



平坦环面上带奇异点的 $SU(3)$ Toda 方程组

陈志杰^{1,2}

1. 清华大学丘成桐数学科学中心, 北京 100084;

2. 清华大学数学科学系, 北京 100084

E-mail: zjchen2016@tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2022-12-21; 接受日期: 2023-05-08; 网络出版日期: 2023-05-29

国家自然科学基金 (批准号: 12222109 和 12071240) 资助项目

摘要 本文简要介绍关于平坦环面上的 $SU(3)$ Toda 方程组的最新研究进展, 例如, 对非临界情形, 可以给出解的个数的最佳估计; 并介绍一些尚未解决的有挑战性的公开问题.

关键词 Toda 方程组 解的个数 3 阶线性常微分方程

MSC (2020) 主题分类 35J47, 35B44

1 引言

本文简要介绍关于 $SU(3)$ Toda 方程组的最新研究进展. 先定义一些重要的记号: $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \tau$, $\omega_3 = 1 + \tau$, $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, 其中 $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \tau > 0\}$. 用 $E_\tau := \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ 表示以 1 和 τ 张成的平坦环面, 用 $E_\tau[2] := \{\frac{\omega_k}{2} \mid k = 0, 1, 2, 3\} + \Lambda_\tau$ 表示平坦环面 E_τ 的格点和半周期点. 本文研究平坦环面 E_τ 上带任意多个奇异点的 $SU(3)$ Toda 方程组

$$\begin{cases} \Delta u + 2e^u - e^v = 4\pi \sum_{k=0}^m n_{1,k} \delta_{p_k}, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \Delta v + 2e^v - e^u = 4\pi \sum_{k=0}^m n_{2,k} \delta_{p_k}, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $m \geq 0$, $p_0, p_1, \dots, p_m$ 是 E_τ 上 $m+1$ 个不同的点, δ_{p_k} 表示在点 p_k 处的 Dirac 测度, $n_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对于所有的 j 和 k 成立且 $\sum_{j,k} n_{j,k} \geq 1$. 为了方便, 这里用复变量 $z = z_1 + iz_2$, 则 Laplace 算子 $\Delta = 4\partial_{z\bar{z}}$.

该 $SU(3)$ Toda 方程组 (1.1) 以及更一般的 $SU(N+1)$ Toda 方程组与代数几何中经典的 Plücker 公式密切相关 (参见文献 [18]), 详细的介绍参见文献 [27, 28]. 另外, 定义

$$\mathcal{N}_j := \sum_{k=0}^m n_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

英文引用格式: Chen Z J. Singular $SU(3)$ Toda systems on the flat tori (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1067–1084, doi: 10.1360/SSM-2022-0248

则在 (1.1) 两边积分得到

$$\int_{E_\tau} e^u = 4\pi \frac{2\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{3}, \quad \int_{E_\tau} e^v = 4\pi \frac{\mathcal{N}_1 + 2\mathcal{N}_2}{3}.$$

所以 SU(3) Toda 方程组 (1.1) 可以改写成

$$\begin{cases} \Delta u + 2\rho_1 \left(\frac{e^u}{\int e^u} - \frac{1}{|E_\tau|} \right) - \rho_2 \left(\frac{e^v}{\int e^v} - \frac{1}{|E_\tau|} \right) = 4\pi \sum_{k=0}^m n_{1,k} \left(\delta_{p_k} - \frac{1}{|E_\tau|} \right), & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \Delta v + 2\rho_2 \left(\frac{e^v}{\int e^v} - \frac{1}{|E_\tau|} \right) - \rho_1 \left(\frac{e^u}{\int e^u} - \frac{1}{|E_\tau|} \right) = 4\pi \sum_{k=0}^m n_{2,k} \left(\delta_{p_k} - \frac{1}{|E_\tau|} \right), & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \text{其中 } \rho_1 = 4\pi \frac{2\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{3} > 0, \quad \rho_2 = 4\pi \frac{\mathcal{N}_1 + 2\mathcal{N}_2}{3} > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

这是下面这个定义在紧 Riemann 面 Σ 上的平均场形式的 SU(3) Toda 方程组的特例:

$$\begin{cases} \Delta u + 2\rho_1 \left(\frac{h_1 e^u}{\int_\Sigma h_1 e^u} - \frac{1}{|\Sigma|} \right) - \rho_2 \left(\frac{h_2 e^v}{\int_\Sigma h_2 e^v} - \frac{1}{|\Sigma|} \right) = 4\pi \sum_{k=0}^m \alpha_{1,k} \left(\delta_{p_k} - \frac{1}{|\Sigma|} \right), \\ \Delta v + 2\rho_2 \left(\frac{h_2 e^v}{\int_\Sigma h_2 e^v} - \frac{1}{|\Sigma|} \right) - \rho_1 \left(\frac{h_1 e^u}{\int_\Sigma h_1 e^u} - \frac{1}{|\Sigma|} \right) = 4\pi \sum_{k=0}^m \alpha_{2,k} \left(\delta_{p_k} - \frac{1}{|\Sigma|} \right), \end{cases} \quad (1.4)$$

其中, $|\Sigma|$ 表示 Riemann 面 Σ 的面积, h_1 和 h_2 是 Riemann 面 Σ 上正的光滑函数, 而参数 $\alpha_{j,k} > -1$ 对于任意 j 和 k 成立. 方程组 (1.4) 来源于几何和物理的问题. 从几何的角度看, Toda 方程组 (1.4) 与 $\mathbb{CP}^2$ 中的全纯曲线和 SU(3) 平坦联络等有着密切的联系 (参见文献 [5, 6, 12, 19, 24, 28]). 而在数学物理中, 它则与描述高温超导现象的非交换 Chern-Simons 理论有关 (参见文献 [8, 13–15, 30, 37, 38, 40]). 这时, 方程组右端的奇异点分别表示复曲线的分歧点和波函数的涡旋.

对于 Toda 方程组 (1.4), 解的存在性是非常困难的问题, 在过去二十多年得到了广泛研究, 如文献 [2–4, 21, 23, 31–33] 和它们引用的参考文献. 这些文献都是用变分法或者拓扑度方法来研究解的存在性, 无论是哪种方法在证明中都需要用到解的先验估计. 注意到由于方程组右端有奇异点, 方程组的解在奇异点附近是趋于无穷的, 所以先验估计指的是在远离奇异点的地方解是一致有界的, 即对于任意给定的紧集 $K \Subset \Sigma \setminus \{p_k\}_{k=0}^m$, 存在与解无关的参数 C 使得

$$\|u\|_{L^\infty(K)} + \|v\|_{L^\infty(K)} \leq C$$

对于任意解 (u, v) 成立. 由于先验估计的重要性, 所以给出如下定义.

定义 1.1 给定参数 $\alpha_{j,k}$, 如果解的先验估计成立, 则称参数 (ρ_1, ρ_2) 是非临界参数; 如果解的先验估计不成立, 则称参数 (ρ_1, ρ_2) 是临界参数.

对于一般的 $\alpha_{j,k}$, 非临界参数的集合描述起来比较复杂. 本文只考虑如下特殊情形:

$$\alpha_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ 对于任意 } j \text{ 和 } k \text{ 成立.}$$

对这种特殊情形, 通过研究 (1.4) 的解的爆破行为, 文献 [27, 29] 证明了, 当 $\rho_1, \rho_2 \notin 4\pi\mathbb{N}$ 时, 参数 (ρ_1, ρ_2) 是非临界的, 即如下结论成立.

定理 A [27, 29] 设 $\alpha_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对于任意 j 和 k 成立, 并令 $K \Subset \Sigma \setminus \{p_k\}_{k=0}^m$ 是任意给定的紧集. 如果 $\rho_1, \rho_2 \notin 4\pi\mathbb{N}$, 则存在一致的常数 $C = C(K, \rho_1, \rho_2)$ 使得, 对 (1.4) 的任意解 (u, v) , 成立

$$|u(z)| + |v(z)| \leq C, \quad \forall z \in K. \quad (1.5)$$

利用定理 A 建立的先验估计, 文献 [3] 用变分法证明了如下有趣的结果.

定理 B ^[3] 设 $\alpha_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对于任意 j 和 k 成立. 如果 Riemann 面 Σ 的亏格是正的且 $\rho_1, \rho_2 \notin 4\pi\mathbb{N}$, 则方程组 (1.4) 永远有解.

注意到, 对于 Toda 方程组 (1.1) 或等价的方程组 (1.3), 有

$$\rho_1 = 4\pi \frac{2\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{3} > 0, \quad \rho_2 = 4\pi \frac{\mathcal{N}_1 + 2\mathcal{N}_2}{3} > 0,$$

即

$$\rho_1, \rho_2 \notin 4\pi\mathbb{N} \text{ 当且仅当 } \mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}.$$

所以从定理 B 可以得到如下结论.

定理 C 设 $n_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对于所有 j 和 k 成立且 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$, 则 Toda 方程组 (1.1) 永远有解.

