与由抛物算子生成的分数阶 Poisson 型算子相关的微分变换算子的有界性

张超

浙江工商大学统计与数学学院, 杭州 310018

E-mail: zaoyangzhangchao@163.com

收稿日期: 2021-05-14; 接受日期: 2021-07-21; 网络出版日期: 2022-02-18

国家自然科学基金 (批准号: 11971431 和 11401525)、浙江省自然科学基金 (批准号: LY18A010006) 和浙江省一流学科 A 类 (浙江工商大学统计学) 资助项目

摘要 本文考虑如下类型级数:

$$T_N^\alpha f(x, t) = \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad N = (N_1, N_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \alpha > 0$$

的收敛性, 其中, $\{\mathcal{P}_\tau^\alpha\}_{\tau>0}$ 为由抛物算子 $L := \partial_t - \Delta$ 生成的分数阶 Poisson 型算子, Δ 为 Laplace 算子, $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为有界实数序列, $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为递增实数序列. 本文将主要证明算子 T_N^α 及其极大算子 $T^* f(x, t) = \sup_{N \in \mathbb{Z}^2} |T_N^\alpha f(x, t)|$ 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ 空间和 $\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 空间上的有界性. 本文还证明了极大算子 T^* 对于具有局部支撑的函数 f 的局部增长性与奇异积分算子的局部增长性具有相同的阶. 另外, 本文还证明了, 如果 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, 则极大算子 T^* 的局部增长性介于奇异积分与 Hardy-Littlewood 极大算子的局部增长性之间.

关键词 微分变换 分数阶 Poisson 型算子 极大算子**MSC (2020) 主题分类** 42B20, 42B25

1 引言

本文研究与由抛物算子 $L := \partial_t - \Delta$ 生成的某些算子相关的微分变换算子理论. 在该理论中, 由 L 生成的热半群

$$e^{-\tau L} = e^{-\tau(\partial_t - \Delta)} = e^{-\tau \partial_t} \circ e^{\tau \Delta}, \quad \tau > 0$$

将会发挥核心作用. 该半群可以由一个具有具体核的积分给出: 对于任意的函数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$,

$$e^{-\tau(\partial_t - \Delta)} \varphi(x, t) = e^{\tau \Delta} \varphi(x, t - \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} W(y, \tau) \varphi(x - y, t - \tau) dy, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (1.1)$$

英文引用格式: Zhang C. Boundedness of differential transforms for fractional Poisson type operators generated by parabolic operators (in Chinese). Sci Sin Math, 2022, 52: 1283–1306, doi: 10.1360/SSM-2021-0087

其中 W 是 Gauss-Weierstrass 核

$$W(y, \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}}.$$

先介绍一类分数阶 Poisson 公式, 该公式将在本文的研究中发挥重要作用. 对于 $0 < \alpha < 1$, 关于函数 f 的分数阶 Poisson 算子为

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\tau^\alpha f(x) &= \frac{\tau^{2\alpha}}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\tau^2/(4s)} e^{-sL} f(x) \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-r} e^{-\frac{r^2}{4r}L} f(x) \frac{dr}{r^{1-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \tau > 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

由 (1.2) 可知, 分数阶 Poisson 算子可以通过热半群 $\{e^{-sL}\}_{s>0}$ 得到. (1.2) 可以通过谱理论得到. 当 $L = -\Delta$ 时, Caffarelli 和 Silvestre^[1] 利用分数阶 Poisson 公式解决了与 Δ 相关的一类延拓问题. Stinga 和 Torrea^[2] 定义了与 Hermite 算子 $-\Delta + |x|^2$ 相关的 Poisson 算子. 当 $\alpha = 1/2$ 时, $\mathcal{P}_t^{1/2}$ 正好是 Bochner 从属 Poisson 半群, 参见文献 [3].

我们将主要研究与由抛物算子生成的某些算子相关的微分变换算子的一些性质. 假设 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为递增的正实数序列, $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为有界实数序列, 则可以考虑与算子族 $\{T_s\}_{s>0}$ 相关的微分变换算子

$$Tf = \sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j (T_{a_{j+1}} f - T_{a_j} f).$$

本文将研究与由 (1.2) 定义的分数阶 Poisson 型算子 $\{\mathcal{P}_\tau^\alpha\}_{\tau>0}$ 相关的微分变换算子的性质. 结合 (1.1) 和 (1.2), 有

$$\mathcal{P}_\tau^\alpha f(x, t) = \frac{\tau^{2\alpha}}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-(\tau^2 + |y|^2)/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x - y, t - s) dy \frac{ds}{s^{1+\alpha}}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+.$$

注 1.1 上式中函数 $\mathcal{P}_\tau^\alpha f$ 的 Fourier 变换 $(\mathcal{P}_\tau^\alpha f)^\wedge$ 可以通过 Bessel 函数或者 Macdonald 函数 (这两种函数定义在复数域上) 来刻画, 参见文献 [4].

Jones 和 Rosenblatt^[5] 研究了与缺项序列相关的遍历平均和微分算子级数在 L^p 空间上的有界性. 文献 [6] 利用 Calderón-Zygmund 奇异积分理论^[7] 再次证明了文献 [5] 中的结论. 文献 [8] 证明了与单边分数阶 Poisson 型算子序列相关的微分变换算子的有界性. 文献 [9] 证明了与由 Laplace 算子和 Schrödinger 算子生成的热半群相关的微分变换算子的有界性. 本文将致力于证明与由抛物算子 L 生成的分数阶 Poisson 型算子相关的微分变换算子的有界性.

假设 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为递增正实数序列, $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为有界实数序列. 考虑级数

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t)).$$

对于每个 $N = (N_1, N_2) \in \mathbb{Z}^2$ ($N_1 < N_2$), 定义如下部分和级数:

$$T_N^\alpha f(x, t) = \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t)). \quad (1.3)$$

那么,

$$T_N^\alpha f(x, t) = \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y, t-s) ds dy \\
&= \frac{1}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y, t-s) ds dy.
\end{aligned}$$

记 T_N^α 的核为

$$K_N^\alpha(y, s) = \frac{1}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}}.$$

注意, 上式中的函数 $K_N^\alpha(y, s)$ 的定义域为上半平面 $(y, s) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. 但是, 我们可以将 K_N^α 延拓到整个空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上. 实际上, 因为对于任意 $y \in \mathbb{R}^n$, 当 $s \rightarrow 0^+$ 时, $K_N^\alpha(y, s) \rightarrow 0$, 所以当 $s \leq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$ 时, 可以定义 $K_N^\alpha(y, s) = 0$.

为了得到级数 (1.3) 的几乎处处收敛性, 很自然地, 可以考虑如下与之相关的极大算子:

$$T^* f(x, t) = \sup_N |T_N^\alpha f(x, t)|, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

其中的上确界取遍所有的 $N = (N_1, N_2) \in \mathbb{Z}^2$ ($N_1 < N_2$).

本文中的一些结果是在序列 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为缺项序列的条件下成立的. 称序列为 ρ -缺项序列, 如果存在 $\rho > 1$ 使得 $\frac{a_{j+1}}{a_j} \geq \rho$ ($j \in \mathbb{Z}$). 特别地, 本文将证明算子 T^* 在加权空间 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 上的有界性, 其中 ω 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的通常的 Muckenhoupt A_p 权. 关于 A_p 权的定义和性质, 参见文献 [10, 第 7 章]. 实际上, 我们可以得到如下结果.

定理 1.2 关于算子 T^* , 有以下几个命题成立:

(a) 对于任意 $1 < p < \infty$ 和 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$, 存在依赖于 $n, \rho, \omega, \alpha, p$ 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\|T^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}$$

对所有的 $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 成立.

(b) 对于任意 $\omega \in A_1(\mathbb{R}^{n+1})$, 存在依赖于 n, ρ, ω, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\omega(\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |T^* f(x, t)| > \lambda\}) \leq C \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}, \quad \lambda > 0$$

对所有的 $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 成立.

(c) 若 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, 则对于 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, 要么 $T^* f(x, t) = \infty$, 要么 $T^* f(x, t) < \infty$ a.e. 成立. 当 $T^* f(x, t) < \infty$ a.e. 成立时, 存在依赖于 n, ρ, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\|T^* f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$$

成立.

(d) 若 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})$, 则对于 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, 要么 $T^* f(x, t) = \infty$, 要么 $T^* f(x, t) < \infty$ a.e. 成立. 当 $T^* f(x, t) < \infty$ a.e. 成立时, 存在依赖于 n, ρ, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\|T^* f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \quad (1.4)$$

成立.

由以上定理, 可以立刻得到如下的 a.e. 收敛性.

定理 1.3 (a) 如果 $1 < p < \infty$ 且 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$, 则对于任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$, 当 $N = (N_1, N_2)$ 趋于 $(-\infty, +\infty)$ 时, $T_N^\alpha f$ a.e. 且依 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 范数收敛.

(b) 如果 $p = 1$ 且 $\omega \in A_1(\mathbb{R}^{n+1})$, 则对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$, 当 $N = (N_1, N_2)$ 趋于 $(-\infty, +\infty)$ 时, $T_N^\alpha f$ a.e. 且依测度收敛.

