可数无限群作用子集的单纯 Bowen 拓扑熵

献给杨乐教授 80 华诞

黄小军¹, 李智强^{1*}, 刘劲松^{2,3}

1. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331;

2. 中国科学院数学与系统科学研究院, 北京 100190;

3. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049

E-mail: hxj@cqu.edu.cn, zqli@cqu.edu.cn, liujisong@math.ac.cn

收稿日期: 2019-01-30; 接受日期: 2019-07-25; 网络出版日期: 2019-09-04; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11671057, 11471318 和 11688101) 资助项目

摘要 本文研究紧度量空间上可数无限群作用给出的动力系统 $G \curvearrowright X$. 特别地, 对于 X 的任何一个子集 Z , 定义这个群作用相对于子集 Z 的单纯 (naive) Bowen 拓扑熵 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z)$. 进一步, 本文研究这种熵的基本性质, 并且对于非顺从的可数无限群, 计算这种熵的取值范围. 事实证明, 这种单纯熵的取值真的很单纯, 反映了动力系统复杂度的一种二分现象.

关键词 单纯 Bowen 拓扑熵 可数无限群 非顺从

MSC (2010) 主题分类 37A35, 37B40

1 引言

受 Shannon 在信息论中对不确定性描述的启发, Kolmogorov 于 1958 年在遍历论中引入了测度熵的概念. 后来, Sinai 对它进行了改进, 使之成为现在被广泛使用的形式. 测度熵是重要的同构不变量, 它既可反映测度系统的随机性, 又可以刻画动力系统很多本质的特性. 人们用熵可以区分很多动力系统, 例如, 两个元素的 Bernoulli 平移和三个元素的 Bernoulli 平移系统.

1965 年, Adler 等^[1] 在拓扑空间上引入了拓扑熵的定义, 它用拓扑空间的开覆盖来替代测度熵中概率测度空间的可测剖分. 拓扑熵是拓扑动力系统中一个重要的共轭不变量, 也是反映系统复杂程度的一项重要指标. 后来, Bowen^[2] 利用分离集和张成集的概念给出了一个新的等价定义. 拓扑熵与测度熵联系的纽带是变分原理, 该原理断言紧度量空间上的拓扑熵等于该空间上所有不变概率测度的测度熵的上确界.

1987 年, Ornstein 和 Weiss^[3] 将熵理论从整数群作用的系统扩展到了顺从群作用的系统. 运用顺从熵, Ornstein 和 Weiss 解决了对可数顺从群的 Bernoulli 平移进行分类的问题. 最近几年, 非顺从群作

英文引用格式: Huang X J, Li Z Q, Liu J S. Bowen topological entropy of countable infinite groups on subsets (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1389–1394, doi: 10.1360/N012019-00037

用的熵取得了重要进展. 这项新工作最重要的进展是 Bowen^[4] 的 sofic 熵理论, 进一步的发展是 Kerr 和 Li^[5] 的一系列工作. 另一条线索是由 Seward 为可测系统定义的 Rokhlin 熵. 一般动力系统的第三个熵概念是单纯熵^[6]. 这个想法被 Bowen 建议作为推广整数群作用的最直接定义方式.

本文研究紧度量空间上可数无限群作用给出的动力系统 $G \curvearrowright X$. 特别地, 受文献 [7] 的启发, 对于 X 的任何一个子集 Z , 我们定义这个群作用相对于子集 Z 的单纯 Bowen 拓扑熵 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z)$. 进一步我们研究了这种熵的基本性质, 并且对于非顺从可数无限群的群作用, 计算了这种熵的取值范围. 事实证明, 这种单纯熵的取值真的很单纯, 要么是 0, 要么是 ∞ , 反映了动力系统复杂度的一种二分现象.

2 群作用相对于子集的单纯拓扑熵

本文作如下约定. X 是一个紧致度量空间, G 是一个可数无限群, 并且 G 作用在 X 上. $\mathcal{F}in(G)$ 表示 G 的所有非空有限子集组成的全体.