对非临界情形, 定理 C 表明方程组 (1.1) 永远有解. 一个自然但是非常困难的问题是, 方程组 (1.1) 是否只有有限多个解? 对一般的椭圆偏微分方程, 即使先验估计成立也不能保证解的个数是有限的. 一个经典的例子是

$$-\Delta u + u = u^p, \quad u > 0, \quad \text{在 } \mathbb{R}^N \text{ 上}, \quad (1.6)$$

其中 $1 < p < \frac{N+2}{(N-2)_+}$ 是 Sobolev 次临界的, 此时正解的先验估计成立, 但是由平移不变性知方程 (1.6) 的正解组成的集合是 N 维的, 即正解的个数是无限的.

对于非临界情形的 Toda 方程组 (1.1), 我们相信解的个数是有限的, 但是从分析和偏微分方程的角度来看, 这是非常困难的问题, 没有什么方法可以借鉴. Chen ^[10] 发现可以用代数几何中的 Bézout 定理来研究这个问题, 从而不仅可以证明解的个数是有限的, 还可以给出解的个数的最佳上界估计. 第 2 节介绍这方面的主要结果和遗留的一些公开问题.

另外, 注意到对临界情形 $\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$, 由于先验估计不成立, 变分法和拓扑度方法都不再适用, 到目前为止还没有任何解的存在性结果. 最近, 文献 [11] 首次研究了临界情形的 Toda 方程组 (1.1), 并得到了解的存在性和爆破行为等结果. 第 3 节介绍这些结果和遗留的一些公开问题. 第 4 节简要介绍本文的主要方法.

2 非临界情形

考虑非临界情形的 Toda 方程组 (1.1), 假设 $n_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对于所有 j 和 k 成立且 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$. 如下定理给出了解个数的上界估计.

定理 2.1 ^[10] 设 $n_{j,k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 对于所有 j 和 k 成立且 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$, 则 Toda 方程组 (1.1) 最多有

$$N(\{n_{1,k}\}_k, \{n_{2,k}\}_k) := \frac{1}{3 \times 2^{m+1}} \prod_{k=0}^m (n_{1,k} + 1)(n_{2,k} + 1)(n_{1,k} + n_{2,k} + 2)$$

个解.

注意到 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$, 说明存在 k_0 使得 $n_{1,k_0} \not\equiv n_{2,k_0} \pmod{3}$, 即 $\{n_{1,k_0} + 1, n_{2,k_0} + 1, n_{1,k_0} + n_{2,k_0} + 2\}$ 这 3 个数中恰好有一个是 3 的倍数, 从而

$$6 \mid (n_{1,k_0} + 1)(n_{2,k_0} + 1)(n_{1,k_0} + n_{2,k_0} + 2).$$

再由

$$2 \mid (n_{1,k} + 1)(n_{2,k} + 1)(n_{1,k} + n_{2,k} + 2), \quad \forall k,$$

可知 $N(\{n_{1,k}\}_k, \{n_{2,k}\}_k) \in \mathbb{N}$.

定理 2.1 不仅说明了解的个数是有限的, 而且给出了解的个数的显式的上界估计. 更有趣的是, 下面有例子 (参见猜想 2.3、定理 2.4 和 2.5) 表明这个上界应该是最佳的. 另外, 在分析中, 拓扑度是与解的个数有着密切联系的数学概念. 对于 Toda 方程组 (1.1), 由于解的先验估计成立, 所以它的拓扑度是有定义的 (参见文献 [23]). 一个自然的问题是, 拓扑度等于多少? 这也是非常困难的问题. 我们提出如下的猜想.

猜想 2.1 在定理 2.1 的假设下, Toda 方程组 (1.1) 的拓扑度等于 $N(\{n_{1,k}\}_k, \{n_{2,k}\}_k)$.

接下来考虑 Toda 方程组 (1.1) 只在环面的格点和半周期有奇异性的情形 (即 $m = 3$ 且 $p_k = \frac{\omega_k}{2}$):

$$\begin{cases} \Delta u + 2e^u - e^v = 4\pi \sum_{k=0}^3 n_{1,k} \delta_{\frac{\omega_k}{2}}, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \Delta v + 2e^v - e^u = 4\pi \sum_{k=0}^3 n_{2,k} \delta_{\frac{\omega_k}{2}}, & \text{在 } E_\tau \text{ 上.} \end{cases} \quad (2.1)$$

此时, 方程组 (2.1) 的一个有趣性质是, 如果 $(u(z), v(z))$ 是解, 则 $(u(-z), v(-z))$ 也是解. 所以一个自然的问题是:

问题 2.1 方程组 (2.1) 有偶函数的解 (即 $(u(z), v(z)) = (u(-z), v(-z))$) 吗?

乍看起来这个问题似乎简单: 只要将方程组对应的变分泛函限制在由偶函数构成的 Sobolev 子空间上并应用文献 [3] 中的变分法的讨论, 应该就能得到偶函数解的存在性. 但实际上文献 [3] 中的方法并不能得到偶函数解, 所以这个问题比想象中的更复杂. 事实上, 本文将证明对某些情形方程组 (2.1) 并不存在偶函数的解.

定理 2.2 ^[10] (偶函数解的不存在性) 设 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$. 如果对某个 $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $n_{1,k}$ 和 $n_{2,k}$ 都是奇数, 则 Toda 方程组 (2.1) 没有偶函数的解.

定理 C 中得到的解不是偶的, 从而方程组 (2.1) 至少有两个解.

接下来再考虑当 $k = 1, 2, 3$ 时 $n_{i,k} = 0$ 的特殊情形, 即 Toda 方程组只带一个奇异点:

$$\begin{cases} \Delta u + 2e^u - e^v = 4\pi n_1 \delta_0, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \Delta v + 2e^v - e^u = 4\pi n_2 \delta_0, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \end{cases} \quad (2.2)$$

其中 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足非临界条件 $n_1 \not\equiv n_2 \pmod{3}$. 另外, 不失一般性可以假设 $n_1 < n_2$. 则定理 2.2 证明了当 n_1 和 n_2 都是奇数时方程组 (2.2) 没有偶函数的解. 下面的结果则表明当 n_1 和 n_2 中至少有一个是偶数时, 方程组 (2.2) 有偶函数的解. 注意到在这种情形下, $\{n_1 + 1, n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2\}$ 这 3 个数中有唯一的偶数, 记为

$$2N_e := \{n_1 + 1, n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2\} \text{ 中唯一的偶数.} \quad (2.3)$$

则当 $n_i = 1$ 对某个 i 成立时, $N_e = 1$.

定理 2.3 ^[10] (偶函数解的存在性) 设 $n_1 \not\equiv n_2 \pmod{3}$, $n_1 < n_2$ 且 n_1 和 n_2 中至少有一个是偶数, 并令 N_e 为 (2.3) 中定义的数. 则如下结论成立.

(i) 方程组 (2.2) 永远有偶函数的解, 且偶函数解的个数至多为 N_e .

(ii) 当 $n_i = 1$ 对某个 i 成立时, 偶函数的解是唯一的.

(iii) 如果进一步有如下条件之一成立:

(1) n_1 是奇数, 即 $N_e = \frac{n_1+1}{2}$;

(2) n_2 是奇数 (即 $N_e = \frac{n_2+1}{2}$) 且 $n_2 - n_1 \in \{1, 5\}$;

(3) n_1 是偶数且 $n_2 = n_1 + 2$, 即 $N_e = \frac{n_1+n_2+2}{2} = n_1 + 2$,

则在模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的意义下, 除有限多个 τ 之外, 方程组 (2.2) 的偶函数的解的个数恰好是 N_e .

这里, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

作用在 τ 上指的是 Mobius 变换

$$A \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

而 $\tilde{\tau} \equiv \tau$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 指的是 $\tilde{\tau} = A \cdot \tau$ 对某个 $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ 成立. 众所周知, 这时候这两个平坦环面 E_τ 和 $E_{\tilde{\tau}}$ 是共形等价的. 我们相信不需要额外的假设 (1)–(3), 定理 2.3(iii) 的结论依然是对的, 即如下猜想.

猜想 2.2 设 $n_1 \not\equiv n_2 \pmod{3}$, $n_1 < n_2$ 且 n_1 和 n_2 中至少有一个是偶数, 并令 N_e 为 (2.3) 中定义的数. 则在模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的意义下, 除有限多个 τ 之外, 方程组 (2.2) 的偶函数的解的个数恰好是 N_e .

另外, 我们提出如下的猜想.

猜想 2.3 设 $n_1 \not\equiv n_2 \pmod{3}$. 则在模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的意义下, 除有限多个 τ 之外, 方程组 (2.2) 恰好有

$$N(n_1, n_2) = \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_1 + n_2 + 2)}{6}$$

个解.

猜想 2.4 设 $n_1 \not\equiv n_2 \pmod{3}$. 则在模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的意义下, 除有限多个 τ 之外, 方程组 (2.2) 的任何解都是非退化的.