最后, 将给出与分数阶 Poisson 型算子相关的微分变换算子在 L^∞ 空间上的一些结果. 由定理 1.2, 当 $T^*f(x, t) < \infty$ 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上几乎处处成立时, T^* 从 $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 到 $\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上是有界的. 我们将给出一个例子用来说明, 存在 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 使得 $T^*(f) = \infty$ a.e. 成立. 进一步地, 可以给出算子 T^* 在 $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 空间上的局部增长性刻画. 这些结果包含在下面的定理 1.4 和 1.5 中.

定理 1.4 存在 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 、 ρ -缺项序列 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 和 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, 使得 $T^*f(x, t) = \infty$ 对于所有的 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 都成立.

关于算子 T^* 在 $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 空间上的局部增长性刻画, 有如下定理:

定理 1.5 (a) 假设 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, $1 \leq p \leq \infty$, 则对于每个支撑在圆柱体 $\tilde{B} = B(0, 1) \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上的 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, 有

$$\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^*f(x, t)| dx dt \leq C \left(\log \frac{2}{r} \right)^{1/p'} \|v\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$$

成立, 其中, $\tilde{B}_r := B(0, r) \times [-r, r] \subset \tilde{B}$, $2r < 1$.

(b) 当 $1 < p < \infty$ 时, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 ρ -缺项序列 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 、序列 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$ 和支撑在 $\tilde{B}$ 上的函数 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 使得如下命题成立: 对于任意的圆柱体 $\tilde{B}_r \subset \tilde{B}$ ($2r < 1$), 有

$$\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^*f(x, t)| dx dt \geq C \left(\log \frac{2}{r} \right)^{1/(p-\varepsilon)'} \|v\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$$

成立.

(c) 当 $p = \infty$ 时, 存在 ρ -缺项序列 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 、序列 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ 和支撑在 $\tilde{B}$ 上的函数 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 使得如下命题成立: 对于任意的圆柱体 $\tilde{B}_r \subset \tilde{B}$ ($2r < 1$), 有

$$\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^*f(x, t)| dx dt \geq C \left(\log \frac{2}{r} \right) \|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$$

成立.

在上面的命题中, $p' = \frac{p}{p-1}$; 当 $p = 1$ 时, $p' = \infty$.

本文余下内容的结构如下. 第 2 节证明微分变换算子 T_N^α 的一致有界性. 第 3 节给出本文主要结论 (定理 1.2) 的证明: 首先证明一个 Cotlar 型不等式成立, 然后利用向量值的 Calderón-Zygmund 理论来证明定理 1.2. 定理 1.3 的证明在第 4 节中给出. 最后两节分别给出定理 1.4 和 1.5 的证明.

在本文中, 所有不等式中的符号 C 表示依赖于某些指标的常数, 但是该常数不依赖于不等式中所涉及的函数 f .

2 算子 T_N^α 的一致有界性

本节证明微分变换算子 T_N^α 的 L^p 一致有界性. 首先, 在性质 2.2 中证明该算子的 L^2 一致有界性. 在后面的证明中, 我们需要如下引理.

引理 2.1 (参见文献 [8, 引理 2.1]) 假设 $0 < \alpha < 1$, 则对于任意满足 $\operatorname{Re} z_0 > 0$ 和 $|\arg z_0| \leq \pi/4$ 的复数 z_0 , 有

$$\int_0^\infty e^{-z_0 u} e^{-\frac{z_0}{u}} \frac{du}{u^\alpha} = z_0^{1-\alpha} \int_0^\infty \frac{e^{-r} e^{-z_0^2/r}}{r^{2-\alpha}} dr.$$

首先, 给出如下关于算子 T_N^α 的 L^2 一致有界性的结论.

性质 2.2 存在依赖于 n, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty}$ 的常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_N \|T_N^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}$$

成立.

证明 假设 $f \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$. 利用 Plancherel 定理得

$$\|T_N^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} = \left\| \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|v_j\|_{\ell^\infty} \left\| \sum_{j=-\infty}^\infty \int_{a_j}^{a_{j+1}} |\partial_\tau \widehat{\mathcal{P}_\tau^\alpha f}| d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

由 (1.2) 中的第二个等式得

$$\begin{aligned} \partial_\tau \widehat{\mathcal{P}_\tau^\alpha f}(\xi, \varrho) &= C \partial_\tau \int_0^\infty e^{-r} e^{-\frac{\tau^2}{4r}} \widehat{f}(\xi, \varrho) \frac{dr}{r^{1-\alpha}} \\ &= C \partial_\tau \int_0^\infty e^{-r} e^{-\frac{\tau^2}{4r} (i\varrho + |\xi|^2)} \widehat{f}(\xi, \varrho) \frac{dr}{r^{1-\alpha}} \\ &= C \int_0^\infty e^{-r} \tau (i\varrho + |\xi|^2) e^{-\frac{\tau^2}{4r} (i\varrho + |\xi|^2)} \widehat{f}(\xi, \varrho) \frac{dr}{r^{2-\alpha}}. \end{aligned}$$

上式中的 Fourier 变换是有意义的, 参见注 2.3. 从而,

$$\|T_N^\alpha f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \left\| \widehat{f}(\xi, \varrho) \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-r} \tau (i\varrho + |\xi|^2) e^{-\frac{\tau^2}{4r} (i\varrho + |\xi|^2)} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} \right| d\tau \right\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

所以, 由 Plancherel 定理知, 我们只需要证明上式中乘子的一致有界性:

$$|\widehat{K_N^\alpha}(\xi, \varrho)| \leq C \left| \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-r} \tau (i\varrho + |\xi|^2) e^{-\frac{\tau^2}{4r} (i\varrho + |\xi|^2)} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} \right| d\tau \right| \leq C, \quad (\xi, \varrho) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$$

即可. 令 $z_0 = \tau \sqrt{i\varrho + |\xi|^2}$, 重新将上面不等式写为

$$|\widehat{K_N^\alpha}(\xi, \varrho)| \leq C \int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-r} z_0 e^{-\frac{z_0^2}{4r}} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} \sqrt{i\varrho + |\xi|^2} \right| d\tau, \quad (\xi, \varrho) \in \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

由引理 2.1 知, 对于任意 $(\xi, \varrho) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, 有

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-r} z_0 e^{-\frac{z_0^2}{4r}} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} \sqrt{i\varrho + |\xi|^2} \right| d\tau = 2^{1-\alpha} \int_0^\infty \left| z_0^\alpha \int_0^\infty e^{-\frac{z_0}{2u}} e^{-\frac{z_0}{2} u} \frac{du}{u^\alpha} \sqrt{i\varrho + |\xi|^2} \right| d\tau.$$

由 $|\arg z_0| \leq \frac{\pi}{4}$ 知, $|e^{-z_0/(2u)}| \leq e^{-c|z_0|/u}$ 和 $|e^{-z_0 u/2}| \leq e^{-c|z_0|u}$, 其中 $c = \sqrt{2}/4$. 从而

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty z_0^\alpha \int_0^\infty e^{-z_0/u} e^{-z_0 u} \frac{du}{u^\alpha} \sqrt{i\varrho + |\xi|^2} d\tau \right| &\leq \int_0^\infty |\sqrt{i\varrho + |\xi|^2}| |z_0|^\alpha \int_0^\infty e^{-c|z_0|/u} e^{-c|z_0|u} \frac{du}{u^\alpha} d\tau \\ &\leq \int_0^\infty |\sqrt{i\varrho + |\xi|^2}| |z_0|^{2\alpha-1} \int_0^\infty e^{-c|z_0|^2/v} e^{-cv} \frac{dv}{v^\alpha} d\tau. \end{aligned}$$

注意 $z_0 = \tau \sqrt{i\rho + |\xi|^2}$. 如果用 m 表示 $\sqrt{i\rho + |\xi|^2}$ 的模: $m = |\sqrt{i\rho + |\xi|^2}|$, 那么

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty |\sqrt{i\rho + |\xi|^2}| z_0|^{2\alpha-1} \int_0^\infty e^{-c|z_0|^2/v} e^{-cv} \frac{dv}{v^\alpha} d\tau \\ &= \int_0^\infty m^{2\alpha} \tau^{2\alpha-1} \int_0^\infty e^{-c(m\tau)^2/v} e^{-cv} \frac{dv}{v^\alpha} d\tau \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (m\tau)^{2\alpha-1} e^{-c(m\tau)^2/v} d(m\tau) e^{-cv} \frac{dv}{v^\alpha} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \tau^{2\alpha-1} e^{-c\tau^2/v} d\tau e^{-cv} \frac{dv}{v^\alpha} \\ &\leq C \int_0^\infty e^{-cv} dv \\ &\leq C. \end{aligned}$$

上面不等式中的常数 C 都不依赖于 N . 该性质得证. $\square$

注 2.3 上面积分

$$\frac{y^{2s}}{4^s \Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-y^2/(4\tau)} e^{-\tau(i\rho + \lambda)} \frac{d\tau}{\tau^{1+s}}, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \lambda \geq 0, \quad 0 < s < 1$$

是收敛的. 这是由 Cauchy 积分定理及当 $\rho = 0$ 时该式是连续解析的决定的. 该积分与 Macdonald 函数相关, 参见文献 [4]. 从而, 由 Fourier 变换和 Hermite 级数理论知, (1.2) 是有意义的.

