A_n 和 D_n 型箭图路代数的有界导出范畴的半倾斜对象

陈伟钊

上海交通大学数学科学学院, 上海 200240

E-mail: weizhao1994@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2021-10-10; 接受日期: 2021-12-28; 网络出版日期: 2022-03-01

国家自然科学基金 (批准号: 12131015 和 11971304) 资助项目

摘要 确定一个三角范畴的所有半倾斜对象, 是一项基本且困难的问题. 通过比较复杂的计算, 对于 A_n 型箭图的路代数 A , 本文给出了确定 A 的有界导出范畴 $D^b(A)$ 的所有半倾斜对象的法则. 根据这个法则, 当 n 给定时, 理论上可以逐一写出 $D^b(A)$ 的所有半倾斜对象. 本文用有界同伦范畴 $K^b(\text{proj } A)$ 不可分解的二项预半倾斜对象来描述这个法则. 对于 D_n 型箭图的路代数 A , 本文也作了类似的研究.

关键词 半倾斜对象 预半倾斜对象 有界导出范畴 A_n 型箭图 D_n 型箭图

MSC (2020) 主题分类 16E05, 16E35, 18G80

1 引言

1.1 从倾斜模到三角范畴的半倾斜对象

经典倾斜模 (投射维数不超过 1) 的理论由 Happel 和 Ringel^[11] 引入, 此理论的提出基于之前关于 Coxeter 函子的研究^[5-7]. 之后, 文献 [10, 17] 发展了 (高维, 指投射维数有限) 倾斜模的理论. Happel^[10] 发现有限维代数 A 的有界导出范畴对于倾斜函子是不变的当且仅当 A 的整体维数有限; 这一重要结果随后被 Cline 等^[9] 推广到任意环上, 并且去掉整体维数有限的限制. Rickard^[18] 引入倾斜复形的概念, 并且以此给出了两个凝聚环的有界导出范畴等价的充要条件. 这推动了三角范畴中倾斜对象的研究.

三角范畴中的半倾斜对象是倾斜对象的进一步推广, 有大量的半倾斜对象而非倾斜对象的例子. 半倾斜对象由 Keller 和 Vossieck^[14] 引入. 以现在标准的语言表述, 文献 [14] 引入的只是预半倾斜对象; 结合倾斜对象的条件, 2012 年 Aihara 和 Iyama^[3] 引入了现在使用的标准的半倾斜对象的概念, 其主要动力在于一个半倾斜对象可以通过突变 (mutation) 得到新的半倾斜对象, 而倾斜对象的突变在一

英文引用格式: Chen W Z. Silting objects in bounded derived categories of path algebras of quivers of the types A_n and D_n (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 3-24, doi: 10.1360/SSM-2021-0190

般情况下得不到新的倾斜对象. 当三角范畴 $\mathcal{T}$ 是 Krull-Schmidt 且有一个半倾斜对象时, 半倾斜对象的所有互不同构的直和项构成了 $\mathcal{T}$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{T})$ 作为自由 Abel 群的一组基.

在经典倾斜模理论中, 任何一个预倾斜模 (或称为偏倾斜模, partial tilting module) 都可以补成倾斜模. 在高维的情形下, Rickard 和 Schofield^[19] 给出反例说明了高维的预倾斜模一般不能补成倾斜模. 而在三角范畴 $\mathcal{T}$ 中, 预倾斜对象一般不能补成倾斜对象, 文献 [18] 已给出反例, 本文也给出了一个反例. 然而, 预半倾斜对象是否能补成半倾斜对象? 这是仍未被解决的公开问题 (参见文献 [2]). Aihara^[2] 给出了一些预半倾斜对象能补成半倾斜对象的充分条件. 有关预半倾斜对象补的问题可参见文献 [16, 21, 22]. 刘宏锦和刘利敏^[16] 证明了, 当预半倾斜对象 P 的每一个不可分解直和项都是广义两项时, P 能补成半倾斜对象. 特别地, 当 $\mathcal{T} = K^b(\text{proj } A)$, 其中 A 为有限维遗传代数时, $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象皆可补成半倾斜对象 (也可以参见文献 [22]). 由此易知, 对于有限维遗传代数 A , $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象 M 是半倾斜对象当且仅当 M 的两两互不同构的不可分解直和项的个数等于单 A -模的个数 (参见本文中的引理 2.2). Wei^[21] 证明了每个 (代数闭域上的有限维代数中的) 单自正交模都能补成半倾斜对象.

最近的研究发现, 半倾斜对象与 t -结构和余 t -结构有紧密的联系 (参见文献 [3, 15]); 而二项半倾斜复形作为一种特殊的半倾斜对象, 与 τ -倾斜模、挠对和 2-Calabi-Yau 范畴的丛倾斜对象有着一一对应关系 (参见文献 [1, 13]). 其他相关的研究进展也可参见文献 [8, 12, 20, 24]. 因此, 确定一个给定的三角范畴的所有的半倾斜对象, 是一个基本且困难的问题. 关于倾斜理论的研究进展, 有两本非常实用的参考书 (参见文献 [4, 23]).

1.2 本文主要的结果

通过比较复杂的计算, 对于 A_n 型箭图的路代数 A , 本文给出确定 A 的有界导出范畴 $D^b(A)$ 的所有半倾斜对象的法则, 根据这个法则, 当 n 给定时, 理论上可以逐一写出 $D^b(A)$ 的所有半倾斜对象. 我们用有界同伦范畴 $K^b(\text{proj } A)$ 不可分解的二项预半倾斜对象来描述这个法则.

此前, 文献 [14] 利用 $D^b(A)$ 的 Auslander-Reiten 箭图给出了 $D^b(A)$ 的所有倾斜对象的一个组合描述 (注意, 文献 [14] 中的倾斜对象用的是 complete tilting), 然后再用预倾斜对象按照某种方式得到所有的预半倾斜对象 (注意, 文献 [14] 中的预倾斜对象用的是 tilting, 文献 [14] 中的预半倾斜对象用的是 silting). 因而, 文献 [14] 中给出所有预半倾斜对象的方法不是直接的, 它依赖于预倾斜对象的分类, 而预倾斜对象未必是倾斜对象的直和项, 即便是 A_n 型箭图路代数的导出范畴的预倾斜对象也未必能补成倾斜对象. 因此, 文献 [14] 没有具体地给出半倾斜对象. 本文则具体地给出了确定所有半倾斜对象的法则.

对于 D_n 型箭图的路代数 A , 我们进行了类似的研究. 但是, 由于情形过于复杂, 我们仅得到其中直和项个数为 2 的所有的预半倾斜对象. 将这个方法应用于 D_4 型, 我们具体地列出了所有的半倾斜对象.

2 预备知识

令 M 和 N 是三角范畴 $\mathcal{T}$ 的两个对象. 我们约定, 用记号 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, N[\mathbb{Z}]) = 0$ 表示 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, N[i]) = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. 同理, 记号 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, N[> i]) = 0$ 和 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, N[\neq i]) = 0$ 有类似的约定.

定义 2.1 ^[3, 14, 18] 设 M 是三角范畴 $\mathcal{T}$ 中的对象.

(1) 若 M 满足 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, M[\neq 0]) = 0$, 并且 $\text{thick}M = \mathcal{T}$, 则称 M 是倾斜对象 (tilting object), 其中 $\text{thick}M$ 为 $\mathcal{T}$ 的包含 M 的最小的厚子范畴.

(2) 若 M 满足 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, M[\neq 0]) = 0$, 则称 M 是预倾斜对象 (pretilting object).

(3) 若 M 满足 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, M[> 0]) = 0$, 并且 $\text{thick}M = \mathcal{T}$, 则称 M 是半倾斜对象 (silting object).

(4) 若 M 满足 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M, M[> 0]) = 0$, 则称 M 是预半倾斜对象 (presilting object).

注 2.1 三角范畴中的倾斜对象是文献 [18] 引入的; 预半倾斜对象是文献 [14] 引入的 (事实上, 文献 [14] 中的半倾斜对象是指这里的预半倾斜对象); 半倾斜对象则是在文献 [3] 中定义的.

记 $|M|$ 为 M 的两两互不同构的不可分解直和项的个数.

引理 2.1 (参见文献 [3, 定理 2.27]) 设 M 是 Krull-Schmidt 三角范畴 $\mathcal{T}$ 的半倾斜对象. 则 M 的两两互不同构的不可分解直和项构成 $\mathcal{T}$ 的 Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{T})$ 的一组基. 特别地, $K_0(\mathcal{T})$ 是秩为 $|M|$ 的自由 Abel 群.

