引力拉氏量和局部 de Sitter 不变性

吴詠时　　李根道　　郭汉英
（中国科学院物理研究所）（中国科学院数学研究所）（中国科学院原子能研究所）

一

最近，我们提出了引力规范理论的一种可能的方案[1]．与广义相对论以及引力规范理论的其他方案相比，这个方案的特点是，从局部 Lorentz 不变性和引力决定时空的几何性质的前提出发，在引力拉氏量中加进了通常规范场拉氏量的动能项，得到描述引力场的一组新的方程——Einstein-杨振宁方程．

但是，我们知道，4-维正常双曲 Riemann 流形所可能允许的最大的运动群并不是 Lorentz 群，而是 de Sitter 群——一个综合了平移和 Lorentz 转动的 10 参数单纯李群[2]．因此，既然时空是由正常双曲 Riemann 流形描写，时空的几何性质又要由引力场决定，那么就应当要求引力场具有比局部 Lorentz 不变性更高的对称性——局部 de Sitter 不变性．

本文在引力的 Lorentz 规范理论的基础上，提出一种局部 de Sitter 不变的引力拉氏量，得出相应的场方程．我们发现，这样处理有可能将引力理论进一步纳入规范场论的形式．

二

在引力的 Lorentz 规范理论中，引力场的基本场量是 e^a_μ 和 $B^{ab}{}_\mu$，它们有变换性质

$$e^a_\mu \to \tilde{e}^a_\mu = l^a_b e^b_\mu \quad \mathrm{L}^{-1} = (l^a_b)_{0\leqslant a,b\leqslant 3} \in \mathfrak{L}$$
$$B^a{}_{b\mu} \to \tilde{B}^a{}_{b\mu} = (\mathrm{L}^{-1} B_\mu L)^a_b + (\mathrm{L}^{-1}\partial_\mu \mathrm{L})^a_b \in \mathfrak{l} \tag{1}$$

将 Lorentz 群 $\mathfrak{L}$ 的元素 L 写为 5×5 矩阵

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} \mathrm{L} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} \tag{2}$$

显然，$\mathscr{L}$ 满足

$$\mathscr{L}'\mathrm{J}\mathscr{L} = \mathrm{J}. \qquad \mathrm{J} = (\mathrm{J}_{AB}), \quad (A,\ B = 0\text{—}3,\ 5)$$
$$\mathrm{J}_{AB} = \mathrm{diag}\,(1-1-1-1\theta) \quad \theta = \pm 1 \tag{3}$$

我们知道，使 J 不变的群是 5-维伪欧氏空间中的旋转群，$\theta = \pm 1$ 分别对应于群 $SO(3,2)$ 和 $SO(4,1)$ 它们分别与负或正曲率 de Sitter 群 $\mathfrak{S}$ 同构．(3)式表明群 $\mathfrak{L}$ 是群 $\mathfrak{S}$ 的子群．

用 e^a_μ 及 $B^{ab}{}_\mu$ 组成下面的 5×5 矩阵

$$\mathscr{B}_\mu = (\mathscr{B}^A{}_{B\mu}) = \begin{pmatrix} B^a{}_{b\mu} & -\alpha\theta e^a_\mu \\ \alpha e_{b\mu} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

α 是量纲常数，$[\alpha] = \mathrm{L}^{-1}$．不难看出，$\mathscr{B}^A{}_{B\mu}$ 在 de Sitter 李代数 $\mathfrak{s}$ 上，同时 (1) 式可写为

$$\mathscr{B}^A{}_{B\mu} \to \tilde{\mathscr{B}}^A{}_{B\mu} = (\mathscr{L}^{-1}\mathscr{B}_\mu\mathscr{L})^A_B + (\mathscr{L}^{-1}\partial_\mu\mathscr{L})^A_B \in \mathfrak{s} \tag{5}$$

因此 $\mathscr{B}^A{}_{B\mu}$ 是(扩充的) Lorentz 联络．

利用(4)可以定义曲率 $\mathscr{F}^A{}_{B\mu\nu}$

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathscr{B}_\nu - \partial_\nu\mathscr{B}_\mu + [\mathscr{B}_\mu, \mathscr{B}_\nu],$$
$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = (\mathscr{F}^A{}_{B\mu\nu}) \in \mathfrak{s} \tag{6}$$