本文将利用齐型空间上的向量值的 Calderón-Zygmund 理论. 在抛物情形下, 一个显然的不同是, 我们所考虑的空间的距离不同. 本文需要的抛物距离为

$$d((x, t), (y, s)) = \max\{|x - y|, |t - s|^{1/2}\}, \quad (x, t), (y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1,$$

其中 $|\cdot|$ 表示通常的 Euclid 距离. 则 $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$, 由距离 d 诱导的拓扑以及相应的 Borel 测度 $dxdt$ 可以构成一个齐型空间 $(\mathbb{R}^{n+1}, d, dxdt)$. 在该齐型空间 $(\mathbb{R}^{n+1}, d, dxdt)$ 上, 可以定义 Calderón-Zygmund 算子. 关于该方面知识, 可参见文献 [11], 关于抛物情形的内容, 可参见文献 [12]. 下面证明算子 T_N^α 的核 K_N^α 是一个 Calderón-Zygmund 核. 为此, 需要先证明如下引理.

引理 2.4 假设函数 $S(x, t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{ct}}}{t^{l+m}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}_+$, 则对于任意的整数 $l, m \geq 1$, 存在常数 $C > 0$ 使得

$$|S(x, t)| \leq \frac{C}{(t^{1/2} + |x|)^{2(l+m)}}$$

成立.

证明 对于任意的正整数 m , 有

$$e^{-\frac{|x|^2}{c}} \leq C_m (1 + |x|)^{-m}.$$

从而

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \frac{e^{-\frac{|x|^2}{ct}}}{t^{l+m}} = \frac{e^{-\frac{1}{c}(\frac{|x|}{\sqrt{t}})^2}}{t^{l+m}} \leq \frac{C}{t^{l+m}} \left(1 + \frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{-2(l+m)} \\ &\leq \frac{C}{t^{l+m}} \frac{t^{l+m}}{(t^{1/2} + |x|)^{2(l+m)}} \leq \frac{C}{(t^{1/2} + |x|)^{2(l+m)}}. \end{aligned}$$

该引理得证. $\square$

性质 2.5 存在依赖于 n, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty}$ (不依赖于 N) 的常数 C 使得, 对于任意 $(y, s) \neq (0, 0)$, 有

- (i) $|K_N^\alpha(y, s)| \leq \frac{C}{(s^{1/2} + |y|)^{n+2}};$
- (ii) $|\nabla_y K_N^\alpha(y, s)| \leq \frac{C}{(s^{1/2} + |y|)^{n+3}};$
- (iii) $|\partial_s K_N^\alpha(y, s)| \leq \frac{C}{(s^{1/2} + |y|)^{n+4}}.$

证明 (i) 首先,

$$\begin{aligned} |K_N^\alpha(y, s)| &\leq C \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{s^{n/2}} \right| \\ &= C \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{s^{1+\alpha+n/2}}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}| &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} \partial_u (u^{2\alpha} e^{-u^2/(4s)}) du \right| \\ &\leq \int_0^\infty \left| \left(2\alpha u^{2\alpha-1} - \frac{u^{2\alpha+1}}{2s} \right) e^{-u^2/(4s)} \right| du \\ &\leq C \int_0^\infty \left| \left(u^{2\alpha-1} + \frac{u^{2\alpha+1}}{2s} \right) e^{-u^2/(4s)} \right| du \\ &\leq C \sqrt{s} \left(\int_0^\infty (\sqrt{s})^{2\alpha-1} \left(\frac{u}{\sqrt{s}} \right)^{2\alpha-1} e^{-\frac{1}{4}(u/\sqrt{s})^2} d\frac{u}{\sqrt{s}} \right. \\ &\quad \left. + s^{\alpha-1/2} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\sqrt{s}} \right)^{2\alpha+1} e^{-\frac{1}{4}(u/\sqrt{s})^2} d\frac{u}{\sqrt{s}} \right) \\ &\leq Cs^\alpha. \end{aligned}$$

从而, 由引理 2.4 知,

$$|K_N^\alpha(y, s)| \leq C \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{s^{n/2+1}} \leq \frac{C}{(s^{1/2} + |y|)^{n+2}}.$$

(ii) 和 (iii) 的证明与 (i) 的证明是类似的, 这里不再重复. 该性质证毕. $\square$

注 2.6 如果考虑齐型空间 $(\mathbb{R}^{n+1}, d, dxdt)$ 上取值于 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ 的算子 $Q: f \mapsto \{T_N f(x, t)\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$, 那么 $T^*f(x, t) = \|Qf(x, t)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)}$. 因为性质 2.5 中的常数 C 不依赖于 $N = (N_1, N_2)$, 所以算子 Q 的核是一个 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ -值的 Calderón-Zygmund 核.

由性质 2.2 和 2.5 以及向量值 Calderón-Zygmund 理论, 可以得到算子 T_N^α 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ ($1 < p < \infty, \omega \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$) 空间上的一致有界性.

性质 2.7 对于由 (1.3) 定义的算子 T_N^α , 有如下几个命题成立:

(a) 对于任意 $1 < p < \infty$ 和 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$, 存在依赖于 n, p, ω, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\|T_N^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}$$

对于任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 成立;

(b) 对于任意 $\omega \in A_1(\mathbb{R}^{n+1})$, 存在依赖于 n, ω, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\omega(\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : |T_N^\alpha f(x, t)| > \lambda\}) \leq C \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}, \quad \lambda > 0$$

对于任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 成立;

(c) 存在依赖于 n, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\|T_N^\alpha f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}$$

对于任意 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ 成立;

(d) 存在依赖于 n, α 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$ 的常数 C 使得

$$\|T_N^\alpha f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}$$

对于任意 $f \in \text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})$ 成立.

上述命题中的常数 C 都不依赖于 N .

如前所述, 上述性质中的命题 (a) 和 (b) 可以通过利用文献 [10, 定理 7.12] 得到. 另一方面, 命题 (c) 和 (d) 可以在命题 (a) 和 (b) 的基础上由向量值 Calderón-Zygmund 理论推出, 参见文献 [13].

3 定理 1.2 的证明

本节将给出极大算子 T^* 的有界性的证明. 首先, 需要做一些准备工作. 类似于文献 [6, 命题 3.2] (可参见文献 [8, 9] 中的部分内容), 下面性质表明, 不失一般性, 可以假设

$$1 < \rho \leq \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq \rho^2, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

性质 3.1 给定 ρ -缺项序列 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 和序列 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, 可以定义新的 ρ -缺项序列 $\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{\theta_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ 满足如下性质:

- (i) $1 < \rho \leq \eta_{j+1}/\eta_j \leq \rho^2$, $\|\{\theta_j\}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \|\{v_j\}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$;
- (ii) 对于任意 $N = (N_1, N_2)$, 存在 $N' = (N'_1, N'_2)$ 使得 $T_N^\alpha = \tilde{T}_{N'}^\alpha$, 其中 $\tilde{T}_{N'}^\alpha$ 为由 (1.3) 定义的与新序列 $\{\eta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 和 $\{\theta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 相关的算子.

该性质的证明与文献 [6, 8, 9] 中相应的性质的证明类似, 此处略去.

由上述性质知, 在本文后面结果的证明中只需要证明我们的结果在 ρ -缺项序列满足 (3.1) 的条件下成立即可. 因此, 在后文中我们总是假设 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 满足 (3.1).

为了证明定理 1.2, 需要先证明一个 Cotlar 型不等式. 对于任意 $M \in \mathbb{Z}^+$, 令

$$T_M^* f(x, t) = \sup_{-M \leq N_1 < N_2 \leq M} |T_N^\alpha f(x, t)|, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

从而,

$$T^* f(x, t) = \sup_{M \in \mathbb{Z}^+} T_M^* f(x, t).$$

定义一些 Hardy-Littlewood 极大算子

$$\mathcal{M}_q f(x, t) = \sup_{B \ni x} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y, t)|^q dy \right)^{1/q}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

和

$$\mathcal{M}_q^- f(x, t) = \sup_{\varepsilon > 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^0 |f(x, t+s)|^q ds \right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 $1 \leq q < \infty$. 为了方便, 记 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}^- = \mathcal{M}_1^-$. 从而, 可以证明一个由上述 Hardy-Littlewood 极大算子控制的关于算子 $T_M^* f$ 的逐点估计. 为此, 我们需要一个引理.