在定理 2.3 的假设下直接计算得到

$$N(n_1, n_2) > N_e \text{ 除非 } (n_1, n_2) \in \{(0, 1), (0, 2)\}.$$

这似乎表明, 当 $(n_1, n_2) \in \{(0, 1), (0, 2)\}$ 时, 方程组 (2.2) 只有偶函数的解, 但是对其他的 (n_1, n_2) , 偶函数的解和非偶函数的解应该对几乎所有的 τ 同时存在. 下面的结果证明了这些断言, 并且对特殊的 (n_1, n_2) 证明了猜想 2.3. 为此, 引进以 $\omega_1 = 1$ 和 $\omega_2 = \tau$ 为基本双周期的 Weierstrass $\wp$ -函数 $\wp(z) = \wp(z; \tau)$, 且令 $g_2 = g_2(\tau)$ 和 $g_3 = g_3(\tau)$ 为椭圆曲线 E_τ 著名的不变量, 它们满足方程式

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3.$$

众所周知, $g_2(\tau) = 0$ 当且仅当 $\tau \equiv e^{\pi i/3}$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$, 而 $g_3(\tau) = 0$ 当且仅当 $\tau \equiv i = \sqrt{-1}$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$.

定理 2.4 ^[10] (1) 若 $(n_1, n_2) = (0, 1)$, 则方程组 (2.2) 有唯一的解, 从而是偶函数的解.

(2) 若 $(n_1, n_2) = (0, 2)$, 则当 $\tau \equiv e^{\pi i/3}$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 时, 方程组 (2.2) 有唯一的解, 从而也是偶函数的解; 对其他所有的 τ , 方程组 (2.2) 恰好有 2 个解, 且它们都是偶函数的解.

定理 2.5 ^[10] 令 $(n_1, n_2) = (0, 4)$. 注意到模形式 $343g_2^3 - 6561g_3^2$ 在模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的意义下有唯一的零点 τ_0 . 则如下结论成立:

- (1) 当 $\tau \equiv i$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 时, 方程组 (2.2) 恰好有 3 个解, 且它们都是偶函数的解;
- (2) 当 $\tau \equiv \tau_0$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 时, 方程组 (2.2) 恰好有 4 个解, 其中有 2 个是偶函数的解, 另外 2 个不是;
- (3) 当 $\tau \not\equiv i, \tau_0$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 时, 方程组 (2.2) 恰好有 5 个解, 其中有 3 个是偶函数的解, 另外 2 个不是.

定理 2.4 和 2.5 对 $(n_1, n_2) \in \{(0, 1), (0, 2), (0, 4)\}$ 的情形证明了猜想 2.3. 在定理 2.5 中, 当 $\tau \rightarrow \tau_0$ 时, 两个不同的偶函数解收敛到同一个退化的偶函数解: 当 $\tau \rightarrow i$ 时, 3 个不同的解 (即两个非偶函数的解和一个偶函数的解) 同时收敛到同一个退化的偶函数解.

3 临界情形

现在考虑临界情形 $\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$. 此时由于先验估计不成立, 变分法和拓扑度方法都不再适用, 到目前为止还没有任何解的存在性结果. 由于临界情形太过复杂, 所以只考虑最简单的情形, 即右端只带一个奇异点的方程组 (2.2), 此时临界情形为 $n_1 \equiv n_2 \pmod{3}$. 所以不失一般性, 可以假设

$$(n_1, n_2) = (n, n + 3l), \quad n, l \in \mathbb{N}, \quad n + l \geq 1, \quad (3.1)$$

即

$$\begin{cases} \Delta u + 2e^u - e^v = 4\pi n \delta_0, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \Delta v + 2e^v - e^u = 4\pi(n + 3l) \delta_0, & \text{在 } E_\tau \text{ 上.} \end{cases} \quad (3.2)$$

与上一节的非临界情形不同, 我们将看到解的存在性变得非常复杂: 偶函数的解是否存在不仅依赖于 (n, l) 的选取, 而且还依赖于环面 E_τ 的几何性质 (即依赖于周期 τ 的选取, 这种现象在平均场方程的情形也会发生, 参见文献 [25]); 另外, 一旦存在偶函数的解就存在无穷多个偶函数的解并且会有爆破现象发生. 这些都是与非临界的情形不一样的现象.

如下定理考虑的是 n 和 l 都是奇数的情形.

定理 3.1 ^[11] (偶函数解的不存在性) 设 n 和 l 都是正的奇数, 则 Toda 方程组 (3.2) 没有偶函数的解.

当 $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$, 即平坦环面 E_τ 的基本域是长方形时, 如果 $(u(z), v(z))$ 是方程组 (3.2) 的解, 则 $(u(\bar{z}), v(\bar{z}))$ 也是方程组 (3.2) 的解, 其中 $\bar{z} = z_1 - iz_2$ 表示 $z = z_1 + iz_2$ 的共轭复数.

定义 3.1 如果解 $(u(z), v(z))$ 关于 z_1 -轴对称, 即

$$u(z) = u(\bar{z}), \quad v(z) = v(\bar{z}),$$

则称它是轴对称的. 显然一个偶函数的轴对称解关于 z_1 -轴和 z_2 -轴都是轴对称的.

对 $a \in \mathbb{R}$, 定义

$$\lceil a \rceil := \min\{b \in \mathbb{Z} \mid b \geq a\},$$

即当 a 是整数时, $\lceil a \rceil = a$; 当 a 不是整数时, $\lceil a \rceil - 1 < a < \lceil a \rceil$. 我们的第二个结果如下.

定理 3.2 ^[11] (偶函数解的存在性和轴对称性) 设 n 是奇数而 l 是偶数, 则方程组 (3.2) 永远有偶函数的解.

(i) 如果 (u, v) 是一个偶函数的解, 则方程组 (3.2) 存在唯一的一个带 2- 参数的偶函数解的解族 $(u_{\lambda, \mu}, v_{\lambda, \mu})$, 其中参数 $\lambda, \mu > 0$ 可以任意取值, 使得 $(u, v) \in \{(u_{\lambda, \mu}, v_{\lambda, \mu}) : \lambda, \mu > 0\}$.

(ii) 方程组 (3.2) 至多有 $\frac{n+1}{2}$ 个带 2- 参数的偶函数解的解族. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 方程组 (3.2) 有唯一的带 2- 参数的偶函数解的解族.

(iii) 在模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 的意义下, 除 $\lceil \frac{n^2-1}{24} \rceil$ 个 τ 之外, 带 2- 参数的偶函数解的解族的个数恰好是 $\frac{n+1}{2}$. 特别地, 这个结论对于任意

$$\tau \in \Pi := \left\{ \frac{a\tilde{\tau} + b}{c\tilde{\tau} + d} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \tilde{\tau} \in i\mathbb{R}_{>0} \right\} \quad (3.3)$$

都成立, 即对任何与长方形环面共形等价的环面都成立.

(iv) 如果 $\tau \in i\mathbb{R}_{>0}$, 则所有的偶函数解都是轴对称的.

注 3.1 据我们所知, 在文献中还没有任何关于亏格为正的紧 Riemann 面上带临界参数的 $SU(3)$ Toda 方程组的解的存在性结果. 定理 3.2 给出了第一个这方面的结果. 与第 2 节的非临界情形的结果相比, 这里得到了无穷多个偶函数解的存在性结果, 所以临界情形解的结构与非临界情形解的结构是完全不同的.

对长方形环面的情形, 令人吃惊的是所有这些偶函数的解都是轴对称的. 众所周知, 椭圆偏微分方程解的对称性一般是用移动平面法证明的. 但是移动平面法不能用于 Toda 方程组, 文献 [11] 发展了新的技巧来证明这个对称性的结果.

注 3.2 在定理 3.2 中一个有趣的现象是, 对几乎所有的 τ , 偶函数解的解族的个数 $\frac{n+1}{2}$ 不依赖于参数 l . 对于 $n = 3$ 和 $l \geq 0$ 为偶数的特殊情形, 由于 $\lceil \frac{3^2-1}{24} \rceil = 1$, 所以定理 3.2 的结论可以改进为: 如果 $\tau \neq e^{\pi i/3}$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$, 则方程组 (3.2) 恰好有两个带 2- 参数的偶函数解的解族, 但是当 $\tau \equiv e^{\pi i/3}$ 模 $SL(2, \mathbb{Z})$ 时, 方程组 (3.2) 只有唯一的偶函数解的解族.

另一个有趣的问题是, 研究当 $\lambda, \mu \rightarrow 0, \infty$ 时解 $(u_{\lambda, \mu}, v_{\lambda, \mu})$ 的渐近行为. 在这方面有如下的结果.