定义 2.1 任取 X 的一个有限开覆盖 $\mathcal{U}$, 任取 G 的一个非空有限子集 F , F 上关于 $\mathcal{U}$ 的字串 $\mathbb{U}$ 指的是一个从 F 到 $\mathcal{U}$ 映射, 子串的长度 $m(\mathbb{U}) := |F|$. 我们用 $\mathcal{W}_F(\mathcal{U})$ 表示 F 上所有字串的全体, 令 $\mathcal{W} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}in(G)} \mathcal{W}_F(\mathcal{U})$. 另定义 $X(\mathbb{U}) = \bigcap_{g \in F} g^{-1}\mathbb{U}(g)$.

定义 2.2 任取 X 的一个子集 Z , 称 $\mathcal{W}$ 中的一个子集 Ω 覆盖 Z , 如果 $\bigcup_{\mathbb{U} \in \Omega} X(\mathbb{U}) \supseteq Z$.

定义 2.3 任意取定 G 的一个非空有限子集 K , 任意取定一个实数 s , 定义

$$M_K^s(G, \mathcal{U}, Z) := \inf_{\Omega} \sum_{\mathbb{U} \in \Omega} e^{-sm(\mathbb{U})},$$

其中 Ω 取遍满足下列条件的所有集合: Ω 覆盖 Z 且 $\Omega \subseteq \bigcup_{K \subseteq F, F \in \mathcal{F}in(G)} \mathcal{W}_F(\mathcal{U})$.

注意到 M_K^s 关于 K 是单调不减的, 所以有如下定义:

定义 2.4 在上面的设定下, 定义

$$M^s(G, \mathcal{U}, Z) = \lim_K M_K^s(G, \mathcal{U}, Z) = \sup_{K \in \mathcal{F}in(G)} M_K^s(G, \mathcal{U}, Z).$$

性质 2.1 $M^s(G, \mathcal{U}, \cdot)$ 构成 X 上的一个外测度.

证明 我们只需证明次可数可加性.

任意取定 X 的一系列子集 $\{Z_i\}_{i=1}^{\infty}$, 令

$$Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i.$$

$\forall \epsilon > 0, \forall K \in \mathcal{F}in(G), \exists \Omega_i \subseteq \bigcup_{K \subseteq F, F \in \mathcal{F}in(G)} \mathcal{W}_F(\mathcal{U})$, 使得 Ω_i 覆盖 Z_i , 并且

$$\sum_{\mathbb{U} \in \Omega_i} e^{-sm(\mathbb{U})} \leq M_K^s(G, \mathcal{U}, Z_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}.$$

令 $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, 则 Ω 覆盖 Z , 且

$$\begin{aligned} M_K^s(G, \mathcal{U}, Z) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mathbb{U} \in \Omega_i} e^{-sm(\mathbb{U})} \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} M_K^s(G, \mathcal{U}, Z_i) \end{aligned}$$

$$\leq \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} M^s(G, \mathcal{U}, Z_i).$$

因为 K 和 ϵ 的任意性, 所以有

$$M^s(G, \mathcal{U}, Z) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M^s(G, \mathcal{U}, Z_i).$$

证毕. $\square$

由定义 2.4 易见 $M^s(G, \mathcal{U}, Z)$ 随着参数 s 的减小而增大, 不仅如此, 对于其增大方式, 我们有如下结论:

性质 2.2 设 G 是一个可数无限群, $\mathcal{U}$ 是 X 的一个有限开覆盖, Z 是 X 的一个子集, 则

(1) 如果 $M^s(G, \mathcal{U}, Z) < \infty$ 且 $t > s$, 那么 $M^t(G, \mathcal{U}, Z) = 0$;

(2) 如果 $M^s(G, \mathcal{U}, Z) > 0$ 且 $t < s$, 那么 $M^t(G, \mathcal{U}, Z) = \infty$.

证明 由定义 2.4 和结论 (1), 易知结论 (2) 成立, 所以只需证明结论 (1).

