

基于改进后光滑 GZZ 准则的弹塑性本构模型 在 ABAQUS 中的数值实现

武文杰¹, 武威^{1,2}, 邹育麟³, 古浩⁴, 朱合华^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092;
3. 四川沿江攀宁高速公路有限公司, 四川 攀枝花 617112; 4. 四川公路桥梁建设集团有限公司勘察设计分公司, 四川 成都 610093)

摘要: 光滑 GZZ(Smoothed Zhang-Zhu)准则是近年提出的岩石三维强度准则, 可以合理可靠地描述岩石材料的非线性强度特征。然而, 仅有少数有限元软件配备了这一准则, 且现有基于 GZZ 准则的本构模型程序大多在主应力空间进行, 在 ABAQUS 中应用困难。此外, 目前基于光滑 GZZ 准则的数值模拟往往使用关联理想弹塑性模型, 忽略了岩石的塑性变形特性和强度非线性。本文改进光滑 GZZ 准则的塑性势函数, 提出基于光滑 GZZ 准则的本构模型在一般应力空间的数值实现方法, 避免主应力转化问题; 同时, 给出考虑岩石膨胀特性和强度变化的计算方法。最后通过在 ABAQUS 中编写 UMAT 子程序实现这一本构模型的计算。经 3 个算例验证, 该模型可直接在一般应力空间进行计算, 能体现岩石膨胀特性、强度非线性, 数值解与解析解和模型试验结果吻合, 具有较高的计算精度。

关键词: 岩石力学; GZZ 强度准则; 本构模型; 回归映射方法; 数值模拟

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-6915(2025)04-1001-12

Numerical implementation of the elastoplastic constitutive model based on the improved smoothed GZZ criterion into ABAQUS

WU Wenjie¹, WU Wei^{1,2}, ZOU Yulin³, GU Hao⁴, ZHU Hehua^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Sichuan Yanjiang Panning Expressway Co., Ltd., Panzhihua, Sichuan 617112, China; 4. Survey and Design Company of Sichuan Road and Bridge Co., Ltd, Chengdu, Sichuan 610093, China)

Abstract: The Smoothed Zhang-Zhu(GZZ) criterion is a three-dimensional strength criterion for rocks proposed in recent years, which can reasonably and reliably describe the nonlinear strength characteristics of rock materials. However, only a few finite element software are equipped with this criterion, and most of the existing constitutive model programs based on the GZZ criterion are carried out in the principal stress space, making it difficult to apply in ABAQUS. In addition, the current numerical simulations based on the Smoothed GZZ criterion often use the associated ideal elastoplastic model, ignoring the plastic deformation characteristics and strength nonlinearity of rocks. In this paper, the plastic potential function of the Smoothed GZZ criterion is improved, and a numerical

收稿日期: 2024-07-26; **修回日期:** 2024-11-12

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(42272338); 四川省交通运输科技项目(2018-ZL-02)

Supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 42272338) and Sichuan Transportation Science and Technology Program(Grant No. 2018-ZL-02)

作者简介: 武文杰(2001-), 男, 2022 年毕业于东南大学城市地下空间工程专业, 现为硕士研究生, 主要从事地应力测试与模拟方面的研究工作。
E-mail: 2232640@tongji.edu.cn. 通讯作者: 朱合华(1962-), 男, 博士, 现任教授。E-mail: zhuhehua@tongji.edu.cn

DOI: 10.3724/1000-6915.jrme.2024.0575

implementation method of the constitutive model based on the Smoothed GZZ criterion in the general stress space is proposed to avoid the problem of principal stress transformation. Meanwhile, a calculation method considering the dilation characteristics and strength variation of rocks is given. Finally, the calculation of this constitutive model is implemented by writing a UMAT subroutine in ABAQUS. Verified by three calculation examples, this model can directly conduct calculations in the general stress space, can reflect the dilation characteristics and strength nonlinearity of rocks, and the numerical solutions are in good agreement with the analytical solutions and the results of model tests, showing a relatively high calculation accuracy.

Key words: rock mechanics; the GZZ criterion; constitutive model; return mapping algorithm; numerical simulation

1 引言

深埋岩体工程往往处于复杂的地质力学环境,工程地应力较高^[1-3],深部岩体的力学特性与浅部岩体存在显著的差异^[4]。如果在深埋工程中沿用浅埋岩体工程的经验进行设计和施工,可能导致软岩大变形和岩爆等严重的灾害^[5]。因此,准确预测深部岩体在施工过程中的力学响应,对于深部工程的高效安全施工具有重要意义。

为了准确描述岩体的力学特性,学者们提出了众多岩体理论模型。E. Hoek 和 E. T. Brown^[1]基于岩石三轴试验结果首次提出 Hoek-Brown 准则,并提出了修正的广义 Hoek-Brown(GHB)准则^[6],使其可以描述岩体的力学特性。由于 GHB 准则综合考虑了岩石强度、岩体结构等多种因素的影响,GHB 准则是目前使用最广泛的岩石强度准则。但随着工程埋深和应力水平的增加,岩体具有更明显的三维非线性力学特征,忽略中间主应力(σ_2)的 GHB 准则表现出较大的局限性^[7]。为了更精细化分析岩体在高应力下的强度特性,学者们将 GHB 准则三维化。X. D. Pan 和 J. A. Hudson^[8]提出了广义 Pan-Hudson (GPH)准则,L. Y. Zhang 和 H. H. Zhu^[9]在 GPH 的基础上,提出了广义 Zhang-Zhu(GZZ)强度准则。然而,由于 GZZ 准则在 π 平面上的形状是非光滑和非凸的^[10],这给 GZZ 准则的数值计算带来了困难。为了解决 GZZ 准则这一局限性,Q. Zhang 等^[10]利用研究者提出的各种满足光滑和全凸性的 Lode 势函数,例如椭圆形 Lode 势函数^[11]、双曲线型 Lode 势函数^[12],引入了 Lode 角隅函数对 GZZ 准则进行了修正。但由于角隅函数的复杂数学形式,数值迭代收敛性较差。W. Q. Cai 等^[13]针对原 GZZ 准则非光滑性和非凸性的问题,提出了光滑 GZZ 准则这一新形式,改善了 GZZ 准则在数值计算中的奇异性问题。

在 GZZ 强度准则研究的基础上,学者们借助数

值模拟方法对地下空间工程展开了一系列研究。例如 Y. M. Xiao 等^[14]基于 GZZ 强度准则对深埋隧道开挖的应力重分布进行研究,深入探究了 GZZ 强度准则参数对隧道开挖后应力分布状况的影响。W. Q. Cai 等^[15]则研究了深埋岩石隧道的三维空间效应,证实了 GZZ 强度准则运用于指导隧道设计和施工的可行性。尽管现阶段基于 GZZ 准则的数值模拟已经取得了一定成果,但需要指出的是,上述研究是在 GeoFBA^{3D}^[16]和 FLAC^{3D}^[17-18]实现,目前主流的有限元模拟软件大多并未配备基于 GZZ 强度准则的本构模型,而许多研究也未运用收敛性更好的光滑 GZZ 准则进行计算。因此,亟需一种可靠的数值实现方法,将这一本构模型运用到主流有限元软件中。