定理 3.3 [11] 采用定理 3.2 中的记号, 则当 $1 < \lambda \rightarrow +\infty$ 和 $\mu \rightarrow \mu_0 \in (0, \infty)$ 时, 有

(1)

$$e^{u_{\lambda, \mu}} \rightarrow \alpha_0 \delta_0 + 4\pi \sum_{p \in \mathcal{Z}_1} \delta_p \text{ 在测度的意义下弱收敛,} \quad (3.4)$$

其中 $\alpha_0 \in \{4\pi(n+1), 0\}$, 而 $\mathcal{Z}_1 = -\mathcal{Z}_1$ 满足 $\#\mathcal{Z}_1 = n + l - \frac{\alpha_0}{4\pi}$;

(2) $e^{v_{\lambda, \mu}} \rightarrow e^{v^*}$ 在 $C^2(E_\tau)$ 中收敛, 其中 v^* 是

$$\Delta v + 2e^v = [4\pi(n+3l) + \alpha_0]\delta_0 + 4\pi \sum_{p \in \mathcal{Z}_1} \delta_p, \text{ 在 } E_\tau \text{ 上}$$

的偶函数解.

定理 3.4 [11] 采用定理 3.2 中的记号, 则当 $1 > \lambda \rightarrow 0$ 和 $\mu \rightarrow \mu_0 \in (0, \infty)$ 时, 有

$$e^{v_{\lambda, \mu}} \rightarrow 4\pi \sum_{q \in \tilde{\mathcal{Z}}_3} \delta_q \text{ 在测度的意义下弱收敛,}$$

其中 $\tilde{\mathcal{Z}}_3 = -\tilde{\mathcal{Z}}_3 \subset E_\tau \setminus \{0\}$ 满足 $\#\tilde{\mathcal{Z}}_3 = n + 2l$. 另外, $e^{u_{\lambda, \mu}} \rightarrow e^{u^*}$ 在 $C^2(E_\tau)$ 中收敛, 其中 $u^*(z)$ 是

$$\Delta u + 2e^u = 4\pi n \delta_0 + 4\pi \sum_{q \in \tilde{\mathcal{Z}}_3} \delta_q, \text{ 在 } E_\tau \text{ 上}$$

的偶函数解.

定理 3.5 ^[11] 采用定理 3.2 中的记号, 则当 $1 < \lambda \rightarrow +\infty$, $1 < \mu \rightarrow +\infty$, $1 < \frac{\lambda}{\mu} \rightarrow +\infty$ 时, 对分量 $u_{\lambda,\mu}$, 定理 3.3(1) 成立. 另外,

$$e^{v_{\lambda,\mu}} \rightarrow 4\pi \sum_{q \in \tilde{\mathcal{Z}}_1} \delta_q \text{ 在测度的意义下弱收敛,} \quad (3.5)$$

其中 $\tilde{\mathcal{Z}}_1 = -\tilde{\mathcal{Z}}_1$ 满足 $\#\tilde{\mathcal{Z}}_1 = n + 2l$ 且 $\mathcal{Z}_1 \cap \tilde{\mathcal{Z}}_1 = \emptyset$. 换言之, $u_{\lambda,\mu}$ 和 $v_{\lambda,\mu}$ 都爆破但是它们没有共同的爆破点.

最后一种情形是, n 是偶数. 这是最复杂的情形, 不能期望得到类似于定理 3.1 和 3.2 那样的一般的偶函数解不存在性或存在性结果, 如下面的定理 3.7 和推论 3.1, 偶函数解是否存在会依赖于环面 E_τ 的几何性质. 首先给出偶函数解的结构刻画.

定理 3.6 ^[11] 设 $n \geq 0$ 是偶数, $l \in \mathbb{N}$ 且 $n + l \geq 1$. 假设 (u, v) 是方程组 (3.2) 的偶函数解, 则 (3.2) 存在唯一的一个带 2- 参数的解的解族 $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ 使得 $(u, v) \in \{(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu}) : \lambda, \mu > 0\}$. 另外, $(u_{\lambda,\mu}, v_{\lambda,\mu})$ 是偶函数解当且仅当 $\mu = 1$, 即在这个带 2- 参数的解的解族中, 存在唯一的一个带 1- 参数的偶函数解的解族 $(u_{\lambda,1}, v_{\lambda,1})$.

定理 3.6 表明, 如果偶函数解存在, 则偶函数解的解空间的维数是一维的, 这是与 n 是奇数且 l 是偶数的情形不同的地方. 另外, 也可以研究当 $\lambda \rightarrow 0, \infty$ 时偶函数解 $(u_{\lambda,1}, v_{\lambda,1})$ 的渐近行为. 与定理 3.3 和 3.4 类似, 可以证明解的一个分量爆破而另一个分量收敛, 且极限满足如下形式的平均场方程:

$$\Delta u + 2e^u = 4\pi m_1 \delta_0 + 4\pi \sum_{j=1}^{m_2} \delta_{p_j}, \quad \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \quad (3.6)$$

其中 m_1 和 m_2 是由 (n, l) 决定的整数 (参见文献 [11]). 这个爆破现象表明 Toda 方程组的偶函数解可以用某类平均场方程的偶函数解来构造. 下面是一个有趣的例子.

定理 3.7 ^[11] 设 $n \geq 0$ 是偶数且 $l = 1$. 则方程组 (3.2) 的带 1- 参数的偶函数解的解族的个数等于平均场方程

$$\Delta u + e^u = 8\pi(n+2)\delta_0, \quad \text{在 } E_\tau \text{ 上} \quad (3.7)$$

的偶函数解的个数.

更确切地, 如果 $u(z)$ 是方程 (3.7) 的一个偶函数的解, 则方程组 (3.2) 存在一个带 1- 参数的偶函数的解族 $(u_{\lambda,1}, v_{\lambda,1})$ 使得当 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时, $u_{\lambda,1}$ 在奇异点 0 爆破且

$$e^{u_{\lambda,1}} \rightarrow 4\pi(n+1)\delta_0 \text{ 在测度的意义下弱收敛,}$$

而 $e^{v_{\lambda,1}} \rightarrow \frac{1}{2}e^u$ 在 $C^2(E_\tau)$ 中收敛.

注 3.3 平均场方程 (3.7) 或者更一般的 (3.6) 也来源于几何和物理的问题, 已经得到了广泛研究. 本文研究这个带临界参数的 SU(3) Toda 方程组的一个动机就是来源于平均场方程

$$\Delta u + e^u = 4\pi n \delta_0, \quad \text{在 } E_\tau \text{ 上, } n \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \quad (3.8)$$

文献 [7, 9, 16, 25, 26] 研究了 this 方程. 对于 (3.8), 先验估计成立当且仅当 n 是奇数, 所以临界情形为

$$\Delta u + e^u = 8\pi m \delta_0, \quad \text{在 } E_\tau \text{ 上, } m \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \quad (3.9)$$

文献 [25, 26] 证明了 (3.9) 是否存在偶函数解本质上依赖于环面 E_τ 的几何性质. 定义

$$\Omega_m := \{\tau \in \mathbb{H} \mid (3.9) \text{ 有偶函数解}\}. \quad (3.10)$$

定理 3.8 ^[9, 26] 任意固定 $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, 则 $\Omega_m \neq \emptyset$ 且 $\Omega_m \neq \mathbb{H}$. 特别地, $\Omega_m \cap \Pi = \emptyset$, 其中 Π 的定义参见 (3.3).

注意到文献 [9] 证明了比 $\Omega_m \cap \Pi = \emptyset$ 更强的结论: 只要 $\tau \in \Pi$, 则方程 (3.9) 没有解 (即不仅仅是没有偶函数解).

本文将临界平均场方程 (3.9) 的结果与本文得到的临界 SU(3) Toda 方程组 (3.2) 的结果定理 3.1–3.6 进行对比, 发现对方程组情形出现了新的现象: 定义

$$\Omega_{n,l} := \{\tau \in \mathbb{H} \mid (3.2) \text{ 有偶函数的解}\},$$

则当 n 和 l 都是奇数时, $\Omega_{n,l} = \emptyset$; 当 n 是奇数 l 是偶数时, $\Omega_{n,l} = \mathbb{H}$. 这种结果对临界平均场方程 (3.9) 不成立. 这为如下事实提供了一个很有力的证据: 与单个方程相比, 方程组解的结构更加丰富和复杂.

注意到 (3.7) 与 $m = n+2$ 的 (3.9) 是同一个方程. 注 3.3 表明定理 3.7 对 n 是奇数时不成立, 因为当 n 是奇数时, 定理 3.1 证明了方程组 (3.2) 永远没有偶函数的解, 但是平均场方程 (3.7) 对 $\tau \in \Omega_{n+2}$ 时有偶函数的解. 我们有如下推论.

推论 3.1 ^[11] 设 $n \geq 0$ 是偶数且 $l = 1$. 则 $\Omega_{n,1} = \Omega_{n+2} \neq \emptyset$, $\Omega_{n,1} \neq \mathbb{H}$ 且 $\Omega_{n,1} \cap \Pi = \emptyset$, 即当 $\tau \in \Pi$ 时, 方程组 (3.2) 没有偶函数的解; 但是当 $\tau \in \Omega_{n,1}$ 时, 方程组 (3.2) 确实有带 1- 参数的偶函数解的解族.