根据文献 [16] 中的结果 (或文献 [22] 中的结果) 可知, 当 $\mathcal{T} = K^b(\text{proj} A)$, 其中 A 为有限维遗传代数时, $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象皆可补成半倾斜对象. 我们可以得到以下引理.

引理 2.2 设 A 是有限维遗传代数, M 是有界同伦范畴 $\mathcal{T} = K^b(\text{proj} A)$ 的一个预半倾斜对象. 则

(1) $|M| \leq n$, 其中 n 是互不同构的单 A -模的个数.

(2) M 是半倾斜对象当且仅当 $|M| = n$.

证明 (1) 由文献 [16] 或 [22] 的主要结果知, 存在 $N \in \mathcal{T}$ 使得 $M \oplus N$ 是半倾斜对象. 再由引理 2.1 (即文献 [3, 定理 2.27]) 知

$$|M| \leq |M \oplus N| = \text{rank} K_0(\mathcal{T}) = n.$$

(2) 若 M 是半倾斜对象, 则由引理 2.1 知 $|M| = \text{rank} K_0(K^b(\text{proj} A)) = n$. 反之, 若 $|M| = n$, 类似 (1) 的证明知, 存在 $N \in \mathcal{T}$ 使得 $M \oplus N$ 是半倾斜对象. 再由引理 2.1 知

$$n = |M| \leq |M \oplus N| = \text{rank} K_0(\mathcal{T}) = n.$$

因此 $|M| = |M \oplus N|$, 从而 $N \in \text{add } M$, 故 $\text{thick}M = \text{thick}(M \oplus N) = \mathcal{T}$, 即 M 是 $\mathcal{T}$ 的半倾斜对象. $\square$

因为倾斜对象是半倾斜对象, 预倾斜对象是预半倾斜对象, 故由引理 2.2 知如下推论成立.

推论 2.1 设 A 是有限维遗传代数, M 是有界同伦范畴 $\mathcal{T} = K^b(\text{proj} A)$ 的一个预倾斜对象. 则

(1) $|M| \leq n$, 其中 n 是互不同构的单 A -模的个数.

(2) M 是倾斜对象当且仅当 $|M| = n$.

当 A 的整体维数有限时, 有界导出范畴 $D^b(A)$ 与有界同伦范畴 $K^b(\text{proj} A)$ 是三角等价的 (参见文献 [23]). 因此, 要确定 A_n 和 D_n 型箭图代数 A 的有界导出范畴的半倾斜对象, 就等于是确定其有界同伦范畴 $K^b(\text{proj} A)$ 的半倾斜对象; 而 $K^b(\text{proj} A)$ 中的每一个不可分解对象在相差一个平移的情形下都是形如 $0 \rightarrow P^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} P^0 \rightarrow 0$ 的复形, 它是一个不可分解 A -模的删项极小投射分解. 以下在此框架下确定 A_n 和 D_n 型箭图路代数的有界导出范畴的半倾斜对象.

3 A_n 型箭图路代数的有界导出范畴的半倾斜对象

3.1 记号

三角范畴中的对象 M 称为基本的 (basic), 如果 M 的任意两个不可分解直和项均不同构. 本小

节的目的是要确定 $\mathcal{T} := K^b(\text{proj } kQ)$ 的所有基本半倾斜对象, 其中 Q 是 A_n 型箭图.

根据文献 [5,6] 或 [4, 第 279–281 页, 引理 5.2 和定理 5.3] 可知, 任意两个 A_n 型的不同箭向的箭图可以通过若干次 APR- 倾斜模 (这是根据 Auslander、Platzek 和 Reiten 在文献 [5] 中的工作而命名的) 互相得到. 所以两个 A_n 型的不同箭向的箭图的路代数是导出等价的 (参见文献 [10,18]). 由于三角等价保持半倾斜对象, 因此, 可以选定箭图的方向为单向定向:

$$\vec{A}_n : \bullet_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bullet_2 \longrightarrow \bullet_1.$$

固定一些记号. 令 P_i 是顶点 i 处的不可分解投射右 kQ - 模. 道路的连接是从左到右, 因此, P_1 是投射单模. 对于 $1 \leq i < j \leq n$, 记 $X_{i,j}$ 为 $\mathcal{T}$ 中复形

$$0 \rightarrow P_i \xrightarrow{\sigma} P_j \rightarrow 0,$$

其中 P_j 位于 0- 分支, σ 是自然嵌入. 从而 $\mathcal{T}$ 中的所有不可分解对象如下:

$$P_i[t], \quad 1 \leq i \leq n, \quad \forall t \in \mathbb{Z}; \quad X_{i,j}[t], \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad \forall t \in \mathbb{Z}.$$

令 $\mathcal{X} := \{X_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. 对每个 $X_{i,j}$, 定义 $l(X_{i,j}) = j - i$. 则有 $1 \leq l(X_{i,j}) \leq n - 1$. 定义 $X_{a,b} \leq X_{i,j}$, 如果 $i \leq a < b \leq j$. 则 $(\mathcal{X}, \leq)$ 是一个偏序集. 如果 $X_{a,b} \leq X_{i,j}$ 且 $X_{a,b} \neq X_{i,j}$, 则记 $X_{a,b} < X_{i,j}$ (即 $X_{a,b} \leq X_{i,j}$ 且 $l(X_{a,b}) < l(X_{i,j})$). 对于有限集 Ω , 令 $|\Omega|$ 为 Ω 中元素的个数.

3.2 态射空间

不可分解对象之间的态射空间如下所示.

引理 3.1 令 $\mathcal{T} := K^b(\text{proj } k\vec{A}_n)$. 则

$$(1) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, P_j[\neq 0]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, P_j) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq j, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(2) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, X_{a,b}[\neq 0]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, X_{a,b}) = \begin{cases} k, & \text{若 } a < i \leq b, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(3) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, P_a[\neq 1]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, P_a[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq a < j, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(4) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq a < j \leq b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } a < i \leq b < j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证明 这里只详细证明 (4), 即考虑 $X_{i,j}$ 与 $X_{a,b}[t]$ 之间的链映射. 其余结论完全可以类似地证明. 分情形讨论如下.

当 $t < 0$ 或 $t > 1$ 时, $X_{i,j}$ 与 $X_{a,b}[t]$ 之间的链映射只能是 0.

当 $t = 0$ 时, 任给链映射 $f: X_{i,j} \rightarrow X_{a,b}$ 如下:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{d} & P_j & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow f^0 & & \\ 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d} & P_b & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

如果 f 不同伦于 0, 则 f^{-1} 和 f^0 均不为 0 且没有从 P_j 到 P_a 的非零映射, 从而推导出 $i \leq a < j \leq b$. 在这种情形下, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}) \cong k$; 否则, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}) = 0$.

当 $t = 1$ 时, 任给链映射 $f: X_{i,j} \rightarrow X_{a,b}[1]$ 如下:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_i & \xrightarrow{d} & P_j & \longrightarrow & 0, \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow f^{-1} & & \downarrow 0 \\ 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d} & P_b & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

如果 f 不同伦于 0, 则 $f^{-1} \neq 0$ 且没有从 P_j 到 P_b 的非零映射, 也没有从 P_i 到 P_a 的非零映射, 从而推导出 $a < i \leq b < j$. 在这种情形下, $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}[1]) \cong k$; 否则 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}[1]) = 0$. $\square$

3.3 仅有两个不同构不可分解直和项的预半倾斜对象

注意到以下基本事实: $\mathcal{T}$ 中的对象 T 是预半倾斜对象当且仅当 T 的任意两个互不同构不可分解的直和项的直和是预半倾斜对象. 事实上, 不妨设 T 是基本的, 且有分解 $T = \bigoplus_{i=1}^s T_i$, 其中 T_i ($i = 1, \dots, s$) 均为不可分解对象. 若 T 是预半倾斜对象, 则由定义知, T 的任意直和项均是预半倾斜对象. 反过来, 假设 T 的任意两个互不同构不可分解的直和项的直和是预半倾斜对象, 即 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_i \oplus T_j, (T_i \oplus T_j)[> 0]) = 0$, 对任意 $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ($i \neq j$) 均成立. 由任意性可推导出 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_i, T_j[> 0]) = 0$ 对任意 $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ 均成立, 从而 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T_i, T[> 0]) = 0$, 进一步可推导出 $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[> 0]) = 0$, 即 T 是预半倾斜对象.

因此, 首先考虑 $\mathcal{T}$ 中只有两个互不同构不可分解的直和项的预半倾斜对象 (类似地, 预倾斜对象) 的结构.

引理 3.2 令 M 是 $\mathcal{T}$ 中基本对象且 $|M| = 2$.

(1) 当 $M = P_i[t_i] \oplus P_j[t_j]$ 且 $i < j$ 时, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \leq t_j$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = t_j$.