在数值计算领域,非线性本构模型是以常微分方程的形式定义的,而方程的求解方法是本构模型应用的关键所在。求解方法通常可分为显式和隐式 2 种。显式算法在计算过程中无需迭代,但存在误差累积的问题。与之相比,隐式算法具有更高的稳定性,故而实际应用更为广泛^[19]。例如 C. C. Su 等^[20]利用线搜索法实现了混凝土塑性损伤模型的数值计算,X. Zhou 等^[21]利用信赖域法提出了修正剑桥模型的无约束应力修正算法,并通过线搜索法实现了非关联 Mohr-Column 模型的应力更新算法^[22]。上述这些数值方法均是基于 ABAQUS 中的 UMAT 子程序编程实现的。不过,在 ABAQUS 中应用隐式算法实现光滑 GZZ 准则本构模型的研究尚不多见。同时,光滑 GZZ 强度准则的屈服函数引入了 Lode 角参数,这就要求将一般应力转化为主应力进行计算^[23]。由于 UMAT 无法直接获取单元主应力,主应力转化过程不仅会增加计算量,而且这种方法局限于各向同性材料,不利于向各向异性材料的推广^[24]。因此,有必要对光滑 GZZ 准则的形式加以改进,使其能够适用于一般应力空间的应力更新算法。

因此,本文对光滑 GZZ 准则形式进行了改进,使其能够适用于一般应力空间的应力更新算法。随

后, 依据光滑 GZZ 准则提出了一种本构模型, 该模型能够反映岩石膨胀和非线性力学特性。接着, 利用回归映射算法在 ABAQUS 中实现了这一本构模型的数值计算。最后, 本文通过解析解以及模型试验结果对所提出的算法和本构模型的准确性进行了验证。

2 光滑 GZZ 强度准则简介

GZZ 准则是在 GHB 准则的基础上提出的^[9]。E. Hoek 和 E. T. Brown^[1]于 1980 年提出了 H-B 强度准则, H-B 强度准则最初应用于描述完整岩石在不同围压下的强度变化, 表达式如下:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m_i \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + 1 \right)^{0.5} \quad (1)$$

式中: σ_1 , σ_3 分别为最大和最小主应力; σ_c 为岩石单轴抗压强度; m_i 为反映岩石质量特征的材料参数。

由于岩体具有节理等不利结构, 岩体与完整岩石强度存在较大的差异。为了表示岩体的强度, Hoek 和 E. T. Brown^[6]在 H-B 准则引入了描述岩体结构特征的地质强度指标 GSI , 提出了广义 Hoek-Brown(GHB)强度准则, GHB 强度准则表达式如下:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_c \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a \quad (2)$$

$$m_b = m_i e^{(GSI-100)/(28-14D)} \quad (3)$$

$$s = e^{(GSI-100)/(9-3D)} \quad (4)$$

$$a = 0.5 + (e^{-GSI/15} - e^{-20/3}) / 6 \quad (5)$$

式中: m_b , s 和 a 均为反映岩性和岩体结构特征的经验参数; D 为爆破扰动系数。其中, GSI 通过岩体结构等级和表面条件确定。

GHB 准则经过不断完善, 已经形成了一套完整、可靠的准则参数体系, 被广泛应用于岩体稳定设计和分析^[25]。然而, GHB 准则忽略了中间主应力 σ_2 对岩体强度的影响。K. Mogi^[26]通过真三轴试验数据指出, σ_2 对于岩石强度和破坏模式具有重要的影响。基于这一结论, L. Y. Zhang 和 H. H. Zhu^[9]提出 Zhang-Zhu 强度准则, 表达式如下:

$$\frac{9}{2\sigma_c} \tau_{oct}^2 + \frac{3}{2\sqrt{2}} m_b \tau_{oct} - m_b \sigma_{m,2} = s \sigma_c \quad (6)$$

其中,

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (7)$$

$$\sigma_{m,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (8)$$

式中: τ_{oct} 为八面体剪应力, $\sigma_{m,2}$ 为有效平均正应力。

L. Y. Zhang^[27]于 2008 年对 Zhang-Zhu 准则做进一步改善, 提出 GZZ 准则:

$$\frac{1}{\sigma_c^{1/a-1}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right)^{1/a} + \frac{m_b}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right) - m_b \sigma_{m,2} - s \sigma_c = 0 \quad (9)$$

式中: m_b , s 和 a 取值与 GHB 准则相同。

为解决 GZZ 准则的非光滑和非全凸性, 改善 GZZ 准则的数值迭代计算收敛性, W. Q. Cai 等^[13]采用 $(\sigma_{m,2})_{\text{new-GZZ}}$ 替代 GZZ 中的 $\sigma_{m,2}$ 项, 得到了光滑 GZZ 准则:

$$\phi(\sigma) = \frac{1}{\sigma_c^{1/a-1}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right)^{1/a} + \frac{m_b}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right) - m_b (\sigma_{m,2})_{\text{new-GZZ}} - s \sigma_c = 0 \quad (10)$$

$$(\sigma_{m,2})_{\text{new-GZZ}} = \frac{1}{2} \left(I_1 - \frac{I_1 I_2 - 9 I_3}{6 J_2} \right) \quad (11)$$

式中: I_1 , I_2 和 I_3 分别为应力第一, 第二, 第三不变量; J_2 为偏应力第二不变量。

图 1 展示了光滑 GZZ 准则和 GZZ 准则在 π 平面上的形状。可以看出, 光滑 GZZ 准则与 GZZ 准则基本一致, 但光滑 GZZ 准则更为平滑, 收敛性更佳。因此, 本文基于光滑 GZZ 准则, 利用 UMAT 子程序在 ABAQUS 中实现基于 GZZ 准则的弹塑性本构模型数值计算。

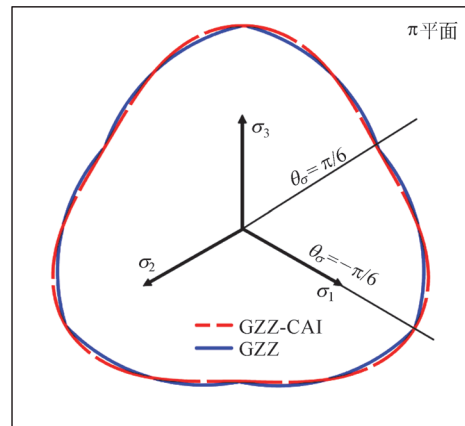


图 1 π 平面上 GZZ 准则与光滑 GZZ 准则的包络线
Fig.1 The envelope lines of GZZ criterion and smoothed GZZ criterion on the π -plane

3 基于光滑 GZZ 准则的本构模型

3.1 塑性势函数改进

塑性流动矢量作为强度准则的核心研究内容之

一, 在有限元计算中具有基础性地位。塑性流动矢量可借助塑性势函数进行计算, W. Q. Cai 等^[13]已给出了光滑 GZZ 准则塑性势函数的数学表达式:

$$g = \frac{1}{\sigma_c^{1/a-1}} (\sqrt{3}J_2)^{1/a} + \left(\frac{3 + \sin 3\theta_\sigma}{2\sqrt{3}} \right) m_b \sqrt{J_2} - m_b \frac{I_1}{3} - s\sigma_c = 0 \quad (12)$$

其中,

$$\theta_\sigma = \tan^{-1} \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_2}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} \right] \quad (13)$$

式中: θ_σ 为应力 Lode 角; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为最大、中间和最小主应力。

鉴于 Lode 角是由主应力分量来表示的, 所以当前 GZZ 准则在有限元中的实现大多是基于主应力空间展开的^[16-18]。由于 ABAQUS 中的 UMAT 子程序仅能直接获取一般应力分量, 无法直接获取主应力分量, 因此在 ABAQUS 中开展基于光滑 GZZ 准则的数值计算时, 存在将一般应力转化为主应力的过程, 这一过程降低了有限元计算的效率。同时, E. Sorensen 等^[23]指出, 一般应力向主应力转化的过程完全依赖于坐标系的变化, 这种方式仅适用于原始应力和更新应力主应力方向相同的情形。若在计算过程中主应力轴发生旋转, 再通过方向矩阵还原至一般应力状态, 将会导致计算结果出现误差, 进而影响应力更新过程的精度。