另一个有趣的特殊情形是 $l = 0$, 即 $n_1 = n_2 = n$. 此时方程组 (3.2) 关于 u 和 v 是对称的, 即如果 (u, v) 是解, 则 (v, u) 也是. 特别地, 令 $u = v$, 则可得到平均场方程 (3.8). 下面的结果说明方程组 (3.2) 的所有偶函数解都可以用平均场方程 (3.8) 的偶函数解来构造.

定理 3.9 ^[11] 令 $l = 0$, 即 $n_1 = n_2 = n \in \mathbb{N}$.

(1) 设 n 是奇数. 如果 (u, v) 是方程组 (3.2) 的偶函数解, 则它属于唯一的一个带 2- 参数的偶函数解的解族 $(u_{\lambda, \mu}, v_{\lambda, \mu})$, 且存在唯一的一对 (λ_0, μ_0) 使得 $u_{\lambda_0, \mu_0} = v_{\lambda_0, \mu_0}$, 即 u_{λ_0, μ_0} 是 (3.8) 的偶函数解.

(2) 设 n 是偶数. 如果 (u, v) 是方程组 (3.2) 的偶函数解, 则它属于唯一的一个带 1- 参数的偶函数解的解族 $(u_{\lambda, 1}, v_{\lambda, 1})$, 且存在唯一的 λ_0 使得 $u_{\lambda_0, 1} = v_{\lambda_0, 1}$, 即 $u_{\lambda_0, 1}$ 是 (3.8) 的偶函数解. 所以, 当 $\tau \in \Pi$ 时, 方程组 (3.2) 没有偶函数的解.

受推论 3.1 和定理 3.9(2) 启发, 本文提出如下的猜想.

猜想 3.1 设 $n \geq 0$ 是偶数且 $l \geq 2$. 则当 $\tau \in \Pi$ 时, 方程组 (3.2) 没有偶函数的解.

有趣的是, 上面这些平坦环面的结果可以应用到平面上的情形, 即应用到如下的平面上带 4 个奇异点的 SU(3) Toda 方程组:

$$\begin{cases} \Delta_x \hat{u} + 2e^{\hat{u}} - e^{\hat{v}} = 2\pi((n_1 - 1)\delta_0 - \delta_1 - \delta_t), & \text{在 } \mathbb{R}^2 \text{ 上,} \\ \Delta_x \hat{v} + 2e^{\hat{v}} - e^{\hat{u}} = 2\pi((n_2 - 1)\delta_0 - \delta_1 - \delta_t), & \text{在 } \mathbb{R}^2 \text{ 上,} \\ \hat{u}(x) = -3\ln|x| + O(1), & \text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ \hat{v}(x) = -3\ln|x| + O(1), & \text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时,} \end{cases} \quad (3.11)$$

其中 $t \notin \{0, 1\}$, $x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ 且对应的 Laplace 算子

$$\Delta_x = \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} = 4\partial_{x\bar{x}}.$$

定理 3.10 ^[11] 设 $t \notin \{0, 1\}$, $(n_1, n_2) = (n, n + 3l)$, 其中 $n, l \in \mathbb{N}$ 且 $n + l \geq 1$.

- (a) 如果 n 和 l 都是奇数, 则方程组 (3.11) 没有解;
- (b) 如果 n 是奇数且 l 是偶数, 则方程组 (3.11) 永远有解.
- (b1) 任何解都属于唯一的一个带 2- 参数的解的解族 $(\hat{u}_{\lambda, \mu}, \hat{v}_{\lambda, \mu})$, 其中 $\lambda, \mu > 0$ 可以任意取值.
- (b2) 方程组 (3.11) 至多有 $\frac{n+1}{2}$ 个带 2- 参数的解的解族. 特别地, 当 $n = 1$ 时, 方程组 (3.11) 有唯一的带 2- 参数的解的解族.
- (b3) 除 $6\lceil \frac{n^2-1}{24} \rceil$ 个 $t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 外, 带 2- 参数的解的解族的个数恰好是 $\frac{n+1}{2}$. 特别地, 这个结论对任意 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 成立.
- (b4) 如果 $t < 0$, 则所有的解都关于 x_1 - 轴对称.
- (c) 如果 n 是偶数, 则任何一个解 (如果存在) 都属于唯一的一个带 1- 参数的解的解族 $(\hat{u}_{\lambda, 1}, \hat{v}_{\lambda, 1})$, $\lambda > 0$. 另外, 如果 $l \in \{0, 1\}$, 则当 $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ 时, 方程组 (3.11) 没有解.

注 3.4 考虑平面上带多个奇异点的 $SU(3)$ Toda 方程组

$$\begin{cases} \Delta_x \hat{u} + 2e^{\hat{u}} - e^{\hat{v}} = 4\pi \left(\alpha_{0,1}\delta_0 + \alpha_{1,1}\delta_1 + \sum_{j=1}^m \alpha_{t_j,1}\delta_{t_j} \right), & \text{在 } \mathbb{R}^2 \text{ 上,} \\ \Delta_x \hat{v} + 2e^{\hat{v}} - e^{\hat{u}} = 4\pi \left(\alpha_{0,2}\delta_0 + \alpha_{1,2}\delta_1 + \sum_{j=1}^m \alpha_{t_j,2}\delta_{t_j} \right), & \text{在 } \mathbb{R}^2 \text{ 上,} \\ \hat{u}(x) = -2(\alpha_{\infty,1} + 2) \ln |x| + O(1), & \text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ \hat{v}(x) = -2(\alpha_{\infty,2} + 2) \ln |x| + O(1), & \text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时,} \end{cases} \quad (3.12)$$

其中 $\alpha_{p,j} > -1$ 对于所有 p 和 j 成立, 从而

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\hat{u}} < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^2} e^{\hat{v}} < \infty.$$

这个方程组在过去二十多年来得到了广泛研究, 但是到目前为止还有很多问题没有解决. 与定理 B 中考虑的亏格为正的紧 Riemann 面的情形不同, 即使对非临界情形方程组 (3.12) 也没有一般的解的存在性结果. 目前已有的相关结果如下:

- 对只在 ∞ 处有奇性的情形 (即 $m = 0$ 且 $\alpha_{0,j} = \alpha_{1,j} = 0$ 对 $j = 1, 2$ 成立时), 所有的解都可以被分类 (参见文献 [22]).
- 对只在 $\{0, \infty\}$ 处有奇性的情形 (即 $m = 0$ 且 $\alpha_{1,j} = 0$ 对 $j = 1, 2$ 成立时), 所有的解也可以被分类 (参见文献 [28]).
- 对只在 $\{0, 1, \infty\}$ 处有奇性的情形 (即 $m = 0$), 解这个方程组已经变得非常困难, 到目前为止只有一个部分性的存在性结果 (参见文献 [24]), 其方法是运用高阶的超几何方程的理论.

据我们所知, 对带有 $m + 3 \geq 4$ 个奇异点 $\{0, 1, \infty, t_1, \dots, t_m\}$ 的方程组 (3.12), 文献里还没有任何结果. 显然, 方程组 (3.11) 是方程组 (3.12) 的特殊情形 (对 $x_0 \in \{1, t, \infty\}$ 和 $j = 1, 2$, 令 $m = 1$, $t_1 = t$, $\alpha_{0,j} = \frac{n_j-1}{2}$ 和 $\alpha_{x_0,j} = -\frac{1}{2}$). 所以定理 3.10 对带 4 个奇异点的方程组 (3.12) 给出了第一个解的存在性和非存在性的结果.

4 主要方法: 3 阶线性常微分方程的单值群表示

本节以非临界的情形为例, 简要介绍本文的主要方法. 与文献 [3] 运用变分法不同, 本文的方法基于 Toda 方程组 (1.1) 的可积性. 定义

$$U := \frac{2u+v}{3}, \quad V := \frac{u+2v}{3},$$

$$\gamma_{1,k} := \frac{2n_{1,k} + n_{2,k}}{3}, \quad \gamma_{2,k} := \frac{n_{1,k} + 2n_{2,k}}{3}.$$

则方程组 (1.1) 可以改写为

$$\begin{cases} \Delta U + e^{2U-V} = 4\pi \sum_{k=0}^m \gamma_{1,k} \delta_{p_k}, & \text{在 } E_\tau \text{ 上,} \\ \Delta V + e^{2V-U} = 4\pi \sum_{k=0}^m \gamma_{2,k} \delta_{p_k}, & \text{在 } E_\tau \text{ 上.} \end{cases} \quad (4.1)$$

设 (U, V) 是方程组 (4.1) 的解. 与文献 [28, 35] 类似, 考虑下面这个 3 阶线性常微分算子:

$$\mathcal{L} := (\partial_z - V_z)(\partial_z + V_z - U_z)(\partial_z + U_z) = \partial_z^3 + W_2 \partial_z + W_3, \quad (4.2)$$