令 $M = M^s(G, \mathcal{U}, Z) + 1$, 任取一个 $K \in \mathcal{F}in(G)$, 则 $M_K^s(G, \mathcal{U}, Z) < M$, 即存在

$$\Omega_K \subseteq \bigcup_{K \subseteq F, F \in \mathcal{F}in(G)} \mathcal{W}_F(\mathcal{U}),$$

且 Ω_K 覆盖 Z , 使得 $\sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-sm(\mathbb{U})} < M$. 又

$$\sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-sm(\mathbb{U})} = \sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-tm(\mathbb{U})} e^{(t-s)m(\mathbb{U})},$$

且 $m(\mathbb{U}) = |F| \geq |K|$, 故而

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-sm(\mathbb{U})} &\geq \sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-tm(\mathbb{U})} e^{(t-s)|K|} \\ &= e^{(t-s)|K|} \sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-tm(\mathbb{U})}. \end{aligned}$$

所以, $\sum_{\mathbb{U} \in \Omega_K} e^{-tm(\mathbb{U})} < M e^{(s-t)|K|}$. 综上, $M_K^t(G, \mathcal{U}, Z) \leq \frac{M}{e^{(t-s)|K|}} < \frac{M}{(t-s)|K|}$, 则

$$M^t(G, \mathcal{U}, Z) = \lim_{K \in \mathcal{F}in(G)} M_K^t(G, \mathcal{U}, Z) = 0.$$

证毕. $\square$

由上述性质可以看出, 存在唯一的实数 s 满足

$$s = \sup\{t \mid M^t(G, \mathcal{U}, Z) = \infty\} = \inf\{t \mid M^t(G, \mathcal{U}, Z) = 0\},$$

所以有如下定义:

定义 2.5 令

$$h_{\text{top}}^{nv}(G, \mathcal{U}, Z) := s,$$

定义子集 $Z \subseteq X$ 的单纯 Bowen 拓扑熵为

$$h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) := \sup_{\mathcal{U}} h_{\text{top}}^{nv}(G, \mathcal{U}, Z),$$

其中 $\mathcal{U}$ 取遍 X 的所有有限开覆盖.

性质 2.3 假设如前, 则有如下结论:

- (1) 设 X 的两个子集满足 $Z \supseteq Z'$, 那么 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) \leq h_{\text{top}}^{nv}(G, Z')$;
- (2) 设 $Z = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$, 那么 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = \sup_{i \geq 1} h_{\text{top}}^{nv}(G, Z_i)$;
- (3) 对任意的群元素 $g \in G$, 以及 X 的任意子集 $Z \subseteq X$, 有 $h_{\text{top}}^{nv}(G, gZ) = h_{\text{top}}^{nv}(G, Z)$.

证明 结论 (1) 和 (2) 由定义 2.5 容易得到, 我们只证明 (3).

对结论 (3) 而言, 只需证明 $h_{\text{top}}^{nv}(G, gZ) \leq h_{\text{top}}^{nv}(G, Z)$, 由对称性, 另外一边的不等式也自动成立.

不妨假设 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = s$ 是一个有限数, 否则结论自明. $\forall \epsilon > 0$, 往证 $h_{\text{top}}^{nv}(G, gZ) \leq h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) + \epsilon$.

任取 X 的一个有限开覆盖 $\mathcal{U}$, 任取一个 $K \in \text{Fin}(G)$. 由定义 2.4 知, $M^{s+\epsilon}(G, \mathcal{U}, Z) = 0$ 对于 X 的任意有限开覆盖 $\mathcal{U}$ 都成立, 即 $\sup_{K' \in \text{Fin}(G)} M_{K'}^{s+\epsilon}(G, \mathcal{U}, Z) = 0$, 故 $0 \leq M_{Kg}^{s+\epsilon}(G, \mathcal{U}, Z) \leq 0$, 即 $M_{Kg}^{s+\epsilon}(G, \mathcal{U}, Z) = 0$. 由定义 2.3 知, 存在一个由字符串构成的集合, 记为 $\Omega = \{\mathbb{U}_i \mid i \in I\}$, I 为其指标集, 且该集合满足

$$\Omega \subseteq \bigcup_{Kg \subseteq F, F \in \text{Fin}(G)} \mathcal{W}_F(\mathcal{U}),$$