因此, 为了避免主应力转化这一过程, 本文采用应力不变量表示 Lode 角, 以此改进了光滑 GZZ 准则塑性势函数的形式, 并且引入了膨胀系数 η 来描述岩石的膨胀特性, 如下所示:

$$\sin(3\theta_\sigma) = -\frac{3\sqrt{3}}{2J_2^{3/2}} \left(I_3 + \frac{1}{3}I_1J_2 + \frac{1}{27}I_1^3 \right) \quad (14)$$

$$g = \frac{1}{\sigma_c^{1/a-1}} (\sqrt{3}J_2)^{1/a} + \frac{m_b}{2} (\sqrt{3}J_2) - m_b \left[(\sigma_m)_2^{\text{new-GZZ}} - \frac{I_1}{3} \right] - \eta m_b \frac{I_1}{3} - s\sigma_c = 0 \quad (15)$$

当 $\eta=1$ 时, 塑性势函数与强度准则一致, 为关联流动法则; $\eta \neq 1$ 时, 即为非关联流动法则。当 $\eta=0$ 时, 体积保持不变。

新的塑性势函数在数值层面与原函数大体一致, 然而其优势在于能够通过一般应力分量来表示, 如此一来, 便有效避免了因主应力转化而导致的繁琐程序以及可能产生的误差问题。

3.2 非线性强度模型

目前, 在基于光滑 GZZ 准则开展的数值模拟研究中, 大多采用的是理想弹塑性模型^[14-16], 而鲜少

涉及岩体非线性强度特性方面的研究。何满潮等^[2]指出, 岩石在不同围压下呈现出各异的峰后特性, 在深埋应力环境下, 岩石的非线性强度特性表现得尤为明显。因此, 对岩石非线性强度特性展开研究具有至关重要的意义。本文引入残余地质强度指标 GSI_r , 并将屈服函数改写为

$$f(\sigma, \gamma_{cu}^p) = \frac{1}{\sigma_c^{1/a_r-1}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right)^{1/a_r} + \frac{m_r}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right) - m_r (\sigma_m)_2^{\text{new-GZZ}} - s_r \sigma_c = 0 \quad (16)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} m_r &= m_i e^{(GSI_r-100)/(28-14D)} \\ s_r &= e^{(GSI_r-100)/(9-3D)} \\ a_r &= 0.5 + (e^{-GSI_r/15} - e^{-20/3}) / 6 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

在本文的数值模型中, 等效塑性剪切应变 γ_{cu}^p 计算如下:

$$\gamma_{cu}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p} \quad (18)$$

式中: e^p 为塑性偏应变张量, 通过塑性应变张量 ϵ^p 计算:

$$e^p = \epsilon^p - \frac{1}{3} \theta I \quad (19)$$

$$\theta = \epsilon_{ii}^p \quad (20)$$

在材料的单轴加载试验曲线中选取代表点, 对每个代表点的残余地质强度指标与等效塑性应变进行记录, 以此构建材料的软硬化规律曲线, 并通过插值法来选取残余地质强度指标。如图 2 所示, $GSI_{r(i)}$ 和 $\gamma_{cu(i)}^p$ 分别代表第 i 个点的残余地质强度指标和等效塑性应变。首先, 需判断当前等效塑性剪切应变 $\gamma_{cu(k)}^p$ 所在的区间, 接着计算与之对应的残余地质强度指标 $GSI_{r(k)}$, 最后通过式(16), (17)确定对应屈服函数。

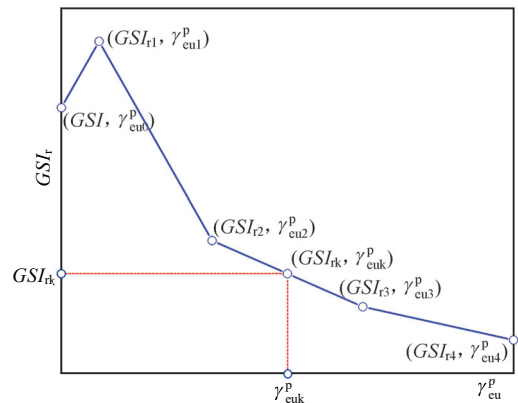


图2 残余地质强度指标相对于等效塑性剪切应变的演化
Fig.2 Evolution of residual geological strength index relative to equivalent plastic shear strain

对于那些缺乏试验数据的材料, 可以采用线性硬化或软化模型。在此模型中, 引入比例系数 K_H , 比例系数 $K_H > 0$ 时, 材料硬化, $K_H < 0$ 时, 材料软化, 屈服函数如下:

$$f(\sigma, \gamma_{cu}^p) = \frac{1}{\sigma_c^{1/a_c-1}} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right)^{1/a_c} + \frac{m_r}{2} \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct} \right) - m_r(\sigma_m, 2)_{\text{new-GZZ}} - s_r \sigma_c - K_H \gamma_{cu}^p = 0 \quad (21)$$

4 光滑 GZZ 准则的数值实现

在求解弹塑性问题时, ABAQUS 采用增量形式对材料施加外部载荷与位移。于每个增量步中, 将单元外力和内力的差值作为残余力, 通过使残余力最小化的方式实现模型平衡。在本节中, 基于回归映射算法, 在一般应力空间内对每个增量步的应力和刚度矩阵进行更新, 并给出了每个增量步中应力更新以及本构矩阵的计算方法。最终, 在 ABAQUS 中成功开发了基于光滑 GZZ 准则的本构程序。

4.1 应力更新算法

应力更新算法作为数值实现的关键环节之一, 对数值计算的平衡迭代速度有着直接影响。在当前所使用的主流算法里, 回归映射算法具有误差较小且计算稳定的优势, 鉴于此, 本文选用回归映射算法来执行应力更新操作。由于经过改进的 GZZ 准则能够可以直接在一般应力空间中开展求解, 从而省去了将应力转化到主应力空间这一复杂过程。应力分量和应变分量分别用 σ 和 ε 表示:

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T \quad (22)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{xz}]^T \quad (23)$$

第 n 个增量步的应力、总应变、弹性应变和塑性应变分别用 σ^n , ε_n , ε_n^e 和 ε_n^p 表示。计算原理如图 3 所示。首先进行弹性试算, 假设增量步产生的应变增量 $\Delta\varepsilon$ 均为弹性应变, 得到试算应力 σ^{tr} :

$$\sigma^{\text{tr}} = \sigma^n + D^e \Delta\varepsilon \quad (24)$$

式中: D^e 为弹性矩阵, 其公式为

$$D^e = \begin{bmatrix} \bar{D} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \bar{G} \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中,

$$\bar{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (26)$$

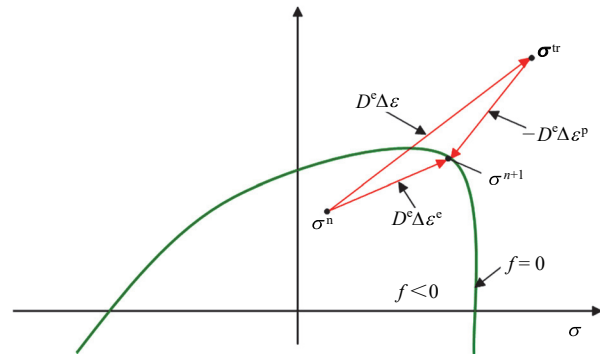


图 3 返回映射算法原理

Fig.3 Principle of return mapping algorithm

$$\bar{G} = \frac{E}{2(1+\nu)} I_{3 \times 3} \quad (27)$$

式中: I 为单位矩阵, E 为杨氏模量, ν 为泊松比。

定义屈服函数如下:

$$f(\sigma) = \phi(\sigma) \quad (28)$$

如果 $f(\sigma^{\text{tr}}) \leq 0$, 则产生的应变增量均为弹性应变。若 $f(\sigma^{\text{tr}}) > 0$, 则该增量步产生了塑性变形, 需要对试算应力进行应力更新。由于光滑 GZZ 准则公式存在 $(I_1 I_2 - 9 I_3) / 6 J_2$ 项, 材料处于静水压力状态时可能产生数值奇异现象, 因此, 除 $f(\sigma^{\text{tr}}) > 0$ 外, 还需满足 $J_2 > TOL$ (TOL 根据计算要求设定), 再进行塑性应力更新计算。

应力更新采用回归映射算法, 寻找试算应力距离屈服面最近的投影点。由于需要求解更新后应力 σ^{n+1} 和增量一致性系数 $\Delta\lambda$ 两个未知量, 构建两个目标函数: 一为式(28)定义的屈服函数 $f(\sigma)$, 二为塑性应变残差:

$$R(\sigma^{n+1}, \Delta\lambda_{n+1}) = -\varepsilon_{n+1}^p + \varepsilon_n^p + \Delta\lambda_{n+1} \frac{\partial g}{\partial \sigma^{n+1}} \quad (29)$$

由此, 需要通过迭代对 σ 和 $\Delta\lambda$ 求解, 使 $f(\sigma)$, $R(\sigma, \Delta\lambda) = 0$, 省略增量步标号 $n+1$, 迭代步骤如下所示:

$$R^{(k)} + \left(\frac{\partial R}{\partial \sigma} \right)^{(k)} \Delta\sigma + \left(\frac{\partial R}{\partial \Delta\lambda} \right)^{(k)} \Delta(\Delta\lambda) = 0 \quad (30)$$

$$f^{(k)} + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^{(k)} \right]^T \Delta\sigma = 0 \quad (31)$$

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \Delta\sigma \quad (32)$$

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \Delta(\Delta\lambda) \quad (33)$$

式中: k 为迭代次数, $\Delta\sigma$ 为应力增量, $\Delta(\Delta\lambda)$ 为增量一致性系数增量。

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p = \Delta\lambda_{n+1}(\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1})$, 式(30)可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(k)} + [\mathbf{D}^e]^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \Delta \lambda^{(k)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} \Delta \boldsymbol{\sigma} + \\ \Delta(\Delta \lambda) \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)} - \Delta(\Delta \lambda) \mathbf{A}^{(k)} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} \quad (35)$$

由式(34)可得

$$\mathbf{A}^{(k)} = \left[\mathbf{I} + \Delta \lambda^{(k)} [\mathbf{D}^e] \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} \right]^{-1} [\mathbf{D}^e] \quad (36)$$

将式(35)代入式(31)可得

$$\Delta(\Delta \lambda) = \frac{f^{(k)} - \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} \right]^T \mathbf{A}^{(k)} \mathbf{R}^{(k)}}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)} \right]^T \mathbf{A}^{(k)} \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{(k)}} \quad (37)$$

塑性应变通过应力增量 $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ 更新为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k+1)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} - [\mathbf{D}^e]^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (38)$$

重复上述迭代算法, 直至目标函数收敛, 收敛条件根据下式判定:

$$\left. \begin{aligned} f^{(k)} &< \text{TOL}_1 \\ \|\mathbf{R}^{(k)}\| &< \text{TOL}_2 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

式中: TOL_1 , TOL_2 均为收敛容许误差。

对于本文改进后的光滑 GZZ 准则, 塑性势函数可以通过以下方法求导:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial J_2} = \frac{(\sqrt{3})^{1/a}}{2a\sigma_c^{1/a-1}} J_2^{1/2a-1} + \frac{\sqrt{3}m_b}{4} J_2^{-1/2} - \\ \frac{m_b(I_1 I_2 - 9I_3)}{12} J_2^{-2} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_1} = -m_b \left(1/6 - \frac{I_2}{12J_2} \right) - \eta m_b / 3 \quad (41)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_2} = m_b \frac{I_1}{12J_2} \quad (42)$$

$$\frac{\partial g}{\partial I_3} = -m_b \frac{3}{4J_2} \quad (43)$$

$$\left[\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial J_2} & \frac{\partial g}{\partial I_1} & \frac{\partial g}{\partial I_2} & \frac{\partial g}{\partial I_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \\ \left[\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \\ \left[\frac{\partial I_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \\ \left[\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \end{bmatrix} \quad (44)$$

屈服函数求导过程与上述思路类似, 读者可自行推导, 在本文中不予列出。

4.2 相容本构矩阵

为了加快有限元计算的收敛速度, 本文给出了光滑 GZZ 准则的相容本构矩阵 $\mathbf{D}^{\text{epc}}$:

$$\mathbf{D}^{\text{epc}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (45)$$

当材料处于完全弹性状态时, 相容本构矩阵与弹性矩阵 $\mathbf{D}^e$ 相同。塑性应力状态下的相容本构矩阵根据应力张量和应变张量的增量形式推导:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^e (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (46)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d(\Delta \lambda) \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \quad (47)$$

$$d[f(\boldsymbol{\sigma})] = \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T d\boldsymbol{\sigma} \quad (48)$$

将式(47)代入式(46), 可以得

$$d\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{A}} d\boldsymbol{\varepsilon} - d(\Delta \lambda) \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (49)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{D}^e \Delta \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} \mathbf{D}^e \quad (50)$$

将式(49)代入增量相容条件式(48), 可以求得 $d(\Delta \lambda)$:

$$d(\Delta \lambda) = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \bar{\mathbf{A}} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (51)$$

再代入式(46), (47), 得到相容本构矩阵 $\mathbf{D}^{\text{epc}}$:

$$\mathbf{D}^{\text{epc}} = \bar{\mathbf{A}} - \frac{\bar{\mathbf{A}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \bar{\mathbf{A}}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T \bar{\mathbf{A}} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (52)$$

根据提出的应力更新算法和相容本构矩阵, 本

文编写了 ABAQUS 中的 UMAT 子程序。图 4 总结了 ABAQUS 中的计算流程。

5 模型验证

为有效验证数值模型的精度，本节针对三轴压缩单元、圆形隧道开挖以及模型试验隧道这 3 个算例实施了模拟分析。其中，三轴压缩单元算例给出了单元的体积应变 - 最大主应变关系曲线以及应力 - 应变曲线；而隧道开挖算例与模型试验算例的模拟结果，则分别与相应的解析解和试验结果展开了比较。结果显示，本文所提出的本构模型能够体现岩石的膨胀特性以及非线性强度特性，并且其数值计算结果与解析解和模型试验结果大体相符，充分证明了本文提出的数值实现方法的正确性和可行性。

5.1 三轴压缩单元分析

为了验证提出的塑性势函数和材料软化硬化规律，本节通过三轴压缩应力状态下的单个单元进行了应力 - 应变分析。模型设置如下：单元尺寸为 $100\text{ mm} \times 100\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ ，限制单元底部垂直方向的位移，在单元 4 个侧面施加 20 kPa 的表面压力，即 $\sigma_2 = \sigma_3 = 20\text{ MPa}$ ，然后在顶部施加竖直向下的位移约束。表 1 为分析使用的材料参数。