(2) 当 $M = P_a[t_a] \oplus X_{i,j}[t_{i,j}]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $a \leq i$ 或 $j \leq a$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下.

情形 (i) 若 $a < i$ 或 $j < a$, 则 M 是预倾斜对象 (从而是预半倾斜对象), $\forall t_{i,j}, t_a \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $a = i$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_a \geq t_{i,j} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_a = t_{i,j} + 1$.

情形 (iii) 若 $a = j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_a \leq t_{i,j}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_a = t_{i,j}$.

(3) 当 $M = X_{i,j}[t_{i,j}] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}]$ 且 $i \leq a$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $i = a$ 或 $j \leq a$ 或 $b \leq j$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下.

情形 (i) 若 $a = i$ 且 $j < b$ (相应地, $b < j$), 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{a,b}$ (相应地, $t_{a,b} \leq t_{i,j}$). 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b}$.

情形 (ii) 若 $i < a, b < j$, 则 M 是预倾斜对象 (从而是预半倾斜对象), $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (iii) 若 $i < a, b = j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b}$.

情形 (iv) 若 $a = j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq t_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b} + 1$.

情形 (v) 若 $j < a$, 则 M 是预倾斜对象 (从而是预半倾斜对象), $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

证明 (1) 设 $M = P_i[t_i] \oplus P_j[t_j]$, 其中 $i < j$. 由引理 3.1(1) 知,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_j[t_j], P_i[t_i][\mathbb{Z}]) &= 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i[t_i], P_j[t_j][t_i - t_j]) &= k, \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i[t_i], P_j[t_j][\neq (t_i - t_j)]) &= 0. \end{aligned}$$

因此, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \leq t_j$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = t_j$.

(2) 令 $M = P_a[t_a] \oplus X_{i,j}[t_{i,j}]$.

若 M 是预半倾斜对象, 我们断言 $a \leq i$ 或 $j \leq a$. 否则, $i < a < j$. 则由引理 3.1(2) 和 3.1(3) 知

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_a[t_a], X_{i,j}[t_{i,j}][t_a - t_{i,j}]) = k, \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], P_a[t_a][t_{i,j} - t_a + 1]) = k.$$

于是 $t_a - t_{i,j} \leq 0$ 且 $t_{i,j} - t_a + 1 \leq 0$, 这两个不等式相互矛盾.

下面在 $a \leq i$ 或 $j \leq a$ 的条件下, 分情形证明 M 是预半倾斜对象的充分条件.

情形 (i) 若 $a < i$ 或 $j < a$, 则由引理 3.1(2) 和 3.1(3) 知

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_a[t_a], X_{i,j}[t_{i,j}][\mathbb{Z}]) = 0, \quad \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], P_a[t_a][\mathbb{Z}]) = 0.$$

因此, M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, t_a \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $a = i$, 则由引理 3.1(2) 和 3.1(3) 知

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_a[t_a], X_{i,j}[t_{i,j}][\mathbb{Z}]) &= 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], P_a[t_a][t_{i,j} - t_a + 1]) &= k, \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], P_a[t_a][\neq (t_{i,j} - t_a + 1)]) &= 0. \end{aligned}$$

因此, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_a \geq t_{i,j} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_a = t_{i,j} + 1$.

情形 (iii) 若 $a = j$, 则由引理 3.1(2) 和 3.1(3) 知

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_a[t_a], X_{i,j}[t_{i,j}][t_a - t_{i,j}]) &= k, \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_a[t_a], X_{i,j}[t_{i,j}][\neq (t_a - t_{i,j})]) &= 0, \\ \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], P_a[t_a][\mathbb{Z}]) &= 0. \end{aligned}$$

因此, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_a \leq t_{i,j}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_a = t_{i,j}$.

(3) 设 $M = X_{i,j}[t_{i,j}] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}]$, 其中 $i \leq a$.

若 M 是预半倾斜对象, 我们断言 $i = a$, 或 $j \leq a$, 或 $b \leq j$. 否则, $i < a < j < b$. 由引理 3.1(4) 知

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][t_{i,j} - t_{a,b}]) = k, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][t_{a,b} - t_{i,j} + 1]) = k.$$

于是 $t_{i,j} - t_{a,b} \leq 0$ 且 $t_{a,b} - t_{i,j} + 1 \leq 0$, 这两个不等式相互矛盾.

下面在 $i = a$ 或 $j \leq a$ 或 $b \leq j$ 的条件下, 分情形证明 M 是预半倾斜对象的充分条件.

情形 (i) 若 $a = i$ 且 $j < b$, 则由引理 3.1(4) 知

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][t_{i,j} - t_{a,b}]) &= k, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][\neq (t_{i,j} - t_{a,b})]) &= 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][\mathbb{Z}]) &= 0. \end{aligned}$$

因此, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b}$.

当 $a = i$ 且 $b < j$ 时, 类似地可证结论成立.

情形 (ii) 若 $i < a$, $b < j$, 则由引理 3.1(4) 知

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][\mathbb{Z}]) = 0, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][\mathbb{Z}]) = 0.$$

因此, M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (iii) 若 $i < a$, $b = j$, 则由引理 3.1(4) 知

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][t_{i,j} - t_{a,b}]) &= k, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][\neq (t_{i,j} - t_{a,b})]) &= 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][\mathbb{Z}]) &= 0. \end{aligned}$$

因此, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b}$.

情形 (iv) 若 $a = j$, 则由引理 3.1(4) 知

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][t_{a,b} - t_{i,j} + 1]) &= k, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][\neq (t_{a,b} - t_{i,j} + 1)]) &= 0, \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][\mathbb{Z}]) &= 0. \end{aligned}$$

因此, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq t_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b} + 1$.

情形 (v) 若 $j < a$, 则由引理 3.1(4) 知

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}[t_{i,j}], X_{a,b}[t_{a,b}][\mathbb{Z}]) = 0, \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{a,b}[t_{a,b}], X_{i,j}[t_{i,j}][\mathbb{Z}]) = 0.$$

因此, M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$. □

3.4 两类非预半倾斜对象

根据引理 3.2, 我们可以验证以下两类对象不可能是 $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象.

引理 3.3 (1) 给定 $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n, r \geq 2$, 则对任意 $t_{i_1}, t_{i_r}, t_{i_s, i_{s+1}} \in \mathbb{Z}, s = 1, \dots, r-1$,

$$P_{i_1}[t_{i_1}] \oplus P_{i_r}[t_{i_r}] \oplus X_{i_1, i_2}[t_{i_1, i_2}] \oplus X_{i_2, i_3}[t_{i_2, i_3}] \oplus \cdots \oplus X_{i_{r-1}, i_r}[t_{i_{r-1}, i_r}]$$

不是 $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象.

(2) 给定 $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n, r > 2$, 则对任意 $t_{i_1, i_r}, t_{i_s, i_{s+1}} \in \mathbb{Z}, s = 1, \dots, r-1$,

$$X_{i_1, i_2}[t_{i_1, i_2}] \oplus X_{i_2, i_3}[t_{i_2, i_3}] \oplus \cdots \oplus X_{i_{r-1}, i_r}[t_{i_{r-1}, i_r}] \oplus X_{i_1, i_r}[t_{i_1, i_r}]$$

不是 $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象.

证明 (1) 否则, 它是 $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象. 对这个对象的第 1 和 2 项应用引理 3.2(1) 知 $t_{i_1} \leq t_{i_r}$.

对这个对象的第 1 和 3 项应用引理 3.2(2) 中的情形 (ii) 知 $t_{i_1} \geq t_{i_1, i_2} + 1$.

对这个对象的第 3 和 4 项应用引理 3.2(3) 中的情形 (iv) 知 $t_{i_1, i_2} \geq t_{i_2, i_3} + 1$.

重复上述过程, 从第 3 项开始, 对这个对象的相邻两项应用引理 3.2(3) 中的情形 (iv), 得到

$$t_{i_1} \geq t_{i_1, i_2} + 1 \geq t_{i_2, i_3} + 2 \geq \cdots \geq t_{i_{r-1}, i_r} + r - 1.$$

最后, 对这个对象的第 2 项和最后 1 项应用引理 3.2(2) 中的情形 (iii) 知 $t_{i_{r-1}, i_r} \geq t_{i_r}$. 将这些不等式放在一起, 得到

$$t_{i_1} \geq t_{i_1, i_2} + 1 \geq t_{i_2, i_3} + 2 \geq \cdots \geq t_{i_{r-1}, i_r} + r - 1 \geq t_{i_r} + r - 1.$$

这与 $t_{i_1} \leq t_{i_r}$ 相矛盾.

