Xu Y, Dong H W, Wang Y S. Topology optimization of programable quasi-zero-stiffness metastructures for low-frequency vibration isolation. *Int*

[J Mech Sci](#), 2024, 280: 109557

- 115 Hu G, Liu X. Design of Elastic Metamaterials and Wave Control (in Chinese). Beijing: Science Press, 2024 [胡更开, 刘晓宁. 弹性波超材料设计与波动控制. 北京: 科学出版社, 2024]
- 116 Kadic M, Bückmann T, Schittny R, et al. Metamaterials beyond electromagnetism. [Rep Prog Phys](#), 2013, 76: 126501
- 117 Norris A N, Shuvalov A L. Elastic cloaking theory. [Wave Motion](#), 2011, 48: 525–538
- 118 Brun M, Guenneau S, Movchan A B. Achieving control of in-plane elastic waves. [Appl Phys Lett](#), 2009, 94: 061903
- 119 Nassar H, Chen Y Y, Huang G L. Polar metamaterials: A new outlook on resonance for cloaking applications. [Phys Rev Lett](#), 2020, 124: 084301
- 120 Zheng Y, Huang X. Anisotropic perfectly matched layers for elastic waves in Cartesian and curvilinear coordinates. In: Earth Resources Laboratory 2002 Industry Consortium Meeting, 2002. 1–18
- 121 Zhang Q, Hu G, Rudykh S. Magnetoactive asymmetric mechanical metamaterial for tunable elastic cloaking. [Int J Solids Struct](#), 2024, 289: 112648
- 122 Nassar H, Brucks P. Willis elasticity from microcontinuum field theories: Asymptotics, microstructure-property relationships, and cloaking. [Wave Motion](#), 2023, 122: 103206
- 123 Ning L, Wang Y Z, Wang Y S. Active control cloak of the elastic wave metamaterial. [Int J Solids Struct](#), 2020, 202: 126–135
- 124 Li X, Chen Y, Zhu R, et al. An active meta-layer for optimal flexural wave absorption and cloaking. [Mech Syst Signal Processing](#), 2021, 149: 107324
- 125 Zhou X, Hu G. Design for electromagnetic wave transparency with metamaterials. [Phys Rev E](#), 2006, 74: 026607
- 126 Zhou X, Hu G, Lu T. Elastic wave transparency of a solid sphere coated with metamaterials. [Phys Rev B](#), 2008, 77: 024101
- 127 Alù A, Engheta N. Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings. [Phys Rev E](#), 2005, 72: 016623
- 128 Ma G, Fu C, Wang G, et al. Polarization bandgaps and fluid-like elasticity in fully solid elastic metamaterials. [Nat Commun](#), 2016, 7: 13536
- 129 Mangach H, Achaoui Y, Kadic M, et al. Polarization state conversion achieved by chiral mechanical metamaterial. [New J Phys](#), 2024, 26: 023053
- 130 Cheng W, Zhang H, Wei Y, et al. Elastic energy and polarization transport through spatial modulation. [J Mech Phys Solids](#), 2024, 182: 105475
- 131 Lee J, Kweun M, Lee W, et al. Perfect circular polarization of elastic waves in solid media. [Nat Commun](#), 2024, 15: 992
- 132 Yu N, Genevet P, Kats M A, et al. Light propagation with phase discontinuities: Generalized laws of reflection and refraction. [Science](#), 2011, 334: 333–337
- 133 Assouar B, Liang B, Wu Y, et al. Acoustic metasurfaces. [Nat Rev Mater](#), 2018, 3: 460–472
- 134 Zhou H, Li C, Zhu J, et al. Dynamic acoustic beamshaping with coupling-immune Moiré metasurfaces (Adv. Mater. 24/2024). [Adv Mater](#), 2024, 36: 2470179
- 135 Jin Y, Wang W, Khelif A, et al. Elastic metasurfaces for deep and robust subwavelength focusing and imaging. [Phys Rev Appl](#), 2018, 15: 024005
- 136 Yuan S M, Chen A L, Du X Y, et al. Reconfigurable flexural waves manipulation by broadband elastic metasurface. [Mech Syst Signal Processing](#), 2022, 179: 109371
- 137 Lee S W, Oh J H. Single-layer elastic metasurface with double negativity for anomalous refraction. [J Phys D-Appl Phys](#), 2020, 53: 265301
- 138 Su X, Lu Z, Norris A N. Elastic metasurfaces for splitting SV- and P-waves in elastic solids. [J Appl Phys](#), 2018, 123: 091701
- 139 Chen Y, Hu G. Broadband and high-transmission metasurface for converting underwater cylindrical waves to plane waves. [Phys Rev Appl](#), 2019, 12: 044046
- 140 Lee H, Lee J K, Seung H M, et al. Mass-stiffness substructuring of an elastic metasurface for full transmission beam steering. [J Mech Phys Solids](#), 2018, 112: 577–593
- 141 Rong J, Ye W. Multifunctional elastic metasurface design with topology optimization. [Acta Mater](#), 2020, 185: 382–399
- 142 Liu F Y, Zhang N L, Dong H W, et al. Topology optimization design of broadband elastic wave coding metasurfaces. [Appl Phys Lett](#), 2023, 123: 011706
- 143 Zhou W, Wang S, Wu Q, et al. An inverse design paradigm of multi-functional elastic metasurface via data-driven machine learning. [Mater Des](#), 2023, 226: 111560
- 144 Rong J, Ye W, Zhang S, et al. Frequency-coded passive multifunctional elastic metasurfaces. [Adv Funct Mater](#), 2020, 30: 2005285
- 145 Kweun J M, Lee H J, Oh J H, et al. Transmodal Fabry-Pérot resonance: Theory and realization with elastic metamaterials. [Phys Rev Lett](#), 2017, 118: 20590
- 146 Cao L, Yang Z, Xu Y, et al. Flexural wave absorption by lossy gradient elastic metasurface. [J Mech Phys Solids](#), 2020, 143: 104052
- 147 Zhu H, Patnaik S, Walsh T F, et al. Nonlocal elastic metasurfaces: Enabling broadband wave control via intentional nonlocality. [Proc Natl Acad Sci USA](#), 2020, 117: 26099–26108
- 148 Jin Y, He L, Wen Z, et al. Intelligent on-demand design of phononic metamaterials. [Nanophotonics](#), 2022, 11: 439–460
- 149 Yago D, Sal-Anglada G, Roca D, et al. Machine learning in solid mechanics: Application to acoustic metamaterial design. [Numer Meth Eng](#), 2024, 125: e7476