其中

$$W_2 := U_{zz} - U_z^2 + V_{zz} - V_z^2 + U_z V_z, \quad (4.3)$$

$$W_3 := U_{zzz} - 2U_z U_{zz} + U_z V_{zz} + V_z U_z^2 - U_z V_z^2,$$

W_2 和 W_3 分别被称为 W -不变量和 W -对称量 (参见文献 [1, 28, 34–36]). 因为 (U, V) 满足方程组 (4.1), 通过直接计算很容易证明 (参见文献 [28, 35])

$$W_{2,\bar{z}} = W_{3,\bar{z}} = 0, \quad \text{当 } z \in E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m \text{ 时,}$$

所以 W_2 和 W_3 是双周期的亚纯函数, 即椭圆函数. 由于

$$U(z) = 2\gamma_{1,k} \ln |z - p_k| + O(1), \quad V(z) = 2\gamma_{2,k} \ln |z - p_k| + O(1), \quad \text{在 } z = p_k \text{ 处,}$$

所以有

$$W_2(z) = \frac{-\alpha_k}{(z - p_k)^2} + O((z - p_k)^{-1}),$$

$$W_3(z) = \frac{-2\beta_k}{(z - p_k)^3} + O((z - p_k)^{-2}),$$

且 W_2 和 W_3 除了 $\{p_k\}_{k=0}^m$ 之外没有其他的极点, 其中

$$\alpha_k := \gamma_{1,k}(\gamma_{1,k} + 1) + \gamma_{2,k}(\gamma_{2,k} + 1) - \gamma_{1,k}\gamma_{2,k}, \quad (4.4)$$

$$\beta_k := -\frac{2\gamma_{1,k}(\gamma_{1,k} + 1) + \gamma_{1,k}\gamma_{2,k}(\gamma_{1,k} - \gamma_{2,k} - 1)}{2}. \quad (4.5)$$

引进经典的 Weierstrass zeta 函数

$$\zeta(z) = \zeta(z; \tau) = \frac{1}{z} - \frac{g_2}{60} z^3 + \cdots,$$

它是由 $\zeta'(z) := -\wp(z)$ 定义的唯一奇函数. 则 Liouville 定理告诉我们

$$\begin{aligned} W_2(z) &= -\left(\sum_{k=0}^m \alpha_k \wp(z - p_k) + \sum_{k=0}^m B_k \zeta(z - p_k) + B\right), \\ W_3(z) &= \sum_{k=0}^m \beta_k \wp'(z - p_k) + \sum_{k=0}^m D_k \wp(z - p_k) + \sum_{k=0}^m A_k \zeta(z - p_k) + D, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 A_k 、 B_k 、 D_k 、 B 和 D 是满足留数条件

$$\sum_{k=0}^m A_k = 0, \quad \sum_{k=0}^m B_k = 0 \quad (4.7)$$

的常数. 事实上, 存在常数 B_k 使得

$$W_2(z) + \left(\sum_{k=0}^m \alpha_k \wp(z - p_k) + \sum_{k=0}^m B_k \zeta(z - p_k)\right)$$

在 $\mathbb{C}$ 上全纯. 因为这个函数是双周期的, 所以在 $\mathbb{C}$ 上有界, 从而由 Liouville 定理知这个函数一定是常数. 所以, $e^{-U(z)}$ 满足如下 3 阶线性常微分方程:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y &= y''' - \left(\sum_{k=0}^m \alpha_k \wp(z - p_k) + \sum_{k=0}^m B_k \zeta(z - p_k) + B\right)y' \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^m \beta_k \wp'(z - p_k) + \sum_{k=0}^m D_k \wp(z - p_k) + \sum_{k=0}^m A_k \zeta(z - p_k) + D\right)y \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

常微分方程 (4.8) 是 Fuchsian 型的, 且在 p_k 处有正规的奇异点. 直接计算表明 (4.8) 在 $z = p_k$ 处的局部指标 $\rho_{k,j}$ ($j = 1, 2, 3$) 为

$$\begin{aligned} \rho_{k,1} &= -\gamma_{1,k}, \quad \rho_{k,2} = -\gamma_{1,k} + (n_{1,k} + 1), \\ \rho_{k,3} &= -\gamma_{1,k} + (n_{1,k} + n_{2,k} + 2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

现在考虑非临界的情形 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$. 此时 $\gamma_{1,k} \notin \mathbb{Z}$ 对某些 k 成立, 所以常微分方程 (4.8) 的任意解在 p_k 处都是多值的, 从而是多值函数.

另外, 由于局部指标的差都是整数, 所以 (4.8) 可能有解在 p_k 处有对数奇性.

定义 4.1 ^[20] 如果 (4.8) 的所有解在正规奇异点 p_k 处都没有对数奇性, 则称 p_k 是 (4.8) 的显式奇异点.

显然, 在一个显式奇异点 p_k 处的局部单值矩阵 (用 M_k 表示) 满足

$$M_k = e^{-2\pi i \gamma_{1,k}} I_3, \quad (4.10)$$

其中 $I_3 = \text{diag}(1, 1, 1)$ 表示 3 阶单位阵.

注 4.1 任意固定一个基点 $q_0 = -\varepsilon_0(1 + \tau) = -\varepsilon_0\omega_3$, 其中 $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ 很小使得 q_0 很靠近 0 且它的邻域 $B(q_0, |q_0|) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - q_0| < |q_0|\}$ 不包含 (4.8) 的奇异点. 则 (4.8) 的单值群表示是一个

群同态 $\rho: \pi_1(E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m, q_0) \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$. 具体而言, 令

$$\vec{Y} := (y_1, y_2, y_3)^T = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

是方程 (4.8) 在 q_0 邻域 $B(q_0, |q_0|/2) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - q_0| < |q_0|/2\}$ 内的一组线性无关的基本解, 则对于任意回路 $\ell \in \pi_1(E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m, q_0)$, 用 $\ell^* y_j(z)$ 表示 $y_j(z)$ 沿着回路 ℓ 的解析延拓. 则存在矩阵 $\rho(\ell) \in SL(3, \mathbb{C})$ (称为单值矩阵) 使得

$$\ell^* \vec{Y} = \rho(\ell) \vec{Y}. \quad (4.11)$$

如果单值群 (即单值群表示 ρ 的像集) 共轭于酉群 $SU(3)$ 的一个子群, 则称这个单值群表示是酉的.

回顾记号 $\omega_1 = 1, \omega_2 = \tau$. 令 $\ell_j \in \pi_1(E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m, q_0)$ ($j = 1, 2$) 是环面 E_τ 的连接 q_0 和 $q_0 + \omega_j$ 的简单回路, 并令 $\varsigma_k \in \pi_1(E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m, q_0)$ 是逆时针环绕 p_k 的简单回路使得

$$\ell_1 \ell_2 \ell_1^{-1} \ell_2^{-1} = \varsigma_0 \varsigma_1 \cdots \varsigma_m, \quad \text{在 } \pi_1(E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m, q_0) \text{ 上}. \quad (4.12)$$

一个已知的事实 (参见文献 [28, 35]) 是, 如果常微分方程 (4.8) 来源于 Toda 方程组 (4.1) 的解 (U, V) , 则所有的 p_k 都是显式奇异点. 此时, (4.10) 说明 $\rho(\varsigma_k) = e^{-2\pi i \gamma_{1,k}} I_3$ 对所有 k 成立, 所以从 (4.12) 可以推导出单值矩阵 $N_j := \rho(\ell_j)$ 满足

$$N_1 N_2 N_1^{-1} N_2^{-1} = \varepsilon I_3, \quad \text{其中 } \varepsilon := e^{-2\pi i \sum_k \gamma_{1,k}} = e^{-2\pi i \frac{2\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{3}}. \quad (4.13)$$

由于 $\mathcal{N}_1 \not\equiv \mathcal{N}_2 \pmod{3}$, 所以 $\varepsilon \neq \pm 1$ 且 $\varepsilon^3 = 1$.

引理 4.1 ^[10] 假设所有的 p_k 都是 (4.8) 的显式奇异点. 则在相差一个常数倍的意义下, 在 $B(q_0, |q_0|/2)$ 内存在唯一的局部基本解 $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 使得对应的单值矩阵 N_1 和 N_2 满足

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

其中 $\varepsilon = e^{-2\pi i \frac{2\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{3}}$. 特别地, 单值群表示是酉的.

反过来, 如果单值群表示是酉的, 则所有的 p_k 都是 (4.8) 的显式奇异点, 从而 (4.14) 成立.

引理 4.2 ^[10] 假设 Toda 方程组 (4.1) 有解 (U, V) , 则所有 p_k 都是对应常微分方程 (4.8) 的显式奇异点, 从而可以应用引理 4.1 的结论. 特别地, 在 $B(q_0, |q_0|/2)$ 内存在局部基本解 $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)^T$ 使得

$$e^{-U(z)} = |y_1(z)|^2 + |y_2(z)|^2 + |y_3(z)|^2, \quad (4.15)$$

且对应的单值矩阵 N_1 和 N_2 满足 (4.14).

为方便起见, 记常微分方程 (4.8) 中的 $3m + 5$ 个参数组成的向量为

$$\vec{B} := (A_0, \dots, A_m, B_0, \dots, B_m, B, D_0, \dots, D_m, D), \quad (4.16)$$

则利用引理 4.1 和 4.2, 可以证明如下重要的结论.