5.1.1 膨胀系数参数分析

为了说明模型的膨胀特性，本节对膨胀系数 η 进行了参数敏感性分析。 η 分别取 $0, 0.5, 1.0$ 。图 5 是 η 取值不同时单元的轴向应变 - 体积应变曲线。

随着 η 的增大，体积应变曲线不断上升，体积应变增大。而当 $\eta = 0$ 时，岩石的体积膨胀保持为 0 ，证明了本文方法能够体现岩体膨胀特性。

5.1.2 非线性强度分析

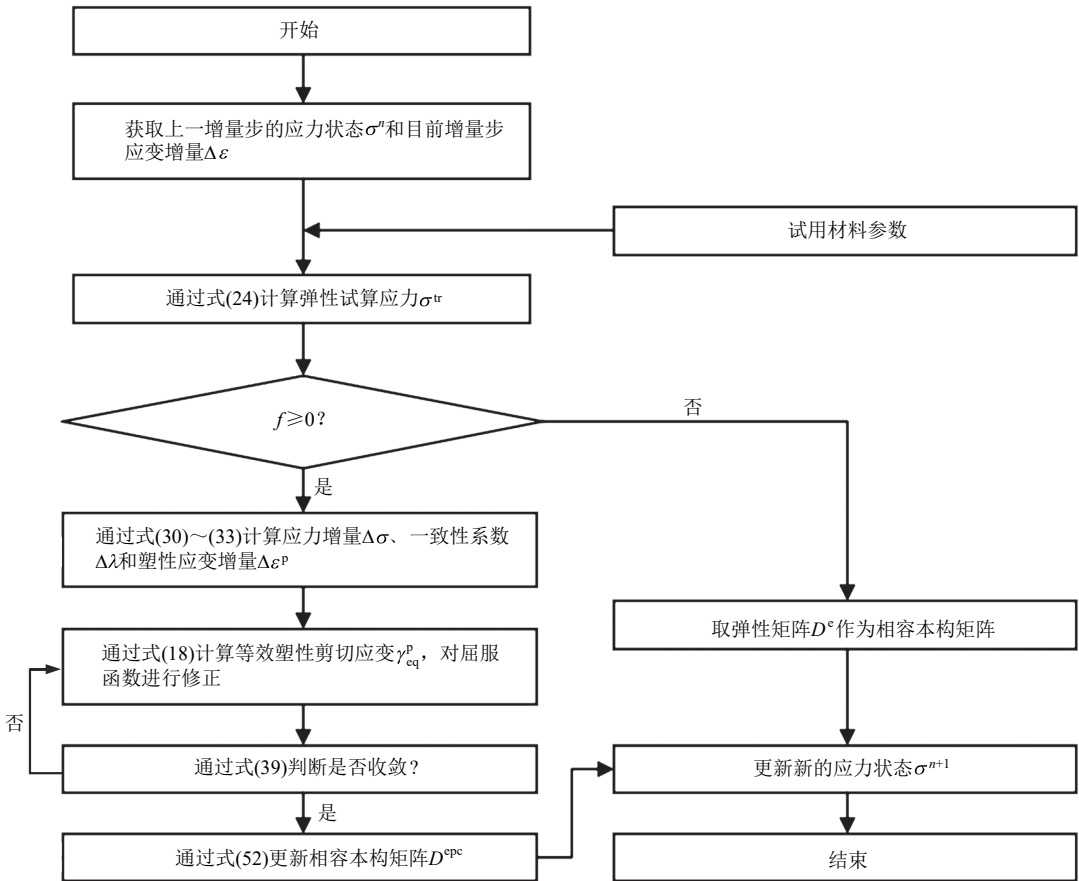


图 4 ABAQUS 中 GZZ 本构模型的计算流程

Fig.4 Calculation flowchart of GZZ-based constitutive model in ABAQUS

表 1 三轴压缩模型参数

Table 1 Parameters of triaxial compression model

E/GPa	ν	m_i	D	GSI	σ_c/MPa
5	0.27	8	0	100	20

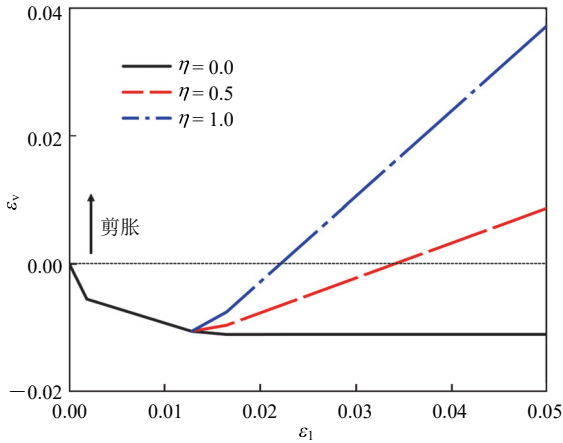


图5 膨胀系数对体积应变的影响

Fig.5 Influence of dilation coefficient on the volumetric strain

为了体现本构模型描述岩石非线性强度特征的能力,本节分别模拟了理想弹塑性材料,应变软化材料,理想弹脆性材料和线性硬化材料的最大主应力-最大主应变曲线,如图6所示。3种材料峰值强度相同(见表1),弹脆性和应变软化材料共用最终残余强度 GSI_r ,当等效塑性剪切应变 γ_{cu}^p 达到 0.02 时,应变软化材料达到最终残余地质强度,软化过程中强度指标 $GSI_{r(k)}$ 通过线性插值确定:

$$GSI_{r(k)} = GSI - (GSI - GSI_r) \gamma_{cu}^p / 0.02 \quad (53)$$

最终残余地质强度指标如下选取^[28]:

$$GSI_r = GSI e^{-0.013 \cdot 4 GSI} \quad (54)$$

由图6分析可知,理想弹塑性材料在达到屈服强度之后,其应力会维持在恒定水平。理想弹脆性材料一旦达到屈服强度,便会立即出现应力跌落现

象,此后则保持在残余应力状态且不再改变。相比之下,应变软化材料的应力会随着最大主应变的持续增大而逐渐降低,直至最终达到残余应力状态。

5.2 圆形隧道开挖应力分析

岩石强度准则常见的应用之一是判别山岭隧道开挖后围岩的稳定性。因此,本节通过提出的基于光滑 GZZ 准则的本构建立如图7所示的数值模型,模型遵循以下假设:

(1) 模型采用 1/4 圆,模型半径 R 为 120 m,隧道开挖半径 r_0 为 8 m,在圆对称平面施加了周向位移约束,在垂直纸面的一侧施加了垂直方向位移约束;

(2) 在模型外边界施加静水压力 p_0 ,轴向施加轴向应力 q ,以此模拟隧道外侧的地应力,假设支护支撑压力 p_i 均匀,径向作用于隧道面;

(3) 岩体连续、均匀、各项同性,初始为弹性状态;

(4) 采用提出的基于光滑 GZZ 准则的数值模型进行计算,岩体力学参数如表2所示。分别采用关联理想弹塑性($\eta = 1$),常体积理想弹塑性($\eta = 0$)和常体积线性硬化模型($\eta = 0$, $K_H = 1\,000, 2\,000$,其中 K_H 为硬化比例系数)进行计算。