引理 3.2 假设 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为一个 ρ -缺项序列, 且 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

- (i) $|\sum_{j=m}^M v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}}| \leq \frac{C_{\rho,v,\alpha}}{a_m^2}$;
 (ii) 如果 $k \geq m$ 并且 $t, s \in \mathbb{R}$ 满足 $|t-s| \geq ca_k^2$ ($c > 0$), 那么

$$\left| \sum_{j=-M}^{m-1} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-\frac{a_{j+1}^2}{4(t-s)}} - a_j^{2\alpha} e^{-\frac{a_j^2}{4(t-s)}}}{(t-s)^{1+\alpha}} \right| \leq C_{\rho,v,\alpha} \frac{1}{a_k^2} \rho^{-2\alpha(k-m+1)}.$$

证明 对于 (i), 由 $\rho \leq \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq \rho^2$ 得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=m}^M v_j \left(\frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right) \right| \\ & \leq \|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \sum_{j=m}^M \left(\frac{1}{a_{j+1}^2} + \frac{1}{a_j^2} \right) \leq C_{v,\alpha} \frac{1}{a_m^2} \sum_{j=m}^M \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2} \cdot \frac{a_m^2}{a_j^2} \\ & = C_{\rho,v,\alpha} \frac{1}{a_m^2} \sum_{j=m}^M \left| \frac{a_m}{a_j} \right|^2 \leq C_{\rho,v,\alpha} \frac{1}{a_m^2} \frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \\ & \leq C_{\rho,v,\alpha} \frac{1}{a_m^2}. \end{aligned}$$

下面证明 (ii). 由均值定理知, 存在 $\xi_j \in [a_j, a_{j+1}]$ 使得

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=-M}^{m-1} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-\frac{a_{j+1}^2}{4(t-s)}} - a_j^{2\alpha} e^{-\frac{a_j^2}{4(t-s)}}}{(t-s)^{1+\alpha}} \right| \\ & = \left| \sum_{j=-M}^{m-1} v_j \frac{(a_{j+1} - a_j) 2\xi_j^{2\alpha-1} e^{-\frac{\xi_j^2}{4(t-s)}} (\alpha - \frac{\xi_j^2}{4(t-s)})}{(t-s)^{1+\alpha}} \right| \\ & \leq \|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \left(\left| \sum_{j=-M}^{m-1} \frac{(a_{j+1} - a_j) 2\alpha \xi_j^{2\alpha-1} e^{-\frac{\xi_j^2}{4(t-s)}}}{(t-s)^{1+\alpha}} \right| + \left| \sum_{j=-M}^{m-1} \frac{(a_{j+1} - a_j) 2\xi_j^{2\alpha+1} e^{-\frac{\xi_j^2}{4(t-s)}}}{(t-s)^{2+\alpha}} \right| \right) \\ & \leq C_{\rho,v,\alpha} \left(\sum_{j=-M}^{m-1} \frac{a_j^{2\alpha}}{|t-s|^{1+\alpha}} + \sum_{j=-M}^{m-1} \frac{a_j^{2\alpha+2}}{|t-s|^{2+\alpha}} \right) \\ & \leq C_{\rho,v,\alpha} \frac{1}{a_k^2} \left(\sum_{j=-M}^{m-1} \left| \frac{a_j}{a_k} \right|^{2\alpha} + \sum_{j=-M}^{m-1} \left| \frac{a_j}{a_k} \right|^{2\alpha+1} \right) \\ & \leq C_{\rho,v,\alpha} \frac{1}{a_k^2} \rho^{-2\alpha(k-m+1)}, \end{aligned}$$

其中用到了 $k \geq m$. 该引理得证. $\square$

定理 3.3 对于 $q \in (1, \infty)$, 存在依赖于 $\alpha, \rho, \|v\|_{\ell^\infty}$ 和 n 的常数 C 使得, 对于任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 和 $M \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$T_M^* f(x, t) \leq C \{ (\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})(T_{(-M,M)}^\alpha f)(x, t) + (\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q) f(x, t) \}.$$

证明 因为算子 T_N^α 是卷积型的, 所以该算子具有平移不变性. 因此, 只需要证明该定理在 $(x, t) = (0, 0)$ 时成立. 注意, 对于 $N = (N_1, N_2)$, 有

$$T_N^\alpha f(x, t) = T_{(N_1, M)}^\alpha f(x, t) - T_{(N_2+1, M)}^\alpha f(x, t),$$

其中 $-M \leq N_1 < N_2 \leq M$. 所以, 我们只需要估计 $|T_{(m, M)}^\alpha f(0, 0)|$ ($|m| \leq M$) 即可, 而且该估计中的控制常数与 m 和 M 无关. 记 $B_m = B(0, a_m)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 0 为球心、以 a_m 为半径的球, 而 $\tilde{B}_m = B_m \times [-a_m^2, 0] \subset \mathbb{R}^{n+1}$. 分解

$$f = f\chi_{\tilde{B}_m} + f\chi_{\tilde{B}_m^c} = f\chi_{\tilde{B}_m} + f\chi_{B_m^c \times (-\infty, -a_m^2)} + f\chi_{B_m^c \times (0, +\infty)} =: f_1 + f_2 + f_3.$$

首先, 由算子 $T_{(m, M)}^\alpha$ 的定义知 $T_{(m, M)}^\alpha f_3(0, 0) = 0$. 从而,

$$|T_{(m, M)}^\alpha f(0, 0)| \leq |T_{(m, M)}^\alpha f_1(0, 0)| + |T_{(m, M)}^\alpha f_2(0, 0)| =: I + II.$$

对于 I , 由引理 3.2 知

$$\begin{aligned} I &= C_{n, \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{j=m}^M v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} f_1(-y, -s) dy ds \right| \\ &\leq C_{n, \alpha} \|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \int_{-a_m^2}^0 \int_{B_m} \sum_{j=m}^M \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f(-y, -s)| dy ds \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} \frac{1}{a_m^2} \int_{-a_m^2}^0 \int_{B_m} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f(-y, -s)| dy ds \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} \frac{1}{a_m^2} \int_{-a_m^2}^0 \mathcal{M}_q f(0, -s) ds \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} (\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q) f(0, 0). \end{aligned}$$

对于 II , 有

$$\begin{aligned} II &= \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} |T_{(m, M)}^\alpha f_2(0, 0)| dx dt \\ &\leq \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} |T_{(-M, M)}^\alpha f(x, t)| dx dt \\ &\quad + \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} |T_{(-M, M)}^\alpha f_1(x, t)| dx dt \\ &\quad + \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} |T_{(m, M)}^\alpha f_2(x, t) - T_{(m, M)}^\alpha f_2(0, 0)| dx dt \\ &\quad + \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} |T_{(-M, m-1)}^\alpha f_2(x, t)| dx dt \\ &=: A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \end{aligned}$$

(如果 $m = -M$, 那么 $A_4 = 0$.) 显然,

$$A_1 = \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{-a_{m-1}^2}^0 \int_{B_{m-1}} |T_{(-M, M)}^\alpha f(x, t)| dx dt \leq C(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})(T_{(-M, M)}^\alpha f)(0, 0).$$

对于 A_2 , 由 Hölder 不等式和 T_N^α 的 L^q 一致有界性知

$$\begin{aligned} A_2 &\leq \left(\frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} |T_{(-M,M)}^\alpha f_1(x,t)|^q dx dt \right)^{1/q} \\ &\leq C \left(\frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}|} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f_1(x,t)|^q dx dt \right)^{1/q} \\ &\leq C(\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q) f(0,0). \end{aligned}$$

对于 A_3 , 当 $(x,t) \in \tilde{B}_{m-1}$ 时, 有

$$\begin{aligned} &|T_{(m,M)}^\alpha f_2(x,t) - T_{(m,M)}^\alpha f_2(0,0)| \\ &= \left| \int_{-a_m^2}^0 \int_{B_m^c} K_{(m,M)}^\alpha(x-y, t-s) f(y,s) dy ds - \int_{-a_m^2}^0 \int_{B_m^c} K_{(m,M)}^\alpha(-y, -s) f(y,s) dy ds \right| \\ &\leq \int_{-a_m^2}^0 \int_{B_m^c} |K_{(m,M)}^\alpha(x-y, t-s) - K_{(m,M)}^\alpha(-y, -s)| |f(y,s)| dy ds \\ &= \sum_{k=m}^{+\infty} \int_{-a_{k+1}^2}^{-a_k^2} \int_{B_{k+1} \setminus B_k} |K_{(m,M)}^\alpha(x-y, t-s) - K_{(m,M)}^\alpha(-y, -s)| |f(y,s)| dy ds. \end{aligned}$$

由均值定理知, 存在 $\theta \in (0,1)$ 使得

$$\begin{aligned} &|K_{(m,M)}^\alpha(x-y, t-s) - K_{(m,M)}^\alpha(-y, -s)| \\ &\leq |\nabla_z K_{(m,M)}^\alpha(z, \theta t - s)|_{z=\theta x-y} |x| + |\partial_r K_{(m,M)}^\alpha(\theta x - y, r)|_{r=\theta t-s} |t| \\ &\leq C \left(\frac{|x|}{(|\theta x - y| + |\theta t - s|^{1/2})^{n+3}} + \frac{|t|}{(|\theta x - y| + |\theta t - s|^{1/2})^{n+4}} \right) \\ &\leq C \frac{a_{m-1}}{a_k^{n+3}}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中用到了如下事实: 在上式的级数中, $(x,t) \in \tilde{B}_{m-1}$ 且 $(y,s) \in \tilde{B}_{k+1} \setminus \tilde{B}_k$. 从而,

$$\begin{aligned} &|T_{(m,M)}^\alpha f_2(x,t) - T_{(m,M)}^\alpha f_2(0,0)| \\ &\leq C \sum_{k=m}^{+\infty} \int_{-a_{k+1}^2}^{-a_k^2} \int_{B_{k+1} \setminus B_k} \frac{a_{m-1}}{a_k^{n+3}} |f(y,s)| dy ds \\ &\leq C \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{a_{m-1}}{a_k} \cdot \frac{1}{a_k^{n+2}} \int_{-a_{k+1}^2}^{-a_k^2} \int_{B_{k+1}} |f(y,s)| dy ds \\ &\leq C \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{a_{m-1}}{a_k} \cdot \frac{\rho^{2n+2}}{a_{k+1}^2} \int_{-a_{k+1}^2}^{-a_k^2} \left(\frac{1}{a_{k+1}^n} \int_{B_{k+1}} |f(y,s)| dy \right) ds \\ &\leq C \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{a_{m-1}}{a_k} \cdot \frac{1}{a_{k+1}^2} \int_{-a_{k+1}^2}^{-a_k^2} \mathcal{M} f(0,s) ds \\ &\leq C(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M}) f(0,0) \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{a_{m-1}}{a_k} \\ &\leq C(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M}) f(0,0). \end{aligned}$$