定理 4.1 ^[10] 假设对某个 $\vec{B}$, 所有的 p_k 都是 (4.8) 的显式奇异点, 则 Toda 方程组 (4.1) 有唯一的解 (U, V) 对应于 $\vec{B}$.

定理 4.2 ^[10] Toda 方程组 (1.1) 的解和使得所有的 p_k 都是 (4.8) 的显式奇异点的 $\vec{B}$ 之间存在一一对应.

定理 4.2 说明, 为了证明定理 2.1, 只需要计算那些使得 p_k 都是 (4.8) 的显式奇异点的 $\vec{B}$. 这里采用标准的 Frobenius 方法 (参见文献 [20, 第 1 章]) 来研究 p_k 是显式奇异点的条件. 为了方便, 引进记号

$$\zeta_{kl} = \zeta(p_k - p_l), \quad \wp_{kl}^{(n)} = \wp^{(n)}(p_k - p_l), \quad \forall n \geq 0, \quad k \neq l.$$

也用记号 $\mathbb{Q}[g_2, g_3, \zeta_{kl}, \wp_{kl}^{(n)}][\vec{B}]$ 来表示 $\mathbb{Q}[g_2, g_3, \{\zeta_{kl} : l \neq k\}, \{\wp_{kl}^{(n)} : l \neq k, n \geq 0\}][\vec{B}]$.

引理 4.3 ^[10] 任意固定 k , 则存在 3 个多项式

$$\begin{aligned} P_{k,1}(\vec{B}) &= r_1 D_k^{n_{1,k}+1} + \cdots \in \mathbb{Q}[g_2, g_3, \zeta_{kl}, \wp_{kl}^{(n)}][\vec{B}], \quad r_1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ P_{k,2}(\vec{B}) &= r_2 D_k^{n_{2,k}+1} + \cdots \in \mathbb{Q}[g_2, g_3, \zeta_{kl}, \wp_{kl}^{(n)}][\vec{B}], \quad r_2 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \\ P_{k,3}(\vec{B}) &= r_3 A_k D_k^{n_{1,k}+n_{2,k}} + \cdots \in \mathbb{Q}[g_2, g_3, \zeta_{kl}, \wp_{kl}^{(n)}][\vec{B}], \quad r_3 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \end{aligned}$$

它们有均匀权重

$$\text{Weig } P_{k,1} = n_{1,k} + 1, \quad \text{Weig } P_{k,2} = n_{2,k} + 1, \quad \text{Weig } P_{k,3} = n_{1,k} + n_{2,k} + 2, \quad (4.17)$$

使得 p_k 是 (4.8) 的显式奇异点当且仅当

$$P_{k,1}(\vec{B}) = P_{k,2}(\vec{B}) = P_{k,3}(\vec{B}) = 0,$$

其中 B_i 、 D_i 、 ζ_{kl} 、 A_j 、 B 、 D 、 g_2 、 g_3 和 $\wp_{kl}^{(n)}$ 的权重分别为 1、1、1、2、2、3、4、6 和 $n+2$.

推论 4.1 ^[10] 所有的 p_k 都是 (4.8) 的显式奇异点当且仅当 $\vec{B} \in \mathbb{C}^{3m+5}$ 是下面 $3m+5$ 个多项式方程组:

$$\begin{cases} P_1(\vec{B}) := \sum_{k=0}^m B_k = 0, \\ P_2(\vec{B}) := \sum_{k=0}^m A_k = 0, \\ P_{k,1}(\vec{B}) = P_{k,2}(\vec{B}) = P_{k,3}(\vec{B}) = 0, \quad 0 \leq k \leq m \end{cases} \quad (4.18)$$

的解. 所以, Toda 方程组 (1.1) 的解的个数等于多项式方程组 (4.18) 的解 $\vec{B}$ 的个数.

定理 2.1 的证明 证明的关键点是证明存在一致的常数 $C > 1$ 使得对多项式方程组 (4.18) 的所有解 $\vec{B}$, 都成立

$$\sum_{k=0}^m |B_k| + \sum_{k=0}^m |A_k| + \sum_{k=0}^m |D_k| + |B| + |D| \leq C. \quad (4.19)$$

这个断言从代数几何的角度来看是很难证明的, 因为我们没有这些多项式的表达式. 这里的新想法是利用它与 Toda 方程组的联系. 由定理 4.1 知, 对 (4.18) 的任意解 $\vec{B}$, 存在 Toda 方程组 (4.1) 的解 (U, V) 对应于 $\vec{B}$ (参见 (4.3) 和 (4.6)).

取定 $z_0 \in E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m$ 和很小的 $\epsilon > 0$ 使得邻域 $B(z_0, \epsilon) \subseteq E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m$, 则由定理 A, 存在一致的常数 C_1 使得对 Toda 方程组 (4.1) 的任意解 (U, V) , 都成立

$$|U(z)| + |V(z)| \leq C_1, \quad \forall z \in B(z_0, \epsilon).$$

则由椭圆方程标准的梯度估计知, 存在一致的常数 C_2 使得对 Toda 方程组 (4.1) 的任意解 (U, V) 都成立

$$|U_z| + |V_z| + |U_{zz}| + |V_{zz}| + |U_{zzz}| \leq C_2, \quad \forall z \in B\left(z_0, \frac{\epsilon}{2}\right).$$

再利用 (4.3) 和 (4.6), 得到一致的常数 C_3 使得对 (4.18) 的任意解 $\vec{B}$ 都成立

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^m B_k \zeta(z - p_k) + B \right| &\leq C_3, \quad \forall z \in B\left(z_0, \frac{\epsilon}{2}\right), \\ \left| \sum_{k=0}^m D_k \wp(z - p_k) + \sum_{k=0}^m A_k \zeta(z - p_k) + D \right| &\leq C_3, \quad \forall z \in B\left(z_0, \frac{\epsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

这里用到了如下事实: 因为 $B(z_0, \epsilon) \subseteq E_\tau \setminus \{p_k\}_{k=0}^m$, 所以 $\sum_{k=0}^m \alpha_k \wp(z - p_k)$ 和 $\sum_{k=0}^m \beta_k \wp'(z - p_k)$ 对 $z \in B(z_0, \epsilon/2)$ 都是一致有界的,

可以选取 $m+2$ 个不同的点 $z_j \in B(z_0, \epsilon/2)$ ($1 \leq j \leq m+2$) 使得 $(m+2) \times (m+2)$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \zeta(z_1 - p_0) & \cdots & \zeta(z_1 - p_m) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \zeta(z_{m+2} - p_0) & \cdots & \zeta(z_{m+2} - p_m) & 1 \end{pmatrix}$$

是可逆的, 则 (4.20) 表明 $\sum_{k=0}^m |B_k| + |B|$ 是一致有界的. 类似的讨论也可以证明

$$\sum_{k=0}^m |A_k| + \sum_{k=0}^m |D_k| + |D|$$

的一致有界性. 至此证明了断言 (4.19).

定义

$$B = \tilde{B}^2, \quad D = \tilde{D}^3, \quad A_k = \tilde{A}_k^2, \quad \forall 0 \leq k \leq m, \quad (4.21)$$

以及

$$\begin{aligned} \vec{B} &:= (\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_m, B_0, \dots, B_m, \tilde{B}, D_0, \dots, D_m, \tilde{D}), \\ \tilde{P}_j(\vec{B}) &:= P_j(\vec{B}), \quad j = 1, 2, \\ \tilde{P}_{k,j}(\vec{B}) &:= P_{k,j}(\vec{B}), \quad 0 \leq k \leq m, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

则由引理 4.3 和推论 4.1 知, 作为 $\vec{B}$ 的多项式, 有

$$\begin{aligned} \deg \tilde{P}_1 &= 1, \quad \deg \tilde{P}_2 = 2, \\ \deg \tilde{P}_{k,1} &= n_{1,k} + 1, \quad \deg \tilde{P}_{k,2} = n_{2,k} + 1, \quad \deg \tilde{P}_{k,3} = n_{1,k} + n_{2,k} + 2. \end{aligned}$$

(4.19) 表明

$$\sum_{k=0}^m |B_k| + \sum_{k=0}^m |\tilde{A}_k| + \sum_{k=0}^m |D_k| + |\tilde{B}| + |\tilde{D}| \leq C \quad (4.22)$$

对新的多项式方程组

$$\begin{cases} \tilde{P}_1(\vec{\mathcal{B}}) = \sum_{k=0}^m B_k = 0, \\ \tilde{P}_2(\vec{\mathcal{B}}) := \sum_{k=0}^m \tilde{A}_k^2 = 0, \\ \tilde{P}_{k,1}(\vec{\mathcal{B}}) = \tilde{P}_{k,2}(\vec{\mathcal{B}}) = \tilde{P}_{k,3}(\vec{\mathcal{B}}) = 0, \quad 0 \leq k \leq m \end{cases} \quad (4.23)$$

的所有解 $\vec{\mathcal{B}}$ 一致成立.