将引力拉氏量取为

$$\mathscr{L}_G = -\frac{\eta}{4} T_r(\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu}) \tag{7}$$

$$= -\frac{\eta}{4} t_r(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \alpha^2\eta\theta t_r(e_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\alpha^2\eta\theta t^a{}_{\mu\nu} t_a{}^{\mu\nu} - \alpha^4\eta t_r(e_{\mu\nu}e^{\mu\nu}) \tag{8}$$

本文 1973 年 10 月 22 日收到．

其中 η 是耦合常数,具有作用量的量纲,而

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu + [B_\mu, B_\nu],$$

$$F_{\mu\nu} = (F^a{}_{b\mu\nu})$$

$$t^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + B^a{}_{c\mu} e^c_\nu - B^a{}_{c\nu} e^c_\mu \quad (9)$$

$$e^a{}_{b\mu\nu} = \frac{1}{2}(e^a_\mu e_{b\nu} - e^a_\nu e_{b\mu}) \quad e_{\mu\nu} = (e^a{}_{b\mu\nu})$$

显然,(7)式是局部 de Sitter 不变的,(8)式各项分别是局部 Lorentz 不变的.(8)式中前两项是我们原来所取的拉氏量[1],第 4 项相当于"宇宙"项.由此,我们便可以确定耦合常数 α、η 与引力常数 x 及"宇宙"常数 Λ 之间的关系:

$$\alpha^2 = -\frac{1}{3}\theta\Lambda, \quad \eta = -3x\Lambda^{-1} \quad (10)$$

这里 x 与牛顿引力常数 k 的关系为

$$x^{-1} = 16\pi k \quad (c = 1) \quad (11)$$

包括物质场 ψ 在内的总拉氏量为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \mathscr{L}_m(\psi, \psi_{\|\mu}, g_{\mu\nu}) - \frac{\eta}{4}T_r(\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}^{\mu\nu}) \\ &= \mathscr{L}_m(\psi, \psi_{\|\mu}, g_{\mu\nu}) - x(F + 2\Lambda) - \frac{\eta}{4}t_r(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ &\quad + \frac{x}{2}t^a{}_{\mu\nu}t_a{}^{\mu\nu}\end{aligned} \quad (12)$$

其中"$\|$"是由 Lorentz 联络 $B^{ab}{}_\mu$ 定义的双重协变微分,F 是标量曲率 $F = F^{\lambda\mu}{}_{\lambda\mu}$.

三

假定最小作用量原理成立,对 $\mathscr{B}^A{}_{B\mu}$ 变分,便得到引力场方程

$$\mathscr{F}_{AB}{}^{\mu\nu}{}_{/\!/\nu} = s_{AB}{}^\mu + \frac{1}{\eta}\mathscr{S}_{AB}{}^\mu \quad (13)$$

其中"$/\!/$"是用联络 $\mathscr{B}^{AB}{}_\mu$ 定义的双重协变微分,且

$$\mathscr{S}_{AB}{}^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta\mathscr{B}^{AB}{}_\mu}(\sqrt{-g}\,\mathscr{L}_m) \quad (14)$$

$$s^\mu = (\mathscr{S}^A{}_B{}^\mu)_{A,B=0-3,5}$$

$$= -\frac{1}{2\alpha^2\theta}\mathscr{T}^{\lambda\mu}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha\theta e^a{}_\lambda \\ \alpha e_{b\lambda} & 0\end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathscr{T}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathrm{T}_r(\mathscr{F}_{\lambda\sigma}\mathscr{F}^{\lambda\sigma}) - \mathrm{T}_r(\mathscr{F}_\lambda{}^\mu\mathscr{F}^{\lambda\nu}) \quad (16)$$

可以将场方程(13)分解为

$$t_a{}^{\mu\nu}{}_{/\!/\nu} = \frac{1}{2x}(\mathscr{T}_a{}^\mu + T_a{}^\mu)$$

$$F_{ab}{}^{\mu\nu}{}_{/\!/\nu} = \frac{1}{\eta}S_{ab}{}^\mu \quad (17)$$

或者

$$t_a{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} + G^\mu{}_a - \Lambda e^\mu_a = \frac{1}{2x}(\eta t_a{}^\mu - 2x\tau_a{}^\mu + T_a{}^\mu)$$

$$F_{ab}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} - \frac{2x}{\eta}(e_{ab}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} - t_{[a}{}^{\mu\nu}e_{b]\nu}) = \frac{1}{\eta}S_{ab}{}^\mu \quad (18)$$