因此,

$$A_3 \leq C(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})f(0, 0).$$

对于 A_4 , 有

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}^c|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} \left| \int_{\tilde{B}_m^c} K_{(-M, m-1)}^\alpha(x-y, t-s) f(y, s) dy ds \right| dx dt \\ &\leq \frac{1}{|\tilde{B}_{m-1}^c|} \int_{\tilde{B}_{m-1}} \int_{\tilde{B}_m^c} |K_{(-M, m-1)}^\alpha(x-y, t-s)| |f(y, s)| dy ds dx dt. \end{aligned}$$

因为 $(y, s) \in \tilde{B}_m^c$, $(x, t) \in \tilde{B}_{m-1}$ 且 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 ρ -缺项序列, 所以 $|(x-y, t-s)| \sim |(y, s)|$. 从而, 由引理 3.2 可知

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{B}_m^c} |K_{(-M, m-1)}^\alpha(x-y, t-s)| |f(y, s)| dy ds \\ &\leq C_{n, \alpha} \sum_{k=m}^{+\infty} \int_{\tilde{B}_{k+1} \setminus \tilde{B}_k} \left| \sum_{j=-M}^{m-1} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-\frac{a_{j+1}^2}{4(t-s)}} - a_j^{2\alpha} e^{-\frac{a_j^2}{4(t-s)}}}{(t-s)^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4|t-s|}}}{(4\pi|t-s|)^{n/2}} |f(y, s)| dy ds \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{\rho^{-2\alpha(k-m+1)}}{a_{k+1}^2} \int_{-a_{k+1}^2}^{-a_k^2} \int_{B_{k+1}} \frac{e^{-\frac{|x-y|^2}{4|s|}}}{(4\pi|s|)^{n/2}} |f(y, s)| dy ds \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} \sum_{k=m}^{+\infty} \rho^{-2\alpha(k-m+1)} \cdot \frac{1}{a_{k+1}^2} \int_{-a_{k+1}^2}^0 \mathcal{M}f(0, s) ds \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} (\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})f(0, 0) \sum_{k=m}^{+\infty} \rho^{-2\alpha(k-m+1)} \\ &\leq C_{n, \alpha, v, \rho} (\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})f(0, 0). \end{aligned}$$

因此,

$$A_4 \leq C(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})f(0, 0).$$

结合上述关于 A_1 、 A_2 、 A_3 和 A_4 的估计, 得

$$II \leq C(\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q)f(0, 0).$$

故

$$|T_{(m, M)}^\alpha f(0, 0)| \leq C(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})(T_{(-M, M)}^\alpha f)(0, 0) + C(\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q)f(0, 0).$$

由于上述证明中的常数 C 只依赖于 n 、 α 、 ρ 和 $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})}$, 该定理得证. $\square$

定理 1.2 的证明 (a) 对于每个 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$, 可以选择 $1 < q < p$ 使得 $\omega \in A_{p/q}(\mathbb{R}^{n+1})$. 则极大算子 $\mathcal{M}_- \circ \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q$ 在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 空间上都是有界的. 由定理 3.3 和性质 2.7 中 T_N^α 的 L^p 一致有界性知

$$\begin{aligned} \|T_{M}^* f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)} &\leq C(\|(\mathcal{M}^- \circ \mathcal{M})(T_{(-M, M)}^\alpha f)\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)} + \|(\mathcal{M}_q^- \circ \mathcal{M}_q)f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}) \\ &\leq C(\|T_{(-M, M)}^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)} + \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}) \\ &\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)}. \end{aligned}$$

注意到上式中的常数 C 不依赖于 M . 又因为算子 T_M^* 关于 M 是单调的, 所以, 令 M 趋于正无穷大, 可以得到算子 T^* 的 L^p 有界性的证明. 从而, 定理 1.2(a) 得证.

为了证明 (b), 考虑 $\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$ 值的算子 $\mathcal{T}f(x, t) = \{T_N^\alpha f(x, t)\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$. 因为 $\|\mathcal{T}f(x, t)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} = T^*f(x, t)$, 利用 (a) 得算子 $\mathcal{T}$ 从 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ 到 $L_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)}^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 上是有界的, 其中 $1 < p < \infty$ 且 $\omega \in A_p(\mathbb{R}^{n+1})$. 算子 $\mathcal{T}$ 的核为 $K^\alpha(x, t) = \{K_N^\alpha(x, t)\}_{N \in \mathbb{Z}^2}$. 由性质 2.5 和文献 [10] 中向量值形式的定理 7.12 知, 算子 $\mathcal{T}$ 从 $L^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 到弱 $L_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)}^1(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 空间上是有界的, 其中 $\omega \in A_1(\mathbb{R}^{n+1})$. 又由于 $\|\mathcal{T}f(x, t)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} = T^*f(x, t)$, 得到 (b) 的证明.

对于 (c) 和 (d), 因为 $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \subset \text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})$, 所以只需证明 (d) 即可. 假设 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 为使得 $T^*f(x_0, t_0) < \infty$ 的一个点. 给定 $(x, t) \neq (x_0, t_0)$, 记 $d_0 = d((x, t), (x_0, t_0))$. 令 $B = B(x_0, 4d_0)$ 且 $\tilde{B} = B \times [t_0 - 4d_0^2, t_0 + 4d_0^2]$. 分解 f 为

$$f = (f - f_{\tilde{B}})\chi_{\tilde{B}} + (f - f_{\tilde{B}})\chi_{\tilde{B}^c} + f_{\tilde{B}} =: f_1 + f_2 + f_3.$$

由于 T^* 是 L^p 有界的, $1 < p < \infty$, 又 $f_1 \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, 所以 $T^*f_1(x, t) < \infty$. 对于任意 $j \in \mathbb{Z}$, 因为 $\mathcal{P}_{a_j}^\alpha f_3 = f_3$, 所以 $T^*f_3 = 0$. 另一方面, 由 (3.2) 中相同的方法, 可得

$$\begin{aligned} & |T_N^\alpha f_2(x, t) - T_N^\alpha f_2(x_0, t_0)| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_N^\alpha(x - y, t - s) f_2(y, s) dy ds - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_N^\alpha(x_0 - y, t_0 - s) f_2(y, s) dy ds \right| \\ &= \left| \int_{\tilde{B}^c} (K_N^\alpha(x - y, t - s) - K_N^\alpha(x_0 - y, t_0 - s)) f_2(y, s) dy ds \right| \\ &\leq C \int_{\tilde{B}^c} \left(\frac{d_0}{|(y, s) - (x_0, t_0)|^{n+3}} + \frac{d_0^2}{|(y, s) - (x_0, t_0)|^{n+4}} \right) |f(y, s) - f_{\tilde{B}}| dy ds \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty} d_0 \int_{2^k \tilde{B} \setminus 2^{k-1} \tilde{B}} \frac{|f(y, s) - f_{\tilde{B}}|}{|(y, s) - (x_0, t_0)|^{n+3}} dy ds \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d_0}{(2^{k+1} d_0)^{n+3}} \int_{2^k \tilde{B}} |f(y, s) - f_{\tilde{B}}| dy ds \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-(k+1)} \frac{1}{|2^k \tilde{B}|} \int_{2^k \tilde{B}} \left(|f(y, s) - f_{2^k \tilde{B}}| + \sum_{l=1}^k |f_{2^l \tilde{B}} - f_{2^{l-1} \tilde{B}}| \right) dy ds \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-(k+1)} \frac{1}{|2^k \tilde{B}|} \int_{2^k \tilde{B}} (|f(y, s) - f_{2^k \tilde{B}}| + 2k \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}) dy ds \\ &\leq C \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-(k+1)} (1 + 2k) \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \\ &\leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}, \end{aligned}$$

其中 $2^k \tilde{B} = B(x_0, 2^k \cdot 4d_0) \times [t_0 - 2^k \cdot 4d_0^2, t_0 + 2^k \cdot 4d_0^2]$, $k \in \mathbb{N}$. 因此,

$$\|T_N^\alpha f_2(x, t) - T_N^\alpha f_2(x_0, t_0)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

并且 $T^*f(x, t) = \|T_N^\alpha f(x, t)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} \leq C < \infty$.