(2) 否则, 它是 $\mathcal{T}$ 中的预半倾斜对象. 以下证明与 (1) 类似. 对这个对象的前 $r-1$ 项的相邻两项应用引理 3.2(3) 中的情形 (iv), 得到

$$t_{i_1, i_2} \geq t_{i_2, i_3} + 1 \geq \cdots \geq t_{i_{r-1}, i_r} + r - 2.$$

对这个对象的第 1 项和最后 1 项应用引理 3.2(3) 中的情形 (i) 知 $t_{i_1, i_2} \leq t_{i_1, i_r}$.

最后, 对这个对象的最后两项应用引理 3.2(3) 中的情形 (iii) 知 $t_{i_1, i_r} \leq t_{i_{r-1}, i_r}$. 将这些不等式放在一起, 得到

$$t_{i_1, i_2} \geq t_{i_2, i_3} + 1 \geq \cdots \geq t_{i_{r-1}, i_r} + r - 2 \geq t_{i_1, i_r} + r - 2.$$

这与 $t_{i_1, i_2} \leq t_{i_1, i_r}$ 以及 $r > 2$ 相矛盾. □

3.5 主定理

定理 3.1 令 T 是 $\mathcal{T} = K^b(\text{proj } k\vec{A}_n)$ 中的一个基本对象, 形如

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} P_i[t_i] \right) \oplus \left(\bigoplus_{X_{a,b} \in \mathcal{X}'} X_{a,b}[t_{a,b}] \right),$$

其中, $\mathcal{I} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$; $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$, 这里记号 $\mathcal{X}$ 如第 2.1 小节. 则 T 是预半倾斜对象的必要条件如下:

- (1) 若 $X_{a,b}, X_{c,d} \in \mathcal{X}'$ 且 $a \leq c$, 则 $X_{c,d} < X_{a,b}$ 或 $b \leq c$;
- (2) $\mathcal{X}'$ 没有形如 $\{X_{i_1, i_2}, X_{i_2, i_3}, \dots, X_{i_{r-1}, i_r}, X_{i_1, i_r}\}$ 的子集, 其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_r, r > 2$;
- (3) $\forall i \in \mathcal{I}, \forall X_{a,b} \in \mathcal{X}', i \leq a$ 或 $b \leq i$;

(4) 若 $\mathcal{X}'$ 有形如 $\{X_{i_1, i_2}, X_{i_2, i_3}, \dots, X_{i_{r-1}, i_r}\}$ 的子集, 其中 $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, $r \geq 2$, 则集合 $\{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 最多只有一个元素属于 $\mathcal{I}$.

若 T 满足上述条件 (1)–(4), 则按照引理 3.2 所给出的不同情形下的法则, 选择一组整数 $\{t_i, t_{a,b} \in \mathbb{Z} \mid i \in \mathcal{I}, X_{a,b} \in \mathcal{X}'\}$ 使得 T 是预半倾斜对象, 并且每个预半倾斜对象都是这样得到的.

进一步, 上述预半倾斜对象 T 是半倾斜对象当且仅当 $|\mathcal{I}| + |\mathcal{X}'| = n$.

证明 设 T 是预半倾斜对象. 则由引理 3.2(2) 知 T 满足条件 (3), 由引理 3.2(3) 知 T 满足条件 (1), 由引理 3.3(1) 知 T 满足条件 (4), 由引理 3.3(2) 知 T 满足条件 (2).

反之, 设 T 满足条件 (1)–(4), 则可以按照引理 3.2 所给出的不同情形下的法则选择一组整数 $\{t_i, t_{a,b} \in \mathbb{Z} \mid i \in \mathcal{I}, X_{a,b} \in \mathcal{X}'\}$, 使得 T 是预半倾斜对象. 具体操作如下:

首先选择数值 t_i , $i \in \mathcal{I}$, 使其满足, 若 $i, j \in \mathcal{I}$ 且 $i < j$, 则 $t_i \leq t_j$.

然后通过偏序集 $\mathcal{X}'$ 中元素从大到小的顺序逐一选择剩下的数值 $t_{a,b}$, 其中 $X_{a,b} \in \mathcal{X}'$.

由条件 (1) 知, $\mathcal{X}'$ 中的极大元可以划分成若干个形如

$$\{X_{i_1, i_2}, X_{i_2, i_3}, \dots, X_{i_{r-1}, i_r}\}$$

的子集, 其中 $i_1 < i_2 < \dots < i_r$. 假设以上划分所得的每个子集的元素个数都是极大的, 即 $\mathcal{X}'$ 中没有更大的有相同形式的子集包含它. 因此, 若 $\mathcal{X}'$ 中有极大元 $X_{a,b}$ 不属于上述子集, 则有 $b < i_1$ 或 $i_r < a$.

由条件 (4) 知, $\mathcal{I} \cap \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 最多只有一个元素.

若 $\mathcal{I} \cap \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 为空集, 则可以选择 $\{t_{i_1, i_2}, t_{i_2, i_3}, \dots, t_{i_{r-1}, i_r}\}$ 中每个元素的数值, 使其满足

$$t_{i_s, i_{s+1}} \geq t_{i_{s+1}, i_{s+2}} + 1, \quad s = 1, 2, \dots, r-2.$$

若 $\mathcal{I} \cap \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ 不为空集, 则存在唯一的 $i = i_u \in \mathcal{I} \cap \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$. 在上一种情形的基础上, 我们只需增加限制条件 $t_{i_{u-1}, i_u} \geq t_{i_u} \geq t_{i_u, i_{u+1}} + 1$ 即可.

至此, 对于 $\mathcal{X}'$ 中任意的极大元 $X_{a,b}$, 我们已经选择了 $t_{a,b}$ 的数值. 假设 $X_{i,j} \in \mathcal{X}'$ 且我们已经选择了 $t_{i,j}$ 的数值. 定义 $\mathcal{X}'_{i,j} = \{X_{a,b} \in \mathcal{X}' \mid X_{a,b} < X_{i,j}\}$, 若 $\mathcal{X}'_{i,j}$ 非空, 则对于 $\mathcal{X}'_{i,j}$ 中每个极大元 $X_{a,b}$, 可以按如下方式选择 $t_{a,b}$ 的数值.

由条件 (1) 知, $\mathcal{X}'_{i,j}$ 中的极大元可以划分成若干个形如

$$\{X_{i_1, i_2}, X_{i_2, i_3}, \dots, X_{i_{r-1}, i_r}\}$$

的子集, 其中 $i \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq j$. 由条件 (2) 知, $i_1 = i$ 和 $i_r = j$ 最多只有一个式子成立.

若 $i_1 \neq i$ 且 $i_r \neq j$, 则由条件 (3) 知, $\mathcal{I} \cap \{i_1, i_2, \dots, i_r\} = \emptyset$. 则可以选择 $\{t_{i_1, i_2}, t_{i_2, i_3}, \dots, t_{i_{r-1}, i_r}\}$ 中每个元素的数值, 使其满足

$$t_{i_s, i_{s+1}} \geq t_{i_{s+1}, i_{s+2}} + 1, \quad s = 1, 2, \dots, r-2.$$

若 $i_1 = i$, 则需要在上一种情形的基础上增加限制条件 $t_{i,j} \geq t_{i_1, i_2}$.

若 $i_r = j$, 则需要第一种情形的基础上增加限制条件 $t_{i_{r-1}, i_r} \geq t_{i,j}$.

继续这种操作, 我们将选定一组整数 $\{t_i, t_{a,b} \in \mathbb{Z} \mid i \in \mathcal{I}, X_{a,b} \in \mathcal{X}'\}$, 其满足

- 若 $i, j \in \mathcal{I}$ 且 $i < j$, 则 $t_i \leq t_j$;
- 若 $i \in \mathcal{I}$ 且 $X_{i,b} \in \mathcal{X}'$, 则 $t_i \geq t_{i,b} + 1$;

- 若 $i \in \mathcal{I}$ 且 $X_{a,i} \in \mathcal{X}'$, 则 $t_i \leq t_{a,i}$;
- 若 $X_{a,b}, X_{b,c} \in \mathcal{X}'$, 则 $t_{a,b} \geq t_{b,c} + 1$;
- 若 $X_{a,b}, X_{a,c} \in \mathcal{X}'$ 且 $b < c$, 则 $t_{a,b} \leq t_{a,c}$;
- 若 $X_{a,c}, X_{b,c} \in \mathcal{X}'$ 且 $a < b$, 则 $t_{a,c} \leq t_{b,c}$.