且 $Z \subseteq \bigcup_{i \in I} X(\mathbb{U}_i)$, 并且

$$\sum_{i \in I} e^{-(s+\epsilon)m(\mathbb{U}_i)} < 1,$$

其中 $\mathbb{U}_i : F_i \rightarrow \mathcal{U}$, 且 $K \subseteq F_i g^{-1}$.

由 $Z \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{t \in F_i} t^{-1} \mathbb{U}_i(t)$ 知, $gZ \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{t \in F_i} (tg^{-1})^{-1} \mathbb{U}_i(t)$. 定义 $\tilde{\mathbb{U}}_i : F_i g^{-1} \rightarrow \mathcal{U}$ 为 $\tilde{\mathbb{U}}_i(tg^{-1}) = \mathbb{U}_i(t)$, 则

$$gZ \subseteq \bigcup_{i \in I} \bigcap_{h=tg^{-1} \in F_i g^{-1}} (tg^{-1})^{-1} \mathbb{U}_i(tg^{-1}) = \bigcup_{i \in I} X(\tilde{\mathbb{U}}_i).$$

令 $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i \in I} \tilde{\mathbb{U}}_i$, 则

$$\tilde{\Omega} \subseteq \bigcup_{K \subseteq F', F' \in \text{Fin}(G)} \mathcal{W}_{F'}(\mathcal{U}),$$

所以,

$$M_K^{s+\epsilon}(G, \mathcal{U}, gZ) < 1,$$

则

$$0 \leq M^{s+\epsilon}(G, \mathcal{U}, Z) \leq 1.$$

因此, 由定义 2.5 知, $h_{\text{top}}^{nv}(G, \mathcal{U}, Z) \leq s + \epsilon$. 故而 $h_{\text{top}}^{nv}(G, gZ) \leq s + \epsilon$. □

下列关于非顺从群的性质可以在文献 [8, 第 100 页] 中找到.

性质 2.4 设 G 是一个非顺从群, 那么对任意的实数 r , 存在 G 的有限子集 W , 使得

$$\inf \frac{|WF|}{|F|} \geq r,$$

其中下确界取遍 G 所有的非空有限子集 F .

定理 2.1 设 G 是一个可数无限的非顺从群, G 作用在一个紧致度量空间 X 上, 任取其子集 Z , 则有

$$h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = 0 \quad \text{或} \quad h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = \infty.$$

证明 假设 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = c < \infty$, 往证 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = 0$. 由上述性质 2.4 知, 对任意的实数 s , 存在 G 的有限子集 W (不妨假设群 G 的单位元在 W 中), 使得

$$\inf \frac{|WF|}{|F|} \geq s.$$

任取 X 的一个有限开覆盖 $\mathcal{U}$, 令 $\mathcal{U}^W = \bigvee_{g \in W} g^{-1}\mathcal{U}$, 则 $h_{\text{top}}^{nv}(G, \mathcal{U}^W, Z) \leq c$, 因此, $M^{c+1}(G, \mathcal{U}^W, Z) = 0$. 从而对于任意的 G 的非空有限子集 K , 有 $M_K^{c+1}(G, \mathcal{U}^W, Z) = 0$. 又由定义 2.3 知, 存在

$$\Omega_0 \subseteq \bigcup_{K \subseteq F, F \in \text{Fin}(G)} \mathcal{W}_F(\mathcal{U}^W),$$