下面证明, 若 f 满足 $T^*f(x, t) < \infty$ a.e., 则 (1.4) 成立. 对于任意使得 $T^*f(x_0, t_0) < \infty$ 成立的 $r > 0$ 和 (x_0, t_0) , 令 $B = B(x_0, r)$, $\tilde{B} = B \times [t_0 - r^2, t_0 + r^2]$ 和 $f_{\tilde{B}} = \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} f(x, t) dx dt$. 分解 f 为

$$f = (f - f_{\tilde{B}})\chi_{2\tilde{B}} + (f - f_{\tilde{B}})\chi_{(2\tilde{B})^c} + f_{\tilde{B}} =: f_1 + f_2 + f_3.$$

显然有 $T^*f_3(x, t) = 0$. 而且,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} |T^*f(x, t) - (T^*f)_{\tilde{B}}| dxdt \\
 &= \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} \left| \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} (T^*f(x, t) - T^*f(y, s)) dyds \right| dxdt \\
 &\leq \frac{1}{|\tilde{B}|^2} \int_{\tilde{B}} \int_{\tilde{B}} |T^*f(x, t) - T^*f(y, s)| dyds dxdt \\
 &= \frac{1}{|\tilde{B}|^2} \int_{\tilde{B}} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f(x, t) - T_N^\alpha f(y, s)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} dyds dxdt \\
 &\leq \frac{1}{|\tilde{B}|^2} \int_{\tilde{B}} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f(x, t) - T_N^\alpha f(y, s)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} dyds dxdt \\
 &\leq \frac{1}{|\tilde{B}|^2} \int_{\tilde{B}} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f_1(x, t) - T_N^\alpha f_1(y, s)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} dyds dxdt \\
 &\quad + \frac{1}{|\tilde{B}|^2} \int_{\tilde{B}} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f_2(x, t) - T_N^\alpha f_2(y, s)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} dyds dxdt \\
 &=: I + II.
 \end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和 T^* 的 L^2 有界性得

$$\begin{aligned}
 I &\leq \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f_1(x, t)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} dxdt + \frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f_1(y, s)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)} dyds \\
 &\leq \left(\frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f_1(x, t)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)}^2 dxdt \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{|\tilde{B}|} \int_{\tilde{B}} \|T_N^\alpha f_1(y, s)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}^2)}^2 dyds \right)^{1/2} \\
 &\leq C \frac{1}{|\tilde{B}|^{1/2}} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})} \\
 &\leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}.
 \end{aligned}$$

对于 II, 因为 $(x, t), (y, s) \in \tilde{B}$ 且 f_2 的支撑是 $(2\tilde{B})^c$, 由 (3.2) 中类似的方法, 得

$$\begin{aligned}
 & |T_N^\alpha f_2(x, t) - T_N^\alpha f_2(y, s)| \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_N^\alpha(x - z, t - u) f_2(z, u) dzdu - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} K_N^\alpha(y - z, s - u) f_2(z, u) dzdu \right| \\
 &= \left| \int_{(2\tilde{B})^c} (K_N^\alpha(x - z, t - u) - K_N^\alpha(y - z, s - u)) f_2(z, u) dzdu \right| \\
 &\leq C \int_{(2\tilde{B})^c} \left(\frac{2r}{||z| + |u|^{1/2}|^{n+3}} + \frac{2r^2}{||z| + |u|^{1/2}|^{n+4}} \right) |f(z, u) - f_{\tilde{B}}| dzdu \\
 &\leq C \sum_{k=2}^{+\infty} r \int_{2^k \tilde{B} \setminus 2^{k-1} \tilde{B}} \frac{|f(z, u) - f_{\tilde{B}}|}{||z| + |u|^{1/2}|^{n+3}} dzdu \\
 &\leq C \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{r}{(2^{k+1}r)^{n+3}} \int_{2^k \tilde{B}} |f(z, u) - f_{\tilde{B}}| dzdu \\
 &\leq C \sum_{k=2}^{+\infty} 2^{-(k+1)} \frac{1}{|2^k \tilde{B}|} \int_{2^k \tilde{B}} \left(|f(z, u) - f_{2^k \tilde{B}}| + \sum_{l=2}^k |f_{2^l \tilde{B}} - f_{2^{l-1} \tilde{B}}| \right) dzdu \\
 &\leq C \sum_{k=2}^{+\infty} 2^{-(k+1)} \frac{1}{|2^k \tilde{B}|} \int_{2^k \tilde{B}} (|f(z, u) - f_{2^k \tilde{B}}| + 2k \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}) dzdu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_{k=2}^{+\infty} 2^{-(k+1)} (1+2k) \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \\ &\leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}, \end{aligned}$$

其中 $2^k \tilde{B} = B(x_0, 2^k r) \times [t_0 - 2^k r^2, t_0 + 2^k r^2]$. 因此, $II \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}$. 从而, 由 x_0 和 $r > 0$ 的任意性知,

$$\|T^* f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \|f\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

定理 1.2 得证. $\square$

4 定理 1.3 的证明

首先证明, 如果 φ 是一个测试函数, 那么对于任意 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $T_N^\alpha \varphi(x, t)$ 收敛. 为此, 只需要证明, 对于任意满足 $0 < L < M$ 的 (L, M) , 当 $L, M \rightarrow +\infty$ 时, 级数

$$A = \sum_{j=L}^M v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha \varphi(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha \varphi(x, t)) \quad \text{和} \quad B = \sum_{j=-M}^{-L} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha \varphi(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha \varphi(x, t))$$

收敛于 0. 如同定理 3.3 的证明过程, 得

$$\begin{aligned} |A| &\leq C_{n,\alpha} \|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{j=L}^M \left| \frac{1}{a_{j+1}^{2+n}} - \frac{1}{a_j^{2+n}} \right| |\varphi(x-y, t-s)| dy ds \\ &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{j=L}^M \frac{1}{a_j^{2+n}} |\varphi(x-y, t-s)| dy ds \\ &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \left(\frac{1}{a_L^{2+n}} \sum_{j=L}^M \frac{a_L^{2+n}}{a_j^{2+n}} \right) \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\varphi(x-y, t-s)| dy ds \\ &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \frac{\rho^{2+n}}{\rho^{2+n}-1} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})} \frac{1}{a_L^{2+n}} \rightarrow 0, \quad \text{若 } L, M \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

另一方面, 因为微分变换算子的核的积分为 0, 所以

$$\begin{aligned} B &= C_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \sum_{j=-M}^{-L} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^n/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} (\varphi(x-y, t-s) - \varphi(x, t)) dy ds \\ &= C_{n,\alpha} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=-M}^{-L} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^n/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} (\varphi(x-y, t-s) - \varphi(x, t)) dy ds \\ &\quad + C_{n,\alpha} \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=-M}^{-L} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^n/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} (\varphi(x-y, t-s) - \varphi(x, t)) dy ds \\ &=: B_1 + B_2. \end{aligned}$$

如同 A 中情形, 又由于 φ 为测试函数, 因此有

$$|B_1| = C_{n,\alpha} \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=-M}^{-L} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} (\varphi(x-y, t-s) - \varphi(x, t)) dy ds \right|$$

$$\begin{aligned}
 &\leq C_{n,\alpha} \left| \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=-M}^{-L} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} (|y| + s^{1/2}) dy ds \right| \\
 &\leq C_{n,\alpha} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=-M}^{-L} v_j \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{\alpha+1/2}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} dy ds \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \int_0^1 \sum_{j=-M}^{-L} \frac{a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{\alpha+1/2}} ds.
 \end{aligned}$$

若 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, 则对于任意 $0 < \varepsilon < 2\alpha$, 有

$$\begin{aligned}
 |B_1| &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \sum_{j=-M}^{-L} a_j^{2\alpha-\varepsilon} \int_0^1 s^{\varepsilon/2-\alpha-1/2} ds \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho,\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} a_{-L}^{2\alpha-\varepsilon} \sum_{j=-M}^{-L} \frac{a_j^{2\alpha-\varepsilon}}{a_{-L}^{2\alpha-\varepsilon}} \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho,\varepsilon} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} a_{-L}^{2\alpha-\varepsilon} \rightarrow 0, \quad \text{若 } L, M \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

如果 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 那么

$$\begin{aligned}
 |B_1| &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \int_0^1 \sum_{j=-M}^{-L} \frac{a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{\alpha+1/2}} ds \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} a_{-L}^{2\alpha-1} \sum_{j=-M}^{-L} \frac{a_j^{2\alpha-1}}{a_{-L}^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{1}{s^\alpha} ds \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} a_{-L}^{2\alpha-1} \rightarrow 0, \quad \text{若 } L, M \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

从而,

$$|B_1| \rightarrow 0, \quad \text{若 } L, M \rightarrow +\infty.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
 |B_2| &\leq C_{n,\alpha,\rho} \|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \int_1^\infty \sum_{j=-M}^{-L} \frac{a_j^{2\alpha}}{s^{1+\alpha}} ds \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \sum_{j=-M}^{-L} a_j^{2\alpha} \int_1^\infty \frac{1}{s^{1+\alpha}} ds \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} a_{-L}^{2\alpha} \sum_{j=-M}^{-L} \frac{a_j^{2\alpha}}{a_{-L}^{2\alpha}} \\
 &\leq C_{n,\alpha,v,\rho} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \frac{\rho^{2\alpha}}{\rho^{2\alpha}-1} a_{-L}^{2\alpha} \rightarrow 0, \quad \text{若 } L, M \rightarrow +\infty.
 \end{aligned}$$

由于测试函数在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ 中稠密, 由定理 1.2 和经典的 Banach 原理可以得到 $T_N^\alpha f$ 的 a.e. 收敛性对于任意 $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ 中的函数都成立. 类似地, 因为 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}) \cap L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 又在 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ 中稠密, 所以该 a.e. 收敛性对于任意 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 中的函数都成立. 利用控制收敛定理, 可以得到定理中 $T_N^\alpha f$ 依 $L^p(\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ ($1 < p < \infty$) 范数收敛和依测度收敛.