其中

$$G^\mu{}_a = F^{\lambda\mu}{}_{\lambda\nu}e^\nu_a - \frac{1}{2}e^\mu_a F \quad (19)$$

$$t^\mu{}_a = e^\nu_a t^\mu{}_\nu,$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}t_r(F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}) - t_r(F_{\lambda\mu}F^\lambda{}_\nu) \quad (20)$$

$$\tau^\mu{}_a = e^\nu_a\tau^\mu{}_\nu,$$

$$\tau_{\mu\nu} = \frac{1}{4}g_{\mu\nu}t^a{}_{\lambda\sigma}t_a{}^{\lambda\sigma} - t^a{}_{\lambda\mu}t_a{}^\lambda{}_\nu \quad (21)$$

$$T_a{}^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta e^a_\mu}(\sqrt{-g}\,\mathscr{L}_m) \quad (22)$$

$$S_{ab}{}^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta}{\delta B^{ab}{}_\mu}(\sqrt{-g}\,\mathscr{L}_m) \quad (23)$$

对于无挠的情形,方程简化为

$$G^\mu{}_a - \Lambda e^\mu{}_a = \frac{1}{2x}(\eta t_a{}^\mu + T_a{}^\mu)$$

$$F_{ab}{}^{\mu\nu}{}_{\|\nu} = \frac{1}{\eta}S_{ab}{}^\mu \quad (24)$$

这就是带有"宇宙"项的无挠的 Einstein-杨振宁方程.

此外,由拉氏量在任意坐标变换下的不变性和局部 Lorentz 不变性,同样可以得到原方案[1]中的守恒方程和恒等式.

四

这里，对本文的结果作一简单的讨论.

1. 在真空无挠的情形下，并略去“宇宙”项，我们得到的方程便简化为真空无挠时的 Einstein-杨振宁方程. 由于后者是可以解释红移、光线偏折和水星进动三大效应的[1]，因此，这里提出的方案同样可以解释这三个效应.

2. 引力场方程(13)中出现的 $\mathscr{T}^{\mu\nu}$ 项，在形式上与电磁场的能量动量张量完全一样，也是[1]中得到的引力场的 $t_{\mu\nu}$ 项的推广. 这一项很可能与引力场的能量动量有关，尤其是在物质场内部，由于这一项的存在，会导至与广义相对论以及下面将提到的 Einstein-Cartan 理论很大的不同.

3. 本文在[1]的基础上，进一步考虑了物质场的自旋对引力场的影响. 早在二十年代，E. Cartan 和 H. Weyl 就建议把物质的自旋和时空的挠率结合起来，修改爱因斯坦场方程[3]；六十年代以来，又有人从引力规范理论的角度，从新提出了这一问题[4]. 这种对爱因斯坦理论的修改，可以通过下面的逻辑关系表示出来[5]：

Lorentz 旋转——————时空曲率 ——Einstein 方程—— 能量动量张量——————平 移 变 换

Holonomy 定理　　　　　　　　　　　　　　　　Noether 定理

平 移 变 换——————时空挠率 ——Cartan 方程—— 自 旋 流 密 度——————Lorentz 旋转

左段表示对称性和时空几何性质的对应，右段表示对称性和物质系统的物理性质的对应，中段表示修改后的理论如何通过 Einstein-Cartan 方程把表示引力场的时空几何性质和物质系统的性质联系起来. 从当代物理学的角度来看，考虑自旋的引力作用是很重要的，尽管在一般情形下，自旋的引力效应非常微弱，正如 Kibble[4] 所指出，由于考虑了自旋，引力场自身会在一定条件下表现出排斥效应；由于这种排斥效应，在一定条件下就会避免广义相对论中引力坍缩到奇点的可能性[6].

但是，只要考查一下 Einstein-Cartan 方程的逻辑联系，就会发现这组方程所反映的描述引力的几何量和物质性质的联系，从对称性的角度来看并不是很自然的. 例如，能量动量是物质在平移变换下不变的物理量，它所决定的却不是时空在平移变换下的几何性质——挠率，相反，它所决定的是时空在 Lorentz 旋转下的几何性质——曲率. 对于自旋也有类似的情形. 当然，这种不自然的联系，在广义相对论中就存在，而 Einstein-Cartan 方程并没有消除这种不自然的联系，反而暴露得更加明显.