定义 $X := \{\vec{\mathcal{B}} \in \mathbb{C}^{3m+5} \mid \vec{\mathcal{B}} \text{ 是 (4.23) 的解}\}$, 则 X 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的仿射簇. 代数几何的理论 (参见文献 [17, 第 36 页]) 告诉我们, $\mathbb{C}$ 上任何维数大于等于 1 的仿射簇在 $\mathbb{C}$ 的标准拓扑下无界. (4.22) 表明仿射簇 X 在 $\mathbb{C}$ 的标准拓扑下有界, 所以 X 的维数是 0, 从而 X 只包含有限多个点, 即多项式方程组 (4.23) 只有有限多个解. 则由代数几何中的 Bézout 定理 (参见文献 [39, 第 246 页]) 知, 多项式方程组 (4.23) 至多有

$$\begin{aligned} & \deg \tilde{P}_1 \times \deg \tilde{P}_2 \times \prod_{k=0}^m \prod_{j=1}^3 \deg \tilde{P}_{k,j} \\ &= 2 \prod_{k=0}^m (n_{1,k} + 1)(n_{2,k} + 1)(n_{1,k} + n_{2,k} + 2) \\ &= 3 \times 2^{m+2} N(\{n_{1,k}\}_k, \{n_{2,k}\}_k) \end{aligned}$$

个解 (在计算重数的意义下). 再利用 (4.21) 可知多项式方程组 (4.18) 至多有 $N(\{n_{1,k}\}_k, \{n_{2,k}\}_k)$ 个解, 所以 Toda 方程组 (1.1) 也至多有 $N(\{n_{1,k}\}_k, \{n_{2,k}\}_k)$ 个解. $\square$

致谢 非常感谢审稿人提出的宝贵建议, 包括一些后续可以考虑的问题.

参考文献

- 1 Balog J, Fehér L, O’Raifeartaigh L, et al. Toda theory and W-algebra from a gauged WZNW point of view. *Ann Physics*, 1990, 203: 76–136
- 2 Battaglia L. Existence and multiplicity result for the singular Toda system. *J Math Anal Appl*, 2015, 424: 49–85
- 3 Battaglia L, Jevnikar A, Malchiodi A, et al. A general existence result for the Toda system on compact surfaces. *Adv Math*, 2015, 285: 937–979
- 4 Battaglia L, Malchiodi A. Existence and non-existence results for the $SU(3)$ singular Toda system on compact surfaces. *J Funct Anal*, 2016, 270: 3750–3807
- 5 Bolton J, Woodward L. Some geometrical aspects of the 2-dimensional Toda equations. In: *Geometry, Topology and Physics. Proceeding of the First Brazil-USA Workshop, Campinas, 1996*. Berlin: de Gruyter, 1997, 69–81
- 6 Calabi E. Isometric imbedding of complex manifolds. *Ann of Math* (2), 1953, 58: 1–23
- 7 Chai C L, Lin C S, Wang C L. Mean field equations, hyperelliptic curves and modular forms: I. *Camb J Math*, 2015, 3: 127–274
- 8 Chen Z, Lin C S. Self-dual radial non-topological solutions to a competitive Chern-Simons model. *Adv Math*, 2015, 331: 484–541

- 9 Chen Z, Lin C S. Sharp nonexistence results for curvature equations with four singular sources on rectangular tori. *Amer J Math*, 2020, 142: 1269–1300
- 10 Chen Z, Lin C S. On number and evenness of solutions of the $SU(3)$ Toda system on flat tori with non-critical parameters. *J Differential Geom*, 2023, in press
- 11 Chen Z, Lin C S. Sharp existence, symmetry and asymptotics results for the singular $SU(3)$ Toda system with critical parameters. *J Differential Geom*, 2023, in press
- 12 Chern S S, Wolfson J G. Harmonic maps of the two-sphere into a complex Grassmann manifold II. *Ann of Math (2)*, 1987, 125: 301–335
- 13 Choe K, Kim N, Lin C S. Self-dual symmetric nontopological solutions in the $SU(3)$ model in $\mathbb{R}^2$. *Comm Math Phys*, 2015, 334: 1–37
- 14 Choe K, Kim N, Lin C S. New type of nontopological bubbling solutions in the $SU(3)$ Chern-Simons model in $\mathbb{R}^2$. *J Funct Anal*, 2016, 270: 1–33
- 15 Choe K, Kim N, Lin C S. Existence of mixed type solutions in the $SU(3)$ Chern-Simons theory in $\mathbb{R}^2$. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2017, 56: 17
- 16 Eremenko A, Gabrielov A. Spherical rectangles. *Arnold Math J*, 2016, 2: 463–486
- 17 Gathmann A. Algebraic geometry. Class notes. <https://agag-gathmann.math.rptu.de/~gathmann/class/alggeom-2021/alggeom-2021pdf>, 2021
- 18 Griffiths P J, Harris J. Principles of Algebraic Geometry. New York: Wiley-Interscience, 1978
- 19 Guest M. Harmonic Maps, Loop Groups, and Integrable Systems. London Mathematical Society Student Texts, vol. 38. Cambridge: Cambridge University Press, 1997
- 20 Iwasaki K, Kimura H, Shimomura S, et al. From Gauss to Painlevé: A Modern Theory of Special Functions. Braunschweig: Springer, 1991
- 21 Jost J, Lin C S, Wang G. Analytic aspects of the Toda system: II. Bubbling behavior and existence of solutions. *Comm Pure Appl Math*, 2006, 59: 526–558
- 22 Jost J, Wang G. Classification of solutions of a Toda system in $\mathbb{R}^2$. *Int Math Res Not IMRN*, 2002, 2002: 277–290
- 23 Lee Y, Lin C S, Wei J C, et al. Degree counting and shadow system for Toda system of rank two: One bubbling. *J Differential Equations*, 2018, 264: 4343–4401
- 24 Lin C S, Nie Z, Wei J C. Toda systems and hypergeometric equations. *Trans Amer Math Soc*, 2018, 370: 7605–7626
- 25 Lin C S, Wang C L. Elliptic functions, Green functions and the mean field equations on tori. *Ann of Math (2)*, 2010, 172: 911–954
- 26 Lin C S, Wang C L. Mean field equations, hyperelliptic curves and modular forms: II. *J Éc polytech Math*, 2017, 4: 557–593
- 27 Lin C S, Wei J C, Yang W, et al. On rank-2 Toda systems with arbitrary singularities: Local mass and new estimates. *Anal PDE*, 2018, 11: 873–898
- 28 Lin C S, Wei J C, Ye D. Classification and nondegeneracy of $SU(n+1)$ Toda system with singular sources. *Invent Math*, 2012, 190: 169–207
- 29 Lin C S, Wei J C, Zhang L. Classification of blowup limits for $SU(3)$ singular Toda systems. *Anal PDE*, 2015, 8: 807–837
- 30 Lin C S, Yan S. Bubbling solutions for the $SU(3)$ Chern-Simons model on a torus. *Comm Pure Appl Math*, 2013, 66: 991–1027
- 31 Lucia M, Nolasco M. $SU(3)$ Chern-Simons vortex theory and Toda systems. *J Differential Equations*, 2002, 184: 443–474
- 32 Malchiodi A, Ndiaye C B. Some existence results for the Toda system on closed surfaces. *Atti Accad Naz Lincei Cl Sci Fis Mat Natur*, 2007, 18: 391–412
- 33 Malchiodi A, Ruiz D. A variational analysis of the Toda system on compact surfaces. *Comm Pure Appl Math*, 2013, 66: 332–371
- 34 Nie Z. Solving Toda field theories and related algebraic and differential properties. *J Geom Phys*, 2012, 62: 2424–2442
- 35 Nie Z. On characteristic integrals of Toda field theories. *J Nonlinear Math Phys*, 2014, 21: 120–131
- 36 Nie Z. Classification of solutions to Toda systems of types C and B with singular sources. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2016, 55: 53
- 37 Nolasco M, Tarantello G. Double vortex condensates in the Chern-Simons-Higgs theory. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1999, 9: 31–94
- 38 Nolasco M, Tarantello G. Vortex condensates for the $SU(3)$ Chern-Simons theory. *Comm Math Phys*, 2000, 213: 599–639
- 39 Shafarevich I. Basic Algebraic Geometry, 1: Varieties in Projective Space, 3rd ed. Heidelberg: Springer, 2013

40 Yang Y. Solitons in Field Theory and Nonlinear Analysis. Springer Monographs in Mathematics. New York: Springer, 2001

Singular $SU(3)$ Toda systems on the flat tori

Zhijie Chen

Abstract In this survey paper, we introduce our recent progress on the research of the $SU(3)$ Toda system on the flat tori; for example, for the non-critical case, we can give a sharp estimate of the number of solutions. We also present some challenging open problems.

Keywords Toda system, number of solutions, third-order linear ordinary differential equation

MSC(2020) 35J47, 35B44

doi: 10.1360/SSM-2022-0248