- 150 Liu C X, Yu G L, Liu Z. Machine learning models in phononic metamaterials. [Curr Opin Solid State Mater Sci](#), 2024, 28: 101133
- 151 Ramaswamy S. The mechanics and statistics of active matter. [Annu Rev Condens Matter Phys](#), 2010, 1: 323–345
- 152 Song J, Wei Y. A method to determine material length scale parameters in elastic strain gradient theory. [J Appl Mech](#), 2020, 87: 031010
- 153 Chen Y, Kadic M, Wegener M. Roton-like acoustical dispersion relations in 3D metamaterials. [Nat Commun](#), 2021, 12: 3278
- 154 Bossart A, Fleury R. Extreme spatial dispersion in nonlocally resonant elastic metamaterials. [Phys Rev Lett](#), 2023, 130: 207201
- 155 Engheta N. Four-dimensional optics using time-varying metamaterials. [Science](#), 2023, 379: 1190–1191
- 156 Mostafa M H, Mirmoosa M S, Sidorenko M S, et al. Temporal interfaces in complex electromagnetic materials: An overview. [Opt Mater Express](#), 2024, 14: 1103–1127

Summary for “弹性超材料研究进展”

Advances in elastic metamaterials

Gengkai Hu

School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

E-mail: hugeng@bit.edu.cn

Elastic metamaterials have emerged as a significant advancement in the interdisciplinary field of mechanics and materials science in recent years, particularly in the control of elastic wave propagation. These materials possess unique properties that enable the manipulation of wave behavior in novel ways, offering great potential for a wide range of engineering applications, such as vibration damping, seismic wave inversion, noise reduction, and non-destructive testing. Unlike traditional solid media, which have limited capacity to control elastic waves, elastic metamaterials are designed at the microstructural level to enhance wave coupling and regulation capabilities. By carefully designing the microstructure, elastic metamaterials can modify wave propagation in terms of direction, phase, and amplitude, providing new solutions for engineering challenges.

This paper provides a comprehensive review of the development of elastic metamaterials, focusing on their mechanisms and applications in controlling elastic waves. The study categorizes elastic wave metamaterials into several types, including negative parameter metamaterials, extremal metamaterials, Willis media, and active elastic metamaterials. Each of these categories plays a unique role in advancing the field of wave control. (1) Negative parameter metamaterials. These materials exhibit the ability to block wave propagation through resonance frequency design, making them particularly useful for low-frequency vibration isolation and damping. By manipulating the effective material properties at the macro scale, these metamaterials provide a novel method for wave suppression. (2) Extremal metamaterials. Utilizing non-resonant mechanisms, extremal metamaterials offer broad low-frequency control of elastic waves. They are particularly valuable in applications like acoustic cloaking and acoustic metamaterials, where water impedance matching is crucial. These materials are capable of matching the impedance of fluids and solids, opening new possibilities for applications that require seamless transitions between different media. (3) Willis media. Willis media are materials that exhibit an unconventional elastic constitutive relation, where stress is not only related to strain but also to the velocity of particles. This type of material can achieve full impedance matching with elastic Cauchy media, making it ideal for designing elastic wave cloaks or other advanced wave manipulation devices. (4) Active elastic metamaterials. Active metamaterials incorporate dynamic, non-conservative elements that break time-reversal symmetry. These materials enable one-way wave propagation and other advanced functionalities, which could be particularly useful in applications like soundproofing or directional waveguiding.

In addition to their theoretical underpinnings, this paper also explores the practical applications of elastic metamaterials. Their subwavelength characteristics provide significant advantages in low-frequency wave control, making them suitable for various engineering solutions. For example, the use of negative parameter metamaterials allows for efficient vibration isolation in mechanical systems, while extremal metamaterials and Willis media are crucial for advanced acoustic manipulation and elastic wave cloaking technologies.

The paper concludes with a discussion of the future prospects of elastic metamaterials, emphasizing their growing role in engineering applications. As the design of microstructures continues to improve, these materials will offer even greater performance in controlling wave behaviors. Furthermore, the integration of elastic metamaterials into practical engineering systems is expected to lead to innovative solutions for a wide range of challenges in fields such as seismic engineering, vibration control, and material science.

elastic metamaterials, low-frequency wave control, active metamaterials, elastic wave cloak

doi: [10.1360/TB-2024-1084](https://doi.org/10.1360/TB-2024-1084)