如果坚持时间和空间是物质的存在形式这一辩证唯物主义观点，同时把广义相对论和 Einstein-Cartan 理论在一定程度上反映的时空性质由物质运动决定的合理内核加以发展，那就应当探索在描述引力的时空几何性质和物质系统的物理性质之间，是否应该有下面这种更直接的内在联系：

Lorentz 旋转——————时空曲率 ……引力场方程…… 能量动量张量——————平 移 变 换

Holonomy 定理　　　　　　　　　　　　　　　　Noether 定理

平 移 变 换——————时空挠率 ………………… 自 旋 流 密 度——————Lorentz 旋转

考查一下本文得到的引力场方程(13)的分解形式(17)，不难看出它们恰恰在一定程度上反映了这种更直接的联系. 因此，这里得到的引力场方程可能将更深刻地揭示引力场的本质.

4. 在本文提出的方案中，所谓“宇宙”项是由局部 de Sitter 不变性的要求自然出现的，同时，耦合常数 α 和 η 可由 $\varkappa$ 和 Λ 完全确

定．由于 $\varkappa$ 是已知的，因此，如果 Λ 能由观测完全确定，则 α 和 η 就完全确定了．不过，由于 Λ 极小，因此这样确定的 η 可能过大．可以考虑在拉氏量(7)中再引入常数项，这样并不改变场方程(13)的形式，同时又留有余地．

5. 本文提出的方案在形式上更接近通常从内部对称性引入的规范场．不过，这里的方案是在引力的 Lorentz 规范理论的基础上，对引力拉氏量加以更高的局部对称性——局部 de Sitter 不变性的要求得到的．是不是应当从整体 de Sitter 不变的场论出发，进而要求物质系统具有局部 de Sitter 不变性，并建立引力的 de Sitter 规范理论呢？从通常规范理论的观念看来是肯定的．而且，这样得到的结果也可能更加完善、更深刻地反映物理现象的本质．

作者对杨振宁教授，以及陆启铿、戴元本等同志对一些问题的讨论表示感谢．

参考文献

[1] 郭汉英、吴詠时、张元仲，科学通报，18(1973)，2，72．
吴詠时、邹振隆、陈时，科学通报，18(1973)，3，119．
张元仲、郭汉英，科学通报，18(1973)，3，122．

[2] Dyson, F. J., *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78** (1972), 635.

[3] Cartan, E., *Comptes Rendus*, **174** (1922), 593; *Ann. Ec. Norm. Sup.*, I partie, **40** (1923), 325; II partie, **41** (1924), 1; **42** (1925), 17. Weyl, H., *Z. Physik*, **56** (1929), 330.

[4] Sciama, D. W., in *Recent Developments in General Relativity*, 1962, 415; Kibble, T. W. B., *J. Math. Phys.*, **2** (1961), 212.

[5] Trautman, A., *Gen. Rel. Grav.*, **3** (1972), 167.

[6] Trautman, A., *Nature*, **242** (1973), 7.

爱因斯坦-杨振宁方程的简单内解

黄　　硼　　　　郭汉英

（中国科学院北京天文台）（中国科学院原子能研究所）

按照最近提出的引力规范理论的一种方案[1]，引力场由爱因斯坦-杨振宁方程描写．本文在空间均匀各向同性的假定下，求出了这组方程关于无自旋理想流体物质的无挠内解．

考虑带有“宇宙学项”的无旋、无挠的爱因斯坦-杨振宁方程及相应的守恒方程：

$$
\begin{gathered}
R_\mu{}^\nu - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu R - \delta_\mu^\nu \Lambda = -\frac{1}{2\varkappa}(\eta t_\mu{}^\nu + T_\mu{}^\nu) \\
R_{\mu\nu}{}^{\lambda\sigma}{}_{;\sigma} = 0 \\
t_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0 \\
T_\mu{}^\nu{}_{;\nu} = 0
\end{gathered} \tag{1}
$$

其中

$$
t_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\sigma\tau} R^{\beta\alpha\sigma\tau} + R_{\alpha\beta\sigma\mu} R^{\beta\alpha}{}_\nu{}^\sigma \tag{2}
$$

用 Robertson-Walker 度规

$$
ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{\left(1 + \frac{1}{4}kr^2\right)^2}(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \quad (c = 1) \tag{3}
$$

在共动坐标系中，$T_\mu{}^\nu$ 可表为：

$$
T_\mu{}^\nu = \mathrm{diag}\ (\rho - p - p - p) \tag{4}
$$

于是方程组(1)可化为：

$$
\begin{aligned}
&A + \frac{\Lambda}{3} = \frac{1}{6\varkappa}\rho - \frac{1}{2\varkappa}\eta(A^2 - B^2) \\
&A + 2B + \Lambda = -\frac{1}{2\varkappa}p + \frac{1}{2\varkappa}\eta(A^2 - B^2)
\end{aligned}
$$

本文 1973 年 10 月 26 日收到．