此时, T 中任意两个不可分解直和项的直和均满足引理 3.2 的法则, 从而均是预半倾斜对象. 因此, 由任意性知, T 是预半倾斜对象. 进一步, 由引理 2.2 知, 上述预半倾斜对象 T 是半倾斜对象当且仅当 $|\mathcal{I}| + |\mathcal{X}'| = n$. $\square$

注 3.1 因为预倾斜对象是特殊的预半倾斜对象, 所以也满足上述定理的条件 (1)–(4). 同时, 若 T 满足条件 (1)–(4), 则也能找到一组整数 $\{t_i, t_{a,b} \in \mathbb{Z} \mid i \in \mathcal{I}, X_{a,b} \in \mathcal{X}'\}$ 使得 T 是预倾斜对象. 进一步, 若 $|\mathcal{I}| + |\mathcal{X}'| = n$, 则 T 是倾斜对象. 选择这组整数时, 我们只需将定理中这组整数满足的不等式改成等式即可.

3.6 例子

给定 n , 由定理 3.1 可以列出 $K^b(\text{proj } k\vec{A}_n)$ 的所有半倾斜对象.

例 3.1 令 $\mathcal{T} := K^b(\text{proj } kQ)$, 其中 $Q = \vec{A}_4 : \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$. 则 $\mathcal{T}$ 中所有不可分解对象是

$$P_1[t_1], \quad P_2[t_2], \quad P_3[t_3], \quad P_4[t_4], \\ X_{1,2}[t_{1,2}], \quad X_{1,3}[t_{1,3}], \quad X_{1,4}[t_{1,4}], \quad X_{2,3}[t_{2,3}], \quad X_{2,4}[t_{2,4}], \quad X_{3,4}[t_{3,4}],$$

$\forall t_i, t_{a,b} \in \mathbb{Z}, i, a, b \in \{1, 2, 3, 4\}, a < b$. 根据定理 3.1, $\mathcal{T}$ 中所有半倾斜对象如下所示.

(1) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus P_a[t_a] \oplus P_b[t_b]$ 的半倾斜对象:

$$P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4.$$

(2) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus P_k[t_k] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned} &P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3, \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3, \\ &P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_4, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_2, \\ &P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_4 \leq t_{3,4}, \\ &P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_3 \leq t_4, \\ &P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_1 \leq t_3 \leq t_4, \quad t_3 \leq t_{2,3}, \\ &P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}], \quad t_2 \leq t_3 \leq t_4, \quad t_2 \leq t_{1,2}. \end{aligned}$$

(3) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned} &P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_1 \leq t_2, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_2, \\ &P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_1 \leq t_2, \quad t_{3,4} + 2 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_2, \\ &P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_1 \leq t_2, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_2, \quad t_{2,4} \leq t_{3,4}, \\ &P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_3, \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3, \\ &P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_1 \leq t_3 \leq t_{2,3}, \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}], & \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq t_4, \\
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_{2,3} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_4, \\
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_4 \leq t_{3,4}, \\
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq t_4, \quad t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], & \quad t_1 \leq t_4 \leq t_{2,4}, \quad t_{2,3} \leq t_{2,4}, \\
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_1 \leq t_4 \leq t_{3,4} \leq t_{2,3} - 1, \\
P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_1 \leq t_4 \leq t_{2,4} \leq t_{3,4}, \\
P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_2 \leq t_3, \quad t_2 \leq t_{1,2}, \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3, \\
P_2[t_2] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_2 \leq t_4, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \\
P_2[t_2] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_2 \leq t_4 \leq t_{3,4}, \quad t_2 \leq t_{1,2}, \\
P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}], & \quad t_3 \leq t_4, \quad t_3 \leq t_{1,3}, \quad t_{1,2} \leq t_{1,3}, \\
P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_3 \leq t_4, \quad t_3 \leq t_{2,3} \leq t_{1,2} - 1, \\
P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_3 \leq t_4, \quad t_3 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}.
\end{aligned}$$

(4) 形如 $P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus X_{e,f}[t_{e,f}]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned}
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}], & \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_1, \quad t_{3,4} + 1 \leq t_{1,3}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_{2,3} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1, \quad t_{1,4} \leq t_{3,4}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], & \quad t_{2,3} + 2 \leq t_{2,4} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{3,4} + 3 \leq t_{2,3} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{2,4} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1, \quad t_{2,4} \leq t_{3,4}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], & \quad t_{1,3} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1, \quad t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1, \quad t_{3,4} + 1 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], & \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1, \quad t_{1,4} \leq t_{2,4}, \quad t_{2,3} \leq t_{2,4}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1, \quad t_{1,4} + 1 \leq t_{3,4} + 1 \leq t_{2,3}, \\
P_1[t_1] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1, \quad t_{1,4} \leq t_{2,4} \leq t_{3,4}, \\
P_2[t_2] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], & \quad t_{2,3} + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \\
P_2[t_2] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{3,4} + 2 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \\
P_2[t_2] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{2,4} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \quad t_{2,4} \leq t_{3,4}, \\
P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3}, \quad t_{1,2} \leq t_{1,3}, \\
P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{2,3} \leq t_{1,2} - 1, \\
P_3[t_3] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], & \quad t_{3,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}], & \quad t_4 \leq t_{1,4}, \quad t_{1,2} \leq t_{1,3} \leq t_{1,4},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{3,4} \leq t_{1,3} - 1, \quad t_{1,2} \leq t_{1,3}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_4 \leq t_{1,4}, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,4}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{1,4} \leq t_{3,4}, \quad t_{1,2} \leq t_{1,4}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_4 \leq t_{2,4}, \quad t_{2,3} \leq t_{2,4}, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{3,4}, \quad t_{3,4} + 2 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{2,4} \leq t_{3,4}, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_{1,2}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_4 \leq t_{1,4}, \quad t_{1,3} \leq t_{1,4}, \quad t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{3,4} \leq t_{1,3} - 1 \leq t_{2,3} - 1, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_4 \leq t_{1,4} \leq t_{2,4}, \quad t_{2,3} \leq t_{2,4}, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{1,4} \leq t_{3,4} \leq t_{2,3} - 1, \\
 &P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus X_{3,4}[t_{3,4}], \quad t_4 \leq t_{1,4} \leq t_{2,4} \leq t_{3,4}.
 \end{aligned}$$

(5) 不存在形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus X_{e,f}[t_{e,f}] \oplus X_{g,h}[t_{g,h}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合均不满足定理 3.1 中的必要条件.

上述各种形式的对象是倾斜对象当且仅当对应的不等式都取等号.

值得注意的是, $\mathcal{T}$ 中的预倾斜对象不一定能补成倾斜对象. 例如, $K^b(\text{proj } k\vec{A}_4)$ 中的对象 $T = P_1 \oplus X_{2,3}[3] \oplus X_{2,4}[3]$ 是预倾斜对象, 它可以补成半倾斜对象, 由上述例子的情形 (3) 和 (4) 可以找出它所有可能的补, 有 $P_2[t_2]$, $t_2 \geq 4$ 或 $P_4[t_4]$, $0 \leq t_4 \leq 3$ 或 $X_{1,4}[t_{1,4}]$, $t_{1,4} \leq -1$, 但无论是哪种补, T 均不能补成倾斜对象.

4 D_n 型箭图路代数的有界导出范畴的半倾斜对象

本节假设 $\mathcal{T} := K^b(\text{proj } kQ)$, 其中 Q 是 D_n 型箭图, 理由同第 3 节, 我们选定箭图方向为 $\vec{D}_n$:

4.1 记号

为方便起见, 重新定义集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的偏序. 若 Q 中存在从 j 到 i 的道路, 则记 $i < j$. 所以

$$1 < 2 < \dots < n-2, \quad n-2 < n-1, \quad n-2 < n,$$

n 与 $n-1$ 无偏序关系, 都是集合的极大元. 在该偏序集中, 当 i 和 j 分别等于 n 和 $n-1$, 或 $j \leq i$ 时, 记 $i \not< j$, 同理有记号 $\not>$, $\not\leq$ 和 $\not\geq$.

这里, P_i 和 $X_{i,j}$ 的定义与第 2 节一致. 对于 $1 \leq i \leq n-2$, 记 Y_i 为 $\mathcal{T}$ 中复形

$$0 \rightarrow P_i \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}} P_{n-1} \oplus P_n \rightarrow 0,$$

其中 $P_{n-1} \oplus P_n$ 位于 0- 分支, f_1 和 f_2 都是自然嵌入. 对于 $1 \leq i < j \leq n-2$, 记 $Y_{i,j}$ 为 $\mathcal{T}$ 中复形

$$0 \rightarrow P_i \oplus P_j \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ 0 & f_{22} \end{bmatrix}} P_{n-1} \oplus P_n \rightarrow 0,$$

其中 $P_{n-1} \oplus P_n$ 位于 0- 分支, f_{11} 、 f_{12} 和 f_{22} 都是自然嵌入. 从而 $\mathcal{T}$ 中的所有不可分解对象如下:

$$\begin{aligned} P_i[t], \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}; \quad X_{i,j}[t], \quad i < j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}; \\ Y_i[t], \quad i \in \{1, 2, \dots, n-2\}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}; \quad Y_{i,j}[t], \quad 1 \leq i < j \leq n-2, \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

每个不可分解对象都是 $\mathcal{T}$ 中的预倾斜对象, 从而是预半倾斜对象.