本节将数值模型模拟的应力分布与 C. L. Su 等^[29]提出的半解析解结果进行了比较。由图8可知,随着半径 r 的增大,径向应力 σ_r 呈现出逐渐增大的趋势。切向应力 σ_θ 则是先增大而后逐渐减小,其最大值($\sigma_{\theta\max}$)代表塑性区的边界位置。径向位移 u_r 逐渐减小,相较于常体积模型,关联理想弹塑性模型由

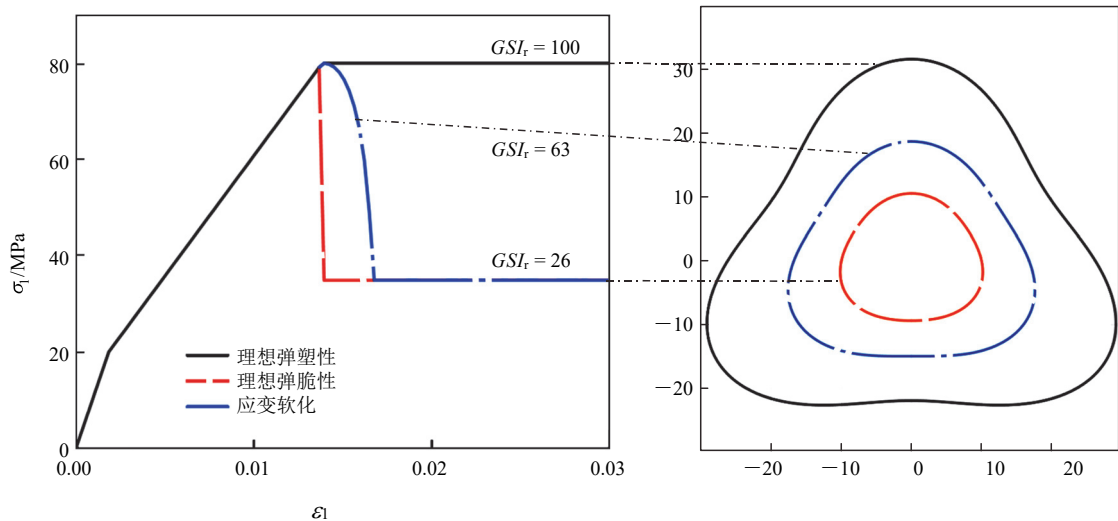


图6 本构模型应变软化行为

Fig.6 Strain softening behavior of the constitutive model

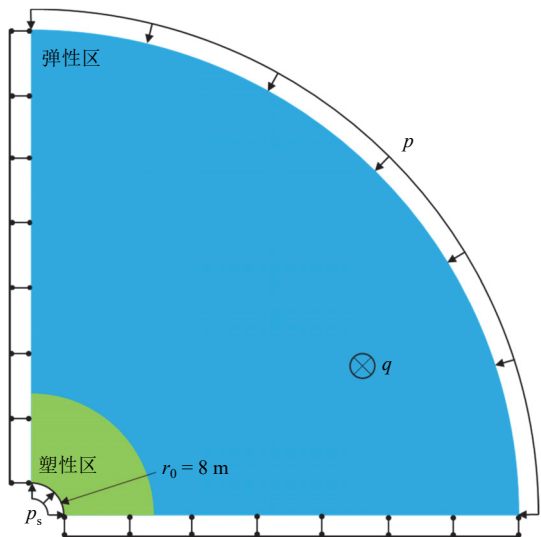


图 7 隧道开挖计算模型

Fig.7 Tunnel excavation calculation model

于产生了更大的体积应变，所以其径向位移 u_r 也更大。数值解结果与解析解基本吻合，证明了本文数

表 2 隧道开挖模拟模型参数

Table 2 Parameters of tunnel excavation model								
E/GPa	ν	m_i	D	GSI	σ_c/MPa	p_0/MPa	q/MPa	p_t/MPa
5	0.35	8	0	80	40	30	30	2

值计算结果具备较高的准确性。对于硬化模型，由于目前缺少与之对应的解析解，因此将其与对应的理想弹塑性模型进行对比分析，由图 9 可以推断出，硬化比例系数 K_H 越大，塑性区内岩体强度越高，进而产生了较大的切向应力 σ_θ 以及较小的径向位移 u_r ，这一结果体现了本文本构模型具备描述岩体非线性强度特性的能力。

5.3 模型隧道试验验证

高地应力和复杂应力条件下开挖卸荷岩体三维、非线性应力和变形响应是深埋隧道工程的重要特征。本节将借助模型试验^[30]与不同强度准则数值计算结果展开比较，以此验证光滑 GZZ 准则对深埋