且 Ω_0 覆盖 Z . 记 $\Omega_0 = \{\mathbb{U}_i \mid i \in I_0\}$, 其中 $\mathbb{U}_i : F_i \rightarrow \mathcal{U}^W (F_i \supseteq K)$, 则有

$$\sum_{i \in I_0} e^{-(c+1)m(\mathbb{U}_i)} < 1. \quad (**)$$

又由 Ω_0 覆盖 Z 知,

$$\bigcup_{i \in I_0} \bigcap_{g \in F_i} g^{-1}\mathbb{U}_i(g) \supseteq Z,$$

即存在 $\phi_g^i : W \rightarrow \mathcal{U}$, 使得

$$\mathbb{U}_i(g) = \bigcap_{w \in W} w^{-1}\phi_g^i(w).$$

因此,

$$X(\mathbb{U}_i) = \bigcap_{g \in F_i} \bigcap_{w \in W} (wg)^{-1}\phi_g^i(w).$$

任给 $t \in WF_i$, 选定 $w_t \in W$ 和 $g_t \in F_i$, 使得 $t = w_t g_t$, 故而

$$\bigcap_{g \in F_i} \bigcap_{w \in W} (wg)^{-1}\phi_g^i(w) \subseteq \bigcap_{t \in WF_i} t^{-1}\phi_{g_t}^i(w_t) = \bigcap_{t \in WF_i} (w_t g_t)^{-1}\phi_{g_t}^i(w_t).$$

定义字符串 $\tilde{\mathbb{U}}_i : WF_i \rightarrow \mathcal{U}$ 如下:

$$\tilde{\mathbb{U}}_i(t) = \phi_{g_t}^i(w_t),$$

则 $\tilde{\Omega} = \{\tilde{\mathbb{U}}_i \mid i \in I_0\}$, 进而 $\tilde{\Omega}$ 覆盖 Z ($WF_i \supseteq K$), 且

$$\sum_{i \in I_0} e^{-(\frac{c+1}{s})m(\tilde{\mathbb{U}}_i)} \leq \sum_{i \in I_0} e^{-(\frac{c+1}{s})s|F_i|} = \sum_{i \in I_0} e^{-(c+1)m(\mathbb{U}_i)} < 1.$$

故 $M^{\frac{c+1}{s}}(G, \mathcal{U}, Z) \leq 1$, 因此, $h_{\text{top}}^{nv}(G, \mathcal{U}, Z) \leq \frac{c+1}{s}$. 由 s 的任意性, 有 $h_{\text{top}}^{nv}(G, \mathcal{U}, Z) = 0$, 从而 $h_{\text{top}}^{nv}(G, Z) = 0$. $\square$

参考文献

- 1 Adler R L, Konheim A G, McAndrew M H. Topological entropy. Trans Amer Math Soc, 1965, 114: 309–319
- 2 Bowen R E. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. Trans Amer Math Soc, 1971, 153: 401–414
- 3 Ornstein D S, Weiss B. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups. J Anal Math, 1987, 48: 1–141
- 4 Bowen L. Sofic entropy and amenable groups. Ergodic Theory Dynam Systems, 2012, 32: 427–466

- 5 Kerr D, Li H. Entropy and the variational principle for actions of sofic groups. *Invent Math*, 2011, 186: 501–558
- 6 Burton P. Naive entropy of dynamical systems. *Israel J Math*, 2017, 219: 637–659
- 7 Feng D J, Huang W. Variational principles for topological entropies of subsets. *J Funct Anal*, 2012, 263: 2228–2254
- 8 Ceccherini-Silberstein T, Coornaert M. *Cellular Automata and Groups*. Berlin: Springer-Verlag, 2010

Bowen topological entropy of countable infinite groups on subsets

Xiaojun Huang, Zhiqiang Li & Jinsong Liu

Abstract In this paper, we study dynamical systems for general infinite countable groups. In particular, for any subset Z of a compact metric space X , we define the naive Bowen topological entropy for the action on this subset. We develop some basic properties of this entropy, and for actions of infinite non-amenable groups, we show that there is a dichotomy, namely, this entropy is either 0 or ∞ .

Keywords naive Bowen topological entropy, infinite countable groups, non-amenable

MSC(2010) 37A35, 37B40

doi: 10.1360/N012019-00037