4.2 态射空间

不可分解对象之间的态射空间如下所示.

引理 4.1 令 $\mathcal{T} := K^b(\text{proj } k\vec{D}_n)$. 则

$$(1) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, P_j[\neq 0]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, P_j) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq j, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(2) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, X_{a,b}[\neq 0]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, X_{a,b}) = \begin{cases} k, & \text{若 } a < i \leq b, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(3) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, Y_j[\neq 0]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, Y_j) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } j < i \leq n-2, \\ k, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(4) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, Y_{a,b}[\neq 0]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(P_i, Y_{a,b}) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } b < i \leq n-2, \\ k, & \text{若 } a < i \leq b \text{ 或 } i \in \{n-1, n\}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(5) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, P_a[\neq 1]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, P_a[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq a \text{ 且 } j \neq a, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(6) \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq a < j \leq b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, X_{a,b}[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } a < i \leq b, j \not\leq b, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(7) \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, Y_a[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, Y_a) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq a < j \leq n-2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, Y_a[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } a < i \text{ 且 } j \in \{n-1, n\}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(8) \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, Y_{a,b}[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, Y_{a,b}) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } i \leq a, b < j \leq n-2, \\ k, & \text{若 } i \leq a \text{ 且 } j \in \{x \in \mathbb{Z} \mid a < x \leq b\} \cup \{n-1, n\}, \\ k, & \text{若 } a < i \leq b < j \leq n-2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X_{i,j}, Y_{a,b}[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } b < i \text{ 且 } j \in \{n-1, n\}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(9) \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, P_j[\neq 1]) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, P_j[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq j \leq n-2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(10) \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, X_{a,b}[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, X_{a,b}) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq a \text{ 且 } b \in \{n-1, n\}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, X_{a,b}[1]) = \begin{cases} k, & \text{若 } a < i \leq b \leq n-2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(11) \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, Y_j[\neq 0]) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, Y_j) = \begin{cases} k, & \text{若 } i \leq j, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(12) \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, Y_{a,b}[\neq 0]) = 0,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_i, Y_{a,b}) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } i \leq a, \\ k, & \text{若 } a < i \leq b, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(13) \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, P_a[\neq 1]) = 0,$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, P_a[1]) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } j \leq a \leq n-2, \\ k, & \text{若 } i \leq a < j \text{ 或 } a \in \{n-1, n\}, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(14) \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, X_{a,b}[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, X_{a,b}) = \begin{cases} k, & \text{若 } j \leq a \text{ 且 } b \in \{n-1, n\}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, X_{a,b}[1]) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } a < i, j \leq b \leq n-2, \\ k, & \text{若 } a < i \text{ 且 } b \in \{x \in \mathbb{Z} \mid i \leq x < j\} \cup \{n-1, n\}, \\ k, & \text{若 } i \leq a < j \leq b \leq n-2, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(15) \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, Y_a[\neq 1]) = 0,$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, Y_a[1]) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } a < i, \\ k, & \text{若 } i \leq a < j, \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

$$(16) \operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, Y_{a,b}[\neq 0, 1]) = 0,$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, Y_{a,b}) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } j \leq a, \\ k, & \text{若 } i \leq a < j \leq b, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{T}}(Y_{i,j}, Y_{a,b}[1]) = \begin{cases} k^2, & \text{若 } b < i, \\ k, & \text{若 } a < i \leq b < j, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

引理 4.1 的证明比较烦琐, 且其证明与引理 3.1 的证明类似, 故省略具体的证明细节.

4.3 仅有两个不同构直和项的预半倾斜对象

因为对象 T 是预半倾斜对象当且仅当 T 的任意两个互不同构不可分解的直和项的直和是预半倾斜对象, 考虑 $\mathcal{T}$ 中只有两个不同构直和项的预半倾斜对象 (类似地, 预倾斜对象) 的结构.

命题 4.1 令 M 是 $\mathcal{T}$ 中基本对象且 $|M| = 2$.

(1) 当 $M = P_i[t_i] \oplus P_j[t_j]$ 时, 为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $i < j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \leq t_j$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = t_j$.

情形 (ii) 若 $i = n-1, j = n$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{n-1}, t_n \in \mathbb{Z}$.

(2) 当 $M = P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $i \leq a$ 或 $i \not\leq b$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $i < a$ 或 $b < i$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{a,b}, t_i \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $i = a$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \geq t_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = t_{a,b} + 1$.

情形 (iii) 若 $i = b$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \leq t_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = t_{a,b}$.

情形 (iv) 若 $i \neq b$ 且 $i, b \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \geq t_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = t_{a,b} + 1$.

(3) 当 $M = P_i[t_i] \oplus Y_j[s_j]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $i < j$ 或 $i \in \{n-1, n\}$.

若 $i < j$ 或 $i \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \leq s_j$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = s_j$.

(4) 当 $M = P_i[t_i] \oplus Y_{a,b}[s_{a,b}]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $i \leq a$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $i < a$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_i, s_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $i = a$, M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_i \geq s_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_i = s_{a,b} + 1$.

(5) 当 $M = X_{i,j}[t_{i,j}] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}]$ 且 $i \leq a$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $a = i$ 或 $j \leq a$ 或 $j \not\leq b$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $i = a, j < b$ ($b < j$), 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{a,b}$ ($t_{a,b} \leq t_{i,j}$). 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b}$.

情形 (ii) 若 $i = a, j \neq b$ 且 $j, b \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (iii) 若 $i < a, j \neq b$ 且 $j, b \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq t_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b} + 1$.

情形 (iv) 若 $i < a, b < j$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (v) 若 $i < a, b = j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b}$.

情形 (vi) 若 $a = j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq t_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = t_{a,b} + 1$.

情形 (vii) 若 $j < a$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, t_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

(6) 当 $M = X_{i,j}[t_{i,j}] \oplus Y_a[s_a]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $j \leq a$ 或 $i < a, j \in \{n-1, n\}$ 或 $a = i$ 或 $a < i < j \leq n-2$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $j < a$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_a \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $j = a$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq s_a + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_a + 1$.

情形 (iii) 若 $i < a, j \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_a \in \mathbb{Z}$.

情形 (iv) 若 $i = a, j \leq n-2$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq s_a$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_a$.

情形 (v) 若 $i = a, j \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $s_a \leq t_{i,j}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $s_a = t_{i,j}$.

情形 (vi) 若 $a < i < j \leq n-2$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_a \in \mathbb{Z}$.

(7) 当 $M = X_{i,j}[t_{i,j}] \oplus Y_{a,b}[s_{a,b}]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $j \leq a$ 或 $a < i, j \leq b$ 或 $a \leq i, j < b$ 或 $a \leq i \leq b, j \in \{n-1, n\}$ 或 $b \leq i, j \leq n-2$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $j < a$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $j = a$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq s_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_{a,b} + 1$.

情形 (iii) 若 $a < i, j < b$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (iv) 若 $i = a, j < b$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq s_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_{a,b}$.

情形 (v) 若 $j = b, a < i$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq s_{a,b} + 1$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_{a,b} + 1$.

情形 (vi) 若 $a < i < b, j \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_a \in \mathbb{Z}$.

情形 (vii) 若 $i = a, j \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq s_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_{a,b}$.

情形 (viii) 若 $i = b, j \in \{n-1, n\}$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \geq s_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_{a,b}$.

情形 (ix) 若 $i = b, j \leq n-2$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} \leq s_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $t_{i,j} = s_{a,b}$.

情形 (x) 若 $b < i, j \leq n-2$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall t_{i,j}, s_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

(8) 当 $M = Y_i[s_i] \oplus Y_j[s_j]$ 且 $i < j$ 时, M 是预半倾斜对象当且仅当 $s_i \leq s_j$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $s_i = s_j$.

(9) 当 $M = Y_i[s_i] \oplus Y_{a,b}[s_{a,b}]$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $b \leq i$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $b < i$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall s_i, s_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (ii) 若 $b = i$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $s_i \leq s_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $s_i = s_{a,b}$.