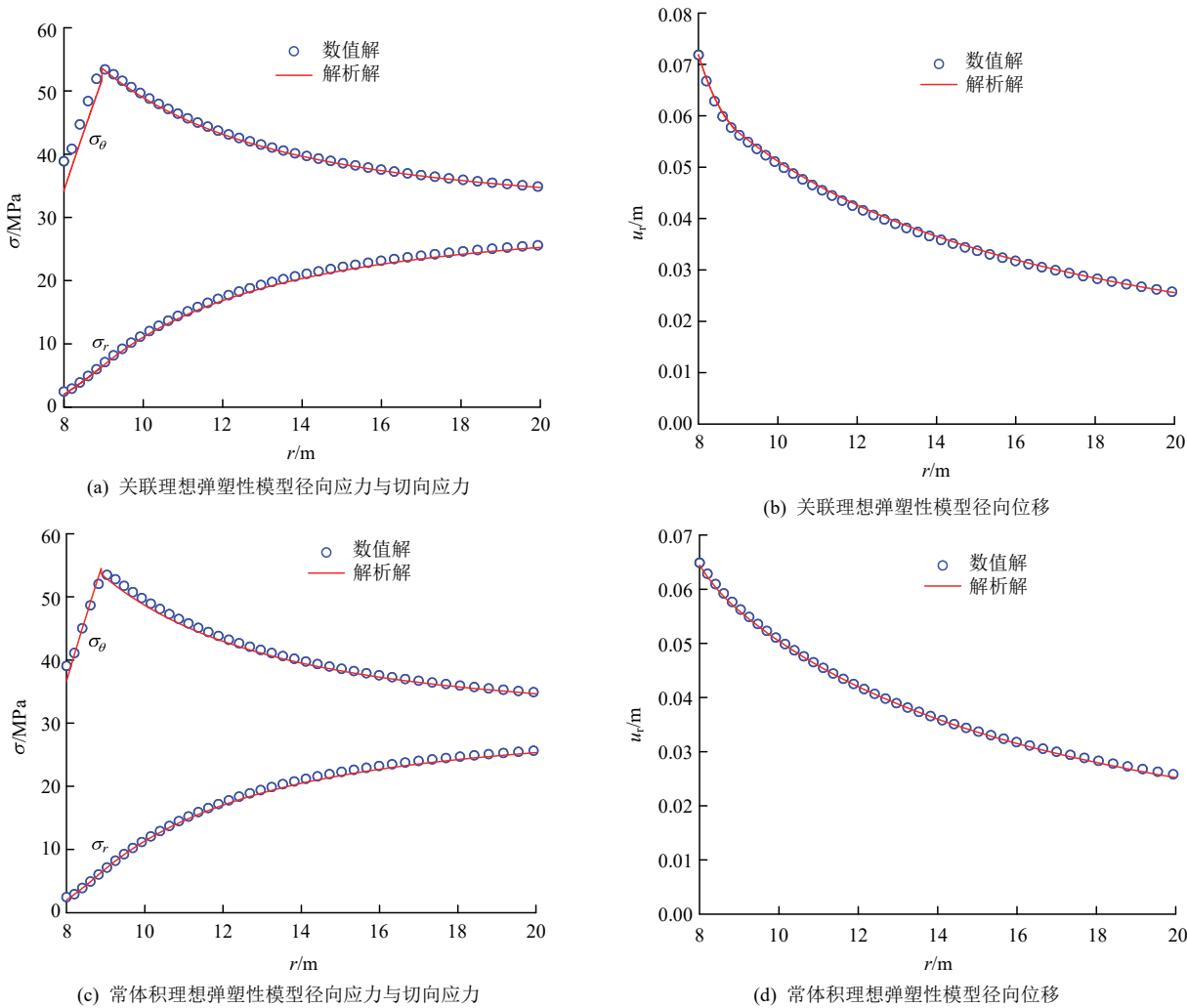


图 8 数值解与解析解对比图

Fig.8 Comparison of numerical solution and analytical solution

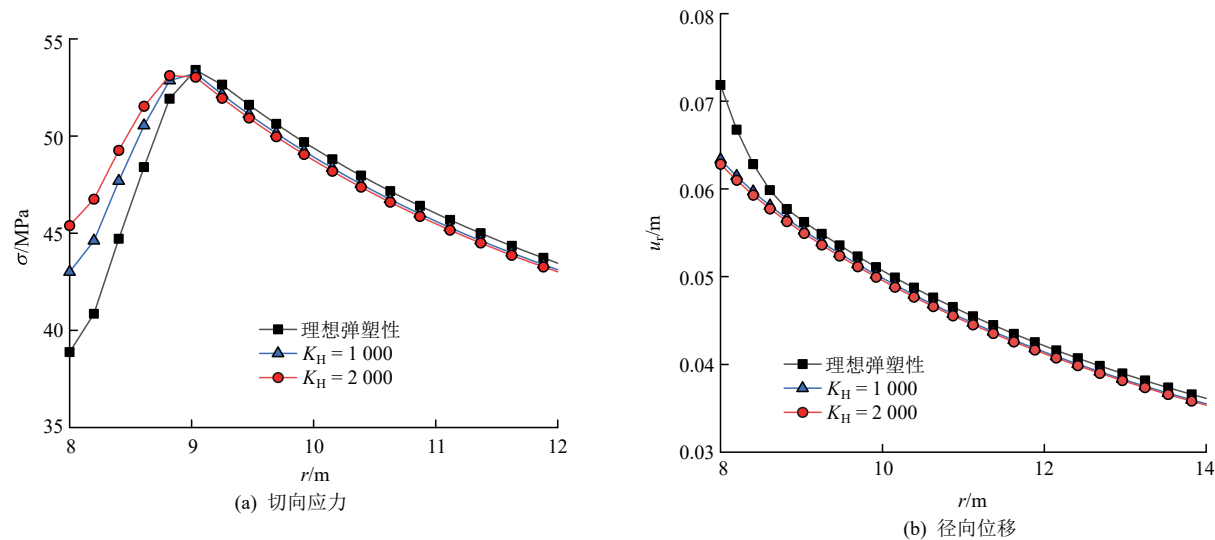


图9 理想弹塑性与硬化模型对比图

Fig.9 Comparison of ideal elastoplastic and hardened models

隧道精确分析的适用性。

模型试验尺寸为 $2\text{ m}\times 2\text{ m}\times 0.4\text{ m}$ ，隧道模型尺寸为 $372\text{ mm}\times 223\text{ mm}$ ，相似比为30，可用于模拟大小为 $11.16\text{ m}\times 6.69\text{ m}$ 的实体隧道，如图10所示，其中， σ_{H1} 为模型顶部施加的侧向荷载， σ_{H2} 为模型底部施加的侧向荷载。模型前、后和底部边界固定，试验在模型顶部和两侧施加荷载，对隧道拱顶的沉降变形进行了检测。顶部施加均匀荷载模拟上部岩石压力，两侧加载以模拟侧向压力。侧向荷载随埋深增大而增大，保持侧压系数($k = \sigma_x / \sigma_z$)恒定。试验采用的模型岩石力学参数如表3所示。

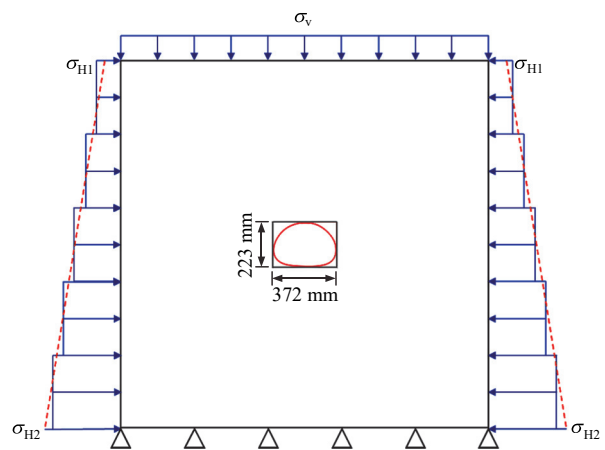


图10 模型试验加载方式

Fig.10 Model test loading method

表3 模型岩石物理力学参数

Table 3 Physico-mechanical parameters of model rock

$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	c/MPa	$\varphi(^{\circ})$	E/GPa	ν	m_i	D	GSI	σ_c/MPa
2 100	0.016	35	0.09	0.32	21	0	100	0.051

注： ρ 为密度， c 为黏聚力， φ 为内摩擦角。

蔡武强^[7]基于 GeoFBA3D 建立了三维有限元数值模型，分别采用 Mohr-Column(MC)、外接 Drucker-Prager(DP)、GHB 和光滑 GZZ 准则对不同埋深的模型隧道进行了数值计算。隧道模拟埋深分别为 100，400，750，1 000 和 1 250 m，通过施加梯形荷载保证侧压系数恒定。

表 4 和图 11 比较了不同埋深下实际隧道模型的拱顶沉降、蔡武强^[7]对不同强度准则的数值模拟结果以及本文方法的数值模拟结果。由模型试验结果可以看出，拱顶沉降变形值随埋深的增大呈现出明显的非线性变化趋势。MC 准则对隧道变形的预测值过于保守，在埋深较大时的预测值明显大于实测值。外接 DP 准则计算的岩石强度较高，在侧压系数恒定的高应力状态下，大部分岩石仍处于弹性状态，因此沉降预测结果接近一条直线。GHB 和光滑 GZZ 准则相对精度最高，但在埋深为 750，1 000 m 时误差较大。H. H. Zhu 等^[16]指出，误差较大的原因

表 4 拱顶沉降变形试验数据与数值模拟结果的对比

Table 4 Comparison between experimental data and numerical simulation results of arch settlement deformation

模拟埋深/m	变形试验值/mm	数值模拟结果/mm			
		MC	DP	GHB	光滑 GZZ
100	0.72	0.45	0.89	0.45	0.75
400	3.80	7.21	3.12	6.43	3.52
750	17.18	22.01	6.25	21.13	11.90
1 000	31.00	42.53	8.55	32.87	24.44
1 250	46.10	63.63	11.48	48.01	45.82
平均相对误差		46.1%	50.5%	28.5%	12.8%