5 定理 1.4 的证明

令

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \chi_{(-a^{2k+1}, -a^{2k}]}(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

且

$$f(x, t) = \chi_{\mathbb{R}^n}(x) g(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

其中 $a > 1$ 为后面证明中将确定的某个实数. 则 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. 易知,

$$f(a^j x, a^{2j} t) = (-1)^j f(x, t).$$

令 $a_j = a^j$. 那么

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t) &= \frac{1}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{a^{2\alpha j} e^{-a^{2j}/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} f(x-y, t-s) dy ds \\ &= \frac{1}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-|z|^2/(4u)}}{(4\pi u)^{n/2}} f(x-a^j z, t-a^{2j} u) dz \frac{du}{u} \\ &= \frac{(-1)^j}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-|z|^2/(4u)}}{(4\pi u)^{n/2}} f\left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right) dz \frac{du}{u} \\ &= \frac{(-1)^j}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-|\frac{x}{a^j} - z|^2/(4u)}}{(4\pi u)^{n/2}} g\left(\frac{t}{a^{2j}} - u\right) dz \frac{du}{u} \\ &= \frac{2(-1)^j}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2j}} - u\right) \frac{du}{u}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

从而,

$$\mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(0, 0) = \frac{2(-1)^j}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u}.$$

注意到

$$\int_0^\infty \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} |g(-u)| \frac{du}{u} \leq \int_0^\infty \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{du}{u} = 4^\alpha \Gamma(\alpha) < \infty.$$

因此,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^\infty \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} = 0 \quad \text{和} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\varepsilon \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} = 0.$$

另一方面, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} f(-u) \frac{du}{u} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{du}{u} = C > 0$. 故可以选择足够大的 $a > 1$ 使得

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} &= \int_1^a \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{du}{u} \\ &> \left| \int_0^{1/a} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{du}{u} \right| + \left| \int_{a^2}^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{du}{u} \right| \\ &> \left| \int_0^{1/a} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} \right| + \left| \int_{a^2}^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} \right|. \end{aligned}$$

换言之, 对于上述给定的 $a > 1$, 存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} = C_1. \quad (5.2)$$

因此,

$$|\mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(0, 0) - \mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(0, 0)| = \frac{4C_1}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} > 0.$$

从而, 有

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(0, 0) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(0, 0)| = \infty.$$

由 (5.1) 得

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t) \\ &= \frac{(-1)^{j+1}}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2(j+1)}} - u\right) \frac{du}{u} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2j}} - u\right) \frac{du}{u} \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

由控制收敛定理知,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(h - u) \frac{du}{u} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} = C_1 > 0,$$

其中 C_1 为 (5.2) 中出现的常数. 因此, 存在 $\eta_0 \in (0, 1)$ 使得, 对于任意 $|h| < \eta_0$, 都有

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(h - u) \frac{du}{u} \geq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g(-u) \frac{du}{u} = \frac{C_1}{2}.$$

因此, 对于任意 $t \in \mathbb{R}$, 可以选择 $j \in \mathbb{Z}$ 使得 $\frac{|t|}{a^j} < \eta_0$ (存在无穷多个 j 满足该条件), 而且

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2(j+1)}} - u\right) \frac{du}{u} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2j}} - u\right) \frac{du}{u} \geq C_1 > 0.$$

取 $v_j = (-1)^{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, 由 (5.3) 知, 对于任意 $t \in \mathbb{R}$ 都有

$$\begin{aligned} T^* f(x, t) &\geq \sum_{\left|\frac{t}{a^j}\right| < \eta_0} (-1)^{j+1} (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t)) \\ &= \frac{2}{4^\alpha \Gamma(\alpha)} \sum_{\left|\frac{t}{a^j}\right| < \eta_0} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2(j+1)}} - u\right) \frac{du}{u} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} g\left(\frac{t}{a^{2j}} - u\right) \frac{du}{u} \right) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

定理 1.4 得证.

6 极大算子 T^* 的局部增长性

定理 1.5 的证明 (a) 我们将仅证明该结论在 $1 < p < \infty$ 时成立. 因为 $2r < 1$, 所以 $\tilde{B} \setminus \tilde{B}_{2r} \neq \emptyset$. 令 $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$, 其中 $f_1(x, t) = f(x, t) \chi_{\tilde{B}_{2r}}(x, t)$, $f_2(x, t) = f(x, t) \chi_{\tilde{B} \setminus \tilde{B}_{2r}}(x, t)$. 那么

$$|T^* f(x, t)| \leq |T^* f_1(x, t)| + |T^* f_2(x, t)|.$$

由定理 1.2 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^* f_1(x, t)| dx &\leq \left(\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^* f_1(x, t)|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |f_1(x, t)|^2 dx dt \right)^{1/2} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}. \end{aligned}$$

而且,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} dy ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} + a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} dy ds \\ &= 4^{1+\alpha} \Gamma(\alpha). \end{aligned} \quad (6.1)$$

因此, 由 Hölder 不等式、(6.1) 和 Fubini 定理知, 对于 $1 < p < \infty$ 和任意 $N = (N_1, N_2)$, 有

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f_2(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f_2(x, t)) \right| \\ &\leq C \sum_{j=N_1}^{N_2} \left| v_j \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} f_2(x - y, t - s) dy ds \right| \\ &\leq C \|v\|_{l^p(\mathbb{Z})} \left(\sum_{j=N_1}^{N_2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f_2(x - y, t - s)| dy ds \right)^{p'} \right)^{1/p'} \\ &\leq C \|v\|_{l^p(\mathbb{Z})} \left(\sum_{j=N_1}^{N_2} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f_2(x - y, t - s)|^{p'} dy ds \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} dy ds \right\}^{p'/p} \right)^{1/p'} \\ &\leq C \|v\|_{l^p(\mathbb{Z})} \left(\sum_{j=N_1}^{N_2} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f_2(x - y, t - s)|^{p'} dy ds \right)^{1/p'} \\ &\leq C \|v\|_{l^p(\mathbb{Z})} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{a_{j+1}^{2\alpha} e^{-a_{j+1}^2/(4s)} - a_j^{2\alpha} e^{-a_j^2/(4s)}}{s^{1+\alpha}} \right| \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f_2(x - y, t - s)|^{p'} dy ds \right)^{1/p'} \\ &\leq C \|v\|_{l^p(\mathbb{Z})} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{1}{|s|} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f_2(x - y, t - s)|^{p'} dy ds \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^* f_2(x, t)| dx dt \\ &\leq C \frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{1}{|s|} \frac{e^{-|y|^2/(4s)}}{(4\pi s)^{n/2}} |f_2(x - y, t - s)|^{p'} dy ds \right)^{1/p'} dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C \frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} \left(\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \frac{1}{|t-s|} \frac{e^{-|x-y|^2/(4(t-s))}}{(4\pi(t-s))^{n/2}} |f_2(y, s)|^{p'} dy ds \right)^{1/p'} dx dt \\
 &\leq C \frac{\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} \left(\int_{r \leq |t-s| \leq 2} \frac{1}{|t-s|} ds \right)^{1/p'} dx dt \\
 &\sim \left(\log \frac{2}{r} \right)^{1/p'} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}.
 \end{aligned}$$

在上面的不等式中, 我们用到了如下事实: 如果 $(y, s) \in \tilde{B} \setminus \tilde{B}_{2r}$ 且 $(x, t) \in \tilde{B}_r$, 那么 $r \leq |t-s| \leq 2$. 因此,

$$\frac{1}{|\tilde{B}_r|} \int_{\tilde{B}_r} |T^* f(x, t)| dx dt \leq C \left(1 + \left(\log \frac{2}{r} \right)^{1/p'} \right) \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C \left(\log \frac{2}{r} \right)^{1/p'} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

对于 $p=1$ 和 $p=\infty$ 的情形, 证明是类似的, 并且更简单. 这样证明了 (a).

(b) 只考虑二维情形. 当 $1 < p < \infty$ 时, 对于任意 $0 < \varepsilon < p-1$, 令

$$f(x, t) = \sum_{k=-\infty}^0 (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]}(x, t) \quad \text{且} \quad a_j = a^j,$$

其中 $a > 1$ 将在后文中确定. 则 f 的支撑包含于 $(-1, 0) \times (-1, 0)$, 且 $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是一个 ρ -缺项序列 ($\rho = a > 1$). 注意到

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \right| \\
 &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\
 &= \sqrt{\pi} 4^\alpha \Gamma(\alpha) \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

另外,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} = \sqrt{\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{du}{u} = 0$$

且

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\varepsilon \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} = 0.$$

因此, 可以选取足够大的 $a > 1$ 使得

$$\begin{aligned}
 &\int_{a^{-1}}^1 \int_{a^{-1}}^1 \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \\
 &= \int_{a^{-1}}^1 \int_{a^{-1}}^1 \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\
 &\geq 5 \left(\int_0^{1/a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} + \int_{a^{-1}}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \right) \\
 &> 5 \left(\left| \int_0^{1/a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \right| \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \left| \int_{a-1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \right|).$$

我们可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \\ &= \int_{a-1}^1 \int_{a-1}^1 \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} + \int_0^{1/a^2} \int_0^{a^{-1}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \\ & \quad + \int_a^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \\ &\geq \int_{a-1}^1 \int_{a-1}^1 \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} - \int_0^{1/a^2} \int_0^{a^{-1}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\ & \quad - \int_a^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\ &\geq \int_{a-1}^1 \int_{a-1}^1 \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} - \int_0^{1/a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\ & \quad - \int_{a-1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\ &> 0. \end{aligned}$$