(10) 当 $M = Y_{i,j}[s_{i,j}] \oplus Y_{a,b}[s_{a,b}]$ 且 $i \leq a$ 时, M 是预半倾斜对象的必要条件是 $a = i$ 或 $b \leq j$.

为得到 M 是预半倾斜对象的充要条件, 分情形讨论如下:

情形 (i) 若 $a = i$ 且 $j < b$ ($b < j$), 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $s_{i,j} \leq s_{a,b}$ ($s_{a,b} \leq s_{i,j}$). 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $s_{i,j} = s_{a,b}$.

情形 (ii) 若 $i < a, b < j$, 则 M 是预倾斜对象, $\forall s_{i,j}, s_{a,b} \in \mathbb{Z}$.

情形 (iii) 若 $i < a, b = j$, 则 M 是预半倾斜对象当且仅当 $s_{i,j} \leq s_{a,b}$. 类似地, M 是预倾斜对象当且仅当 $s_{i,j} = s_{a,b}$.

命题 4.1 的证明与引理 3.2 的证明类似且比较烦琐, 故省略具体的证明细节.

4.4 例子

例 4.1 令 $\mathcal{T} := K^b(\text{proj } kQ)$, 其中 $Q = \vec{D}_4$:

则 $\mathcal{T}$ 中所有不可分解对象是

$$P_1[t_1], P_2[t_2], P_3[t_3], P_4[t_4], Y_1[s_1], Y_2[s_2], Y_{1,2}[s_{1,2}], \\ X_{1,2}[t_{1,2}], X_{1,3}[t_{1,3}], X_{1,4}[t_{1,4}], X_{2,3}[t_{2,3}], X_{2,4}[t_{2,4}],$$

$\forall t_i, t_{a,b}, s_1, s_2, s_{1,2} \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4, a = 1, 2, b = 2, 3, 4, a < b.$

我们根据命题 4.1 给出的法则把 $\mathcal{T}$ 的所有形式的半倾斜对象列出.

(1) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus P_a[t_a] \oplus P_b[t_b]$ 的半倾斜对象:

$$P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3, \quad t_2 \leq t_4.$$

(2) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus P_l[t_l] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}]$ 的半倾斜对象:

$$P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_3, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_2, \\ P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_1 \leq t_2 \leq t_4, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_2, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_3, \quad t_1 \leq t_4, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_1 \leq t_3 \leq t_{2,3}, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_4, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_1 \leq t_4 \leq t_{2,4}, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_3, \\ P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}], \quad t_2 \leq t_{1,2}, \quad t_2 \leq t_3, \quad t_2 \leq t_4.$$

(3) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus P_l[t_l] \oplus Y_a[s_a]$ 的半倾斜对象:

$$P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus Y_2[s_2], \quad t_1 \leq t_3 \leq s_2, \quad t_1 \leq t_4 \leq s_2.$$

(4) 不存在形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus P_l[t_l] \oplus Y_{a,b}[s_{a,b}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

(5) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}]$ 的半倾斜对象:

$$P_1[t_1] \oplus P_2[t_2] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_1 \leq t_2, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_2, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_2, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1 \leq t_3, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,4} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_3, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1 \leq t_3, \quad t_{1,4} \leq t_{2,4} \leq t_3 - 1, \\ P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_1 \leq t_3 \leq t_{2,3}, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_3, \\ P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq t_4,$$

$$\begin{aligned}
&P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{2,3} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1 \leq t_4, \\
&P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq t_4, \quad t_{1,3} \leq t_{2,3} \leq t_4 - 1, \\
&P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_1 \leq t_4 \leq t_{2,4}, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_4, \\
&P_2[t_2] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,4} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \quad t_2 \leq t_3, \\
&P_2[t_2] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{2,3} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \quad t_2 \leq t_4.
\end{aligned}$$

(6) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus Y_c[s_c]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned}
&P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1 \leq t_3 \leq s_2, \\
&P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_1 \leq t_3 \leq s_2 \leq t_{2,3}, \\
&P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq t_4 \leq s_2, \\
&P_1[t_1] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_1 \leq t_4 \leq s_2 \leq t_{2,4}, \\
&P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus Y_1[s_1], \quad t_3 \leq s_1, \quad t_4 \leq s_1, \quad t_{1,2} \leq s_1, \\
&P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 \leq s_2, \quad t_4 \leq s_2, \quad s_2 + 1 \leq t_{1,2}, \\
&P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_4 \leq s_2, \\
&P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_4 + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_3 \leq s_2.
\end{aligned}$$

(7) 不存在形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus Y_{c,d}[s_{c,d}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

(8) 形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus Y_a[s_a] \oplus Y_b[s_b]$ 的半倾斜对象:

$$P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus Y_1[s_1] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 \leq s_1 \leq s_2, \quad t_4 \leq s_1.$$

(9) 不存在形如 $P_i[t_i] \oplus P_j[t_j] \oplus Y_a[s_a] \oplus Y_{c,d}[s_{c,d}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

(10) 形如 $P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus X_{e,f}[t_{e,f}]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned}
&P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,j} + 1 \leq t_1, \quad j = 3, 4, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,4} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_1, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{2,3} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,3} + 2 \leq t_{1,2} + 1 \leq t_1, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_{1,2}, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{1,3} + 2 \leq t_{2,3} + 2 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_1, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{1,4} + 2 \leq t_{2,4} + 2 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_1, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
&P_1[t_1] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_{1,4} \leq t_{2,4}, \\
&P_2[t_2] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,3} + 1 \leq t_2 \leq t_{1,2}, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_2, \\
&P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3}, \\
&P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,4} + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,3}, \quad t_{2,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,4} + 2 \leq t_3 + 1 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2}, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{1,4} + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3}, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}], \quad t_{1,2} + 1 \leq t_{1,3} + 1 \leq t_4 \leq t_{1,4}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,4}, \quad t_{2,3} + 1 \leq t_4 \leq t_{1,4}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,3} + 2 \leq t_4 + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_{1,2}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_4 \leq t_{1,4}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}], \quad t_{2,3} + 1 \leq t_4 \leq t_{1,4} \leq t_{2,4}.
\end{aligned}$$

(11) 形如 $P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus Y_e[s_e]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned}
& P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq s_2, \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1, \\
& P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_{2,3}, \\
& P_1[t_1] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,4} + 1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_{2,4}, \\
& P_1[t_1] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_1 \leq s_2 \leq t_{2,3}, \quad s_2 \leq t_{2,4}, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus Y_1[s_1], \quad t_{1,2} \leq s_1 \leq t_{1,3}, \quad t_3 \leq s_1, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 + 1 \leq s_2 + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,3}, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 + 1 \leq s_2 + 1 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2}, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,4} + 1 \leq t_3 \leq t_{1,3}, \quad t_3 \leq s_2, \\
& P_3[t_3] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}, \quad t_3 \leq s_2 \leq t_{2,3}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_1[s_1], \quad t_{1,2} \leq s_1 \leq t_{1,4}, \quad t_4 \leq s_1, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_4 + 1 \leq s_2 + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,4}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_4 + 1 \leq s_2 + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_{1,2}, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_{1,3} + 1 \leq t_4 \leq t_{1,4}, \quad t_4 \leq s_2, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], \quad t_4 \leq t_{1,4} \leq t_{2,4}, \quad t_4 \leq s_2 \leq t_{2,4}.
\end{aligned}$$

(12) 形如 $P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus Y_{e,f}[s_{e,f}]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned}
& P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], \quad t_{1,3} + 1 \leq s_{1,2} + 1 \leq t_1, \quad t_{1,4} \leq s_{1,2}, \\
& P_1[t_1] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], \quad t_{1,3} + 1 \leq s_{1,2} + 1 \leq t_1, \quad s_{1,2} \leq t_{2,3}, \\
& P_1[t_1] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], \quad t_{1,4} + 1 \leq s_{1,2} + 1 \leq t_1, \quad s_{1,2} \leq t_{2,4}, \\
& P_1[t_1] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], \quad s_{1,2} + 1 \leq t_1, \quad s_{1,2} \leq t_{2,3}, \quad s_{1,2} \leq t_{2,4}.
\end{aligned}$$

(13) 形如 $P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus Y_c[s_c] \oplus Y_d[s_d]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned}
& P_3[t_3] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus Y_1[s_1] \oplus Y_2[s_2], \quad t_3 \leq s_1 \leq t_{1,3}, \quad s_1 \leq s_2, \\
& P_4[t_4] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_1[s_1] \oplus Y_2[s_2], \quad t_4 \leq s_1 \leq t_{1,4}, \quad s_1 \leq s_2.
\end{aligned}$$

(14) 不存在形如 $P_i[t_i] \oplus X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus Y_c[s_c] \oplus Y_{d,e}[s_{d,e}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