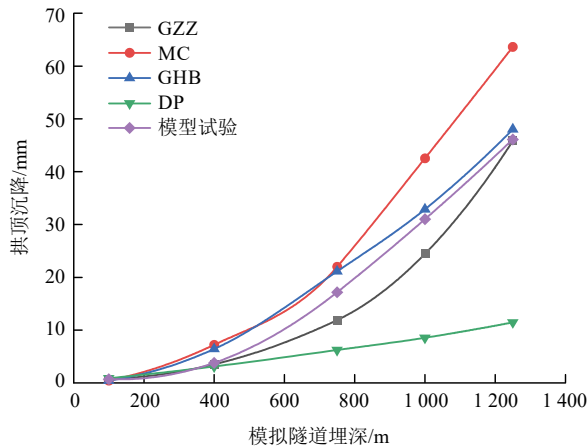


图 11 模拟结果与试验值对比

Fig.11 Comparison of simulation results and experimental values

是数值分析没有考虑模型试验中隧道拱顶和路肩处的岩石崩落,是有限元计算的固有局限性,而不是本构模型导致的误差。从结果可以看出,基于光滑 GZZ 准则的本构模型相对计算误差较小,与变形试验值较为接近,证明了本文提出的数值模型实际应用的可行性。

6 结 论

本文针对基于光滑 GZZ 准则在弹塑性本构模型的数值实现开展研究,通过理论分析和数值计算,取得了以下成果:

(1) 对光滑 GZZ 准则塑性势函数进行了改进,使其完全由应力不变量表示。改进后的光滑 GZZ 准则无需使用主应力进行计算,可直接在一般空间进行应力更新,简化了计算流程,提高了计算效率,克服了原准则在 ABAQUS 中应用困难的问题。

(2) 本文提出的弹塑性本构模型考虑了岩石的膨胀和非线性强度特性,适用于各种力学性质不同的材料,为模拟岩石在复杂应力条件下的力学行为提供了更准确的模型。

(3) 在 ABAQUS 中实现了基于光滑 GZZ 准则的本构模型,计算结果与解析解和试验结果误差较小,能够应用于模拟隧道开挖引起的应力重分布和位移。丰富了光滑 GZZ 准则在工程上的应用,为深埋隧道工程应力和位移规律研究提供了一种新的方法。

参考文献(References):

[1] HOEK E, BROWN E T. Underground excavations in rock[M]. [S. l.]:

CRC Press, 1980: 131 - 178.

- [2] 何满潮, 谢和平, 彭苏萍, 等. 深部开采岩体力学研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(16): 2 803 - 2 813.(HE Manchao, XIE Heping, PENG Suping, et al. Study on rock mechanics in deep mining engineering[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(16): 2 803 - 2 813.(in Chinese))
- [3] ZHU H H, YAN J X, LIANG W H. Challenges and development prospects of ultra-long and ultra-deep mountain tunnels[J]. Engineering, 2019, 5(3): 384 - 392.
- [4] QIAN Q H, ZHOU X P. Failure behaviors and rock deformation during excavation of underground cavern group for Jinping I hydropower station[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2018, 51(8): 2 639 - 2 651.
- [5] CHENG T, HE M C, LI H R, et al. Experimental investigation on the influence of a single structural plane on rockburst[J]. Tunnel and Underground Space Technology, 2023, 132(1): 104914.
- [6] HOEK E, BROWN E T. Practical estimates of rock mass strength[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1997, 34(8): 1 165 - 1 186.
- [7] 蔡武强. 岩体三维精细本构理论与深埋隧道应力控制设计分析方法[博士学位论文][D]. 上海: 同济大学, 2022.(CAI Wuqiang. Three-dimensional refined constitutive theory of rock mass and its integration in stress control-based design and analysis of deep tunnel[Ph. D. Thesis][D]. Shanghai: Tongji University, 2022.(in Chinese))
- [8] PAN X D, HUDSON J A. A simplified three dimensional Hoek-Brown yield criterion[C]// Paper Presented at the ISRM International Symposium. Madrid, Spain: [s. n.], 1988: 95 - 103.
- [9] ZHANG L Y, ZHU H H. Three-dimensional Hoek-Brown strength criterion for rocks[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(9): 1 128 - 1 135.
- [10] ZHANG Q, ZHU H H, ZHANG L Y. Modification of a generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2013, 59(1): 80 - 96.
- [11] WILLAM K J. Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete[J]. International Association of Bridge Structural Engineers, 1975, 19(1): 1 - 30.
- [12] 俞茂宏. 强度理论新体系[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1992: 115 - 140.(YU Maohong. New system of strength theory[M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 1992: 115 - 140.(in Chinese))
- [13] CAI W Q, ZHU H H, LIANG W H, et al. A new version of the generalized Zhang-Zhu strength criterion and a discussion on its smoothness and convexity[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2021, 54(8): 4 265 - 4 281.

- [14] XIAO Y M, XIAO Y F, GUO Y F. Elastic-plastic response of tunnel in GZZ-based constitutive model[C]// Geoshanghai 2024 International Conference. London: IOP Publishing Ltd., 2024: 012011.
- [15] CAI W Q, ZHU H H, LIANG W H. Three-dimensional stress rotation and control mechanism of deep tunneling incorporating generalized Zhang-Zhu strength-based forward analysis[J]. Engineering Geology, 2022, 308(1): 106806.
- [16] ZHU H H, ZHANG Q, HUANG B Q, et al. A constitutive model based on the modified generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2017, 98(1): 78 – 87.
- [17] CHEN H H, ZHU H H, ZHANG L Y. A unified constitutive model for rock based on newly modified GZZ criterion[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2021, 54(2): 921 – 935.
- [18] XIAO Y M, HE M C, QIAO Y F, et al. A novel implementation method of GZZ-based constitutive model into FLAC^{3D}[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2024, 145(1): 105601.
- [19] CLAUSEN J, DAMKILDE L. An exact implementation of the Hoek-Brown criterion for elasto-plastic finite element calculations[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2008, 45(6): 831 – 847.
- [20] SU C C, LU D C, ZHOU X, et al. An implicit stress update algorithm for the plastic nonlocal damage model of concrete[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2023, 414(1): 116189.
- [21] ZHOU X, LU D C, ZHANG Y N, et al. An open-source unconstrained stress updating algorithm for the modified Cam-clay model[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2022, 390(1): 114356.
- [22] ZHOU X, SHI A Y, LU D C, et al. A return mapping algorithm based on the hyper dual step derivative approximation for elastoplastic models[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2023, 417(1): 116418.
- [23] SORENSEN E, CLAUSEN J, DAMKILDE L. Finite element implementation of the Hoek-Brown material model with general strain softening behavior[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2015, 78(1): 163 – 174.
- [24] SCHERZINGER W M. A return mapping algorithm for isotropic and anisotropic plasticity models using a line search method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, 317(1): 526 – 553.
- [25] HOEK E, BROWN E T. The Hoek-Brown failure criterion and GSI-2018 edition[J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2019, 11(3): 445 – 463.
- [26] MOGI K. Effect of the intermediate principal stress on rock failure[J]. Journal of Geophysical Research, 1967, 72(20): 5 117 – 5 131.
- [27] ZHANG L Y. A generalized three-dimensional Hoek-Brown strength criterion[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2008, 41(6): 893 – 915.
- [28] CAI M, KAISER P K, TASAKA Y, et al. Determination of residual strength parameters of jointed rock masses using the GSI system[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2007, 44(2): 247 – 265.
- [29] SU C L, CAI W Q, ZHU H H. Elastoplastic semi-analytical investigation on a deep circular tunnel incorporating generalized Zhang-Zhu rock mass strength[J]. Computer and Geotechnics, 2020, 150(1): 104926.
- [30] VU B T. Investigation on progressive failure of deep weak rock tunnels by physical model tests and numerical analyses[Ph. D. Thesis][D]. Shanghai: Tongji University, 2014.