因此, 存在常数 $C_1 > 0$ 使得

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} = C_1 > 0 \quad (6.2)$$

且

$$0 < \int_0^{1/a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} + \int_{a-1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \leq \frac{C_1}{4}. \quad (6.3)$$

另一方面, 由控制收敛定理得

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(h-z, h-u) dz \frac{du}{u} \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(-z, -u) dz \frac{du}{u} \\ &= C_1 > 0, \end{aligned}$$

其中 C_1 是 (6.2) 中的常数. 故存在 $\eta_0 \in (0, 1)$ 使得, 对于任意 $|h| < \eta_0$, 都有

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(h-z, h-u) dz \frac{du}{u} \geq \frac{C_1}{2}. \quad (6.4)$$

可以验证, 当 $j \leq 0$ 时,

$$f(a^j x, a^{2j} t) = (-1)^j f(x, t) + (-1)^j \sum_{k=1}^{-j} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]}(x, t).$$

在后面的证明中, 我们总是假设 $j \leq 0$. 由变量替换得

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t) &= C_\alpha \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f(x - a^j z, t - a^{2j} u) dz \frac{du}{u} \\ &= (-1)^j C_\alpha \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} \left\{ f\left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{-j} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right) \right\} dz \frac{du}{u}.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t) &= (-1)^{j+1} C_\alpha \left\{ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f\left(\frac{x}{a^{j+1}} - z, \frac{t}{a^{2(j+1)}} - u\right) dz \frac{du}{u} \right. \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} f\left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right) dz \frac{du}{u} \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} \sum_{k=1}^{-j-1} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^{j+1}} - z, \frac{t}{a^{2j+2}} - u\right) dz \frac{du}{u} \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} \sum_{k=1}^{-j} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right) dz \frac{du}{u} \right\}. \quad (6.5)\end{aligned}$$

对于上述给定的 η_0 , 令 $2r < 1$ 满足 $r < \eta_0^2$ 和 $r \sim a^{2J_0} \eta_0$ (J_0 为某负整数). 如果 $J_0 \leq j \leq 0$, 那么 $\frac{r}{a^{2j}} < \eta_0$. 对于任意 $-r \leq x, t \leq r$, 有

$$-1 \cdot \chi_{(0, +\infty) \times [a-1, +\infty)}(z, u) \leq \sum_{k=1}^{-j-1} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^{j+1}} - z, \frac{t}{a^{2j+2}} - u\right)$$

和

$$-1 \cdot \chi_{(0, +\infty) \times [a-1, +\infty)}(u) \leq \sum_{k=1}^{-j} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right).$$

因此, 对于 (6.5) 中的第 3 和 4 个积分, 由 (6.3) 知,

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} \sum_{k=1}^{-j-1} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^{j+1}} - z, \frac{t}{a^{2j+2}} - u\right) dz \frac{du}{u} \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} \sum_{k=1}^{-j} (-1)^k \chi_{(-a^k, -a^{k-1}] \times (-a^{2k}, -a^{2k-1}]} \left(\frac{x}{a^j} - z, \frac{t}{a^{2j}} - u\right) dz \frac{du}{u} \\ &\geq (-2) \int_{a-1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/(4u)}}{u^\alpha} \frac{e^{-\frac{z^2}{4u}}}{u^{1/2}} dz \frac{du}{u} \\ &\geq -\frac{C_1}{2}.\end{aligned} \quad (6.6)$$

故对于任意 $(x, t) \in [-r, r] \times [-r, r]$ 和 $J_0 \leq j \leq 0$, 结合 (6.4)–(6.6), 得

$$|\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t)| \geq C_\alpha \cdot \left(C_1 - \frac{C_1}{2}\right) = C \cdot C_1 > 0.$$

取 $v_j = (-1)^{j+1}(-j)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}$, 则 $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$. 那么对于 $N = (J_0, 0)$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4r^2} \int_{[-r,r]} \int_{[-r,r]} |T^* f(x,t)| dx dt &\geq \frac{1}{4r^2} \int_{[-r,r]} \int_{[-r,r]} |T_N^\alpha f(x,t)| dx dt \\ &\geq C_\alpha \frac{1}{4r^2} \int_{[-r,r]} \int_{[-r,r]} \sum_{j=J_0}^{-1} (C \cdot C_1 \cdot (-j)^{-\frac{1}{p-\varepsilon}}) dx dt \\ &\geq C_{p,\varepsilon,\alpha} \cdot C_1 \cdot (-J_0)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}} \sim \left(\log \frac{2}{r} \right)^{\frac{1}{(p-\varepsilon)'}}. \end{aligned}$$

(c) 令 $v_j = (-1)^{j+1}$, $a_j = a^j$ (其中 $a > 1$), $0 < \eta_0 < 1$ 为 (b) 的证明中所确定的常数. 考虑 (b) 的证明中相同的函数 f . 那么, $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = 1$ 且 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = 1$. 由 (b) 的证明中相同的讨论, 对于 $N = (J_0, 0)$ 和 $0 < \alpha < 1$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4r^2} \int_{[-r,r]} \int_{[-r,r]} |T^* f(x,t)| dx dt &\geq \frac{1}{4r^2} \int_{[-r,r]} \int_{[-r,r]} |T_N^\alpha f(x,t)| dx dt \\ &\geq C_\alpha \frac{1}{4r^2} \int_{[-r,r]} \int_{[-r,r]} \sum_{j=J_0}^0 C_1 dx dt \\ &\geq C_\alpha C_1 \cdot (-J_0) \sim \log \frac{2}{r}. \end{aligned}$$

定理 1.5 得证. □

致谢 非常感谢审稿人提出的宝贵意见和建议. 同时, 作者非常感谢 J. L. Torrea 教授和马涛教授在本文撰写过程中给予的帮助.

参考文献

- 1 Caffarelli L, Silvestre L. An extension problem related to the fractional Laplacian. *Comm Partial Differential Equations*, 2007, 32: 1245–1260
- 2 Stinga P R, Torrea J L. Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators. *Comm Partial Differential Equations*, 2010, 35: 2092–2122
- 3 Stein E M. *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*. Princeton: Princeton University Press, 1970
- 4 Lebedev N N. *Special Functions and Their Applications*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965
- 5 Jones R L, Rosenblatt J. Differential and ergodic transforms. *Math Ann*, 2002, 323: 525–546
- 6 Bernardis A L, Lorente M, Martín-Reyes F J, et al. Differential transforms in weighted spaces. *J Fourier Anal Appl*, 2006, 12: 83–103
- 7 Rubio de Francia J L, Ruiz F J, Torrea J L. Calderón-Zygmund theory for operator-valued kernels. *Adv Math*, 1986, 62: 7–48
- 8 Chao Z, Ma T, Torrea J L. Boundedness of differential transforms for one-sided fractional Poisson-type operator sequence. *J Geom Anal*, 2021, 31: 67–99
- 9 Chao Z, Torrea J L. Boundedness of differential transforms for heat semigroups generated by Schrödinger operators. *Canad J Math*, 2021, 73: 622–655
- 10 Duoandikoetxea J. *Fourier Analysis*. Translated and revised by David Cruz-Uribe. Graduate Studies in Mathematics, vol. 29. Providence: Amer Math Soc, 2001
- 11 Ruiz F J, Torrea J L. Vector-valued Calderón-Zygmund theory and Carleson measures on spaces of homogeneous nature. *Studia Math*, 1988, 88: 221–243
- 12 Li P, Stinga P R, Torrea J L. On weighted mixed-norm Sobolev estimates for some basic parabolic equations. *Commun Pure Appl Anal*, 2017, 16: 855–882
- 13 Martínez T, Torrea J L, Xu Q. Vector-valued Littlewood-Paley-Stein theory for semigroups. *Adv Math*, 2006, 203: 430–475

Boundedness of differential transforms for fractional Poisson type operators generated by parabolic operators

Chao Zhang

Abstract In this paper, we analyze the convergence of the following type of series

$$T_N^\alpha f(x, t) = \sum_{j=N_1}^{N_2} v_j (\mathcal{P}_{a_{j+1}}^\alpha f(x, t) - \mathcal{P}_{a_j}^\alpha f(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad N = (N_1, N_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad \alpha > 0,$$

where $\{\mathcal{P}_\tau^\alpha\}_{\tau>0}$ are the fractional Poisson-type operators generated by the parabolic operator $L = \partial_t - \Delta$ with Δ being the classical Laplacian, $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ a bounded real sequence and $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ an increasing real sequence. Our analysis will consist of the boundedness, in $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ and in $\text{BMO}(\mathbb{R}^{n+1})$, of the operator T_N^α and its maximal operator $T^* f(x, t) = \sup_{N \in \mathbb{Z}^2} |T_N^\alpha f(x, t)|$. It is also shown that the local size of the maximal differential transform operators is the same as the order of a singular integral for functions f having local support. Moreover, if $\{v_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \in \ell^p(\mathbb{Z})$, we get an intermediate size between the local sizes of singular integrals and the Hardy-Littlewood maximal operator.

Keywords differential transforms, fractional Poisson operators, maximal operator

MSC(2020) 42B20, 42B25

doi: 10.1360/SSM-2021-0087