(15) 不存在形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus X_{e,f}[t_{e,f}] \oplus X_{g,h}[t_{g,h}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

(16) 形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus X_{e,f}[t_{e,f}] \oplus Y_g[s_g]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned} X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_1[s_1], & \quad t_{1,2} \leq s_1 \leq t_{1,3}, \quad s_1 \leq t_{1,4}, \\ X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2], & \quad s_2 + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,3}, \quad t_{1,2} \leq t_{1,4}, \\ X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], & \quad s_2 + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,3}, \\ X_{1,2}[t_{1,2}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2], & \quad s_2 + 1 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_{1,2} \leq t_{1,4}, \\ X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2], & \quad t_{1,3} + 1 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_{1,4}, \quad s_2 \leq t_{2,3}, \\ X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], & \quad t_{1,4} + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_{1,3}, \quad s_2 \leq t_{2,4}, \\ X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], & \quad s_2 + 1 \leq t_{2,4} + 1 \leq t_{1,3} \leq t_{2,3}, \\ X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2], & \quad s_2 + 1 \leq t_{2,3} + 1 \leq t_{1,4} \leq t_{2,4}. \end{aligned}$$

(17) 不存在形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus X_{e,f}[t_{e,f}] \oplus Y_{g,h}[s_{g,h}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

(18) 形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus Y_e[s_e] \oplus Y_f[s_f]$ 的半倾斜对象:

$$X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_1[s_1] \oplus Y_2[s_2], \quad s_1 \leq t_{1,3}, \quad s_1 \leq t_{1,4}, \quad s_1 \leq s_2.$$

(19) 形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus X_{c,d}[t_{c,d}] \oplus Y_e[s_e] \oplus Y_{f,g}[s_{f,g}]$ 的半倾斜对象:

$$\begin{aligned} X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus Y_2[s_2] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], & \quad t_{1,3} \leq s_{1,2}, \quad t_{1,4} \leq s_{1,2}, \quad s_2 \leq s_{1,2}, \\ X_{1,3}[t_{1,3}] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus Y_2[s_2] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], & \quad t_{1,3} \leq s_{1,2} \leq t_{2,3}, \quad s_2 \leq s_{1,2}, \\ X_{1,4}[t_{1,4}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], & \quad t_{1,4} \leq s_{1,2} \leq t_{2,4}, \quad s_2 \leq s_{1,2}, \\ X_{2,3}[t_{2,3}] \oplus X_{2,4}[t_{2,4}] \oplus Y_2[s_2] \oplus Y_{1,2}[s_{1,2}], & \quad s_2 \leq s_{1,2} \leq t_{2,3}, \quad s_{1,2} \leq t_{2,4}. \end{aligned}$$

(20) 不存在形如 $X_{a,b}[t_{a,b}] \oplus Y_c[s_c] \oplus Y_d[s_d] \oplus Y_{e,f}[s_{e,f}]$ 的半倾斜对象, 这是因为无论是哪种组合, 该对象的任意两个不同构直和项的直和都不能同时满足命题 4.1 给出的法则.

值得注意的是, 在不考虑不可分解直和项的平移的情形下, 半倾斜对象和倾斜对象不一定有相同的组合形式. 例如, 由命题 4.1 知 $P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}]$ 是 $\mathcal{T}$ 的半倾斜对象当且仅当 $t_1 \leq t_3 \leq t_{2,3}$, $t_{2,3} + 1 \leq t_4$. 但是对任意的 $t_1, t_3, t_4, t_{2,3} \in \mathbb{Z}$, $P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}]$ 都不是 $\mathcal{T}$ 中的倾斜对象. 事实上, 若 $P_1[t_1] \oplus P_3[t_3] \oplus P_4[t_4] \oplus X_{2,3}[t_{2,3}]$ 是倾斜对象, 则由命题 4.1(1) 中的情形 (i) 以及 (2) 中的情形 (iii) 和 (iv) 知等式 $t_1 = t_3 = t_{2,3}$, $t_{2,3} + 1 = t_4$ 和 $t_1 = t_4$ 要同时成立, 这是不可能的.

致谢 感谢章璞老师向作者提出这个问题, 仔细验证计算结果, 并帮助修改论文. 感谢两位审稿专家仔细审理本文并提出许多宝贵的修改建议.

参考文献

- 1 Adachi T, Iyama O, Reiten I. τ -tilting theory. *Compos Math*, 2014, 150: 415–452

- 2 Aihara T. Tilting-connected symmetric algebras. *Algebr Represent Theory*, 2013, 16: 873–894
- 3 Aihara T, Iyama O. Silting mutation in triangulated categories. *J Lond Math Soc* (2), 2012, 85: 633–668
- 4 Assem I, Simson D, Skowroński A. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1. *Techniques of Representation Theory*. London Mathematical Society Student Texts, vol. 65. Cambridge: Cambridge University Press, 2006
- 5 Auslander M, Platzeck M I, Reiten I. Coxeter functors without diagrams. *Trans Amer Math Soc*, 1979, 250: 1–46
- 6 Bernstein I N, Gel'fand I M, Ponomarev V A. Coxeter functors and Gabriel's theorem. *Russian Math Surveys*, 1973, 28: 17–32
- 7 Brenner S, Butler M C R. Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors. In: *Representation Theory, II. Lecture Notes in Mathematics*, vol. 832. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980, 103–169
- 8 Chen W Z, Zhang P. Support τ -tilting modules and separating splitting tilting triples. *Comm Algebra*, 2021, 49: 5297–5321
- 9 Cline E, Parshall B, Scott L L. Derived categories and Morita theory. *J Algebra*, 1986, 104: 397–409
- 10 Happel D. *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 119. Cambridge-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney: Cambridge University Press, 1988
- 11 Happel D, Ringel C M. Tilted algebras. *Trans Amer Math Soc*, 1982, 274: 399–443
- 12 Hügel L A. Silting objects. *Bull Lond Math Soc*, 2019, 51: 658–690
- 13 Iyama O, Jørgensen P, Yang D. Intermediate co- t -structures, two-term silting objects, τ -tilting modules, and torsion classes. *Algebra Number Theory*, 2014, 8: 2413–2431
- 14 Keller B, Vossieck D. Aisles in derived categories. *Bull Soc Math Belg*, 1988, 40: 239–253
- 15 Koenig S, Yang D. Silting objects, simple-minded collections, t -structures and co- t -structures for finite-dimensional algebras. *Doc Math*, 2014, 19: 403–438
- 16 Liu H J, Liu L M. Complements of partial silting objects in triangulated categories (in Chinese). *J ShanDong Univ Nat Sci*, 2019, 54: 67–71 [刘宏锦, 刘利敏. 三角范畴偏 silting 对象的补. *山东大学学报 (理学版)*, 2019, 54: 67–71]
- 17 Miyashita Y. Tilting modules of finite projective dimension. *Math Z*, 1986, 193: 113–146
- 18 Rickard J. Morita theory for derived categories. *J Lond Math Soc* (2), 1989, 39: 436–456
- 19 Rickard J, Schofield A. Cocovers and tilting modules. *Math Proc Cambridge Philos Soc*, 1989, 106: 1–5
- 20 Wei J Q. Semi-tilting complexes. *Israel J Math*, 2013, 194: 871–893
- 21 Wei J Q. Silting complexes and partial tilting modules. *Mathematics*, 2020, 8: 1736
- 22 Xu J D, Yang Y C. A Bongartz-type lemma for silting complexes over a hereditary algebra. *Arch Math*, 2020, 114: 383–389
- 23 Zhang P. *Triangulated Categories and Derived Categories* (in Chinese). Beijing: Science Press, 2015 [章璞. 三角范畴与导出范畴. 北京: 科学出版社, 2015]
- 24 Zhou P Y, Zhu B. Two-term relative cluster tilting subcategories, τ -tilting modules and silting subcategories. *J Pure Appl Algebra*, 2020, 224: 106365

Silting objects in bounded derived categories of path algebras of quivers of the types A_n and D_n

Weizhao Chen

Abstract It is a basic and difficult problem to find all the silting objects of a triangulated category. In the case where A is a path algebra of quivers of the type A_n , this paper gives rules of determining all the silting objects of the bounded derived category $D^b(A)$, by which we can find all the silting objects of $D^b(A)$ by complicated calculations when n is given. We describe these rules by using the indecomposable two-term presilting objects in $K^b(\text{proj } A)$. For a path algebra of quivers of the type D_n , we do some similar research.

Keywords silting object, presilting object, bounded derived category, quiver of the type A_n , quiver of the type D_n

MSC(2020) 16E05, 16E35, 18G80

doi: 10.1360/SSM-2021-0190