中国科学: 数学 2023 年 第 53 卷 第 10 期: 1349 ~ 1356

SCIENTIA SINICA Mathematica

论 文

双圆盘上 Hardy-Toeplitz 算子的几个问题

丁宣浩[1,2], 王章逸[1], 李永宁[1,2*]

1. 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067;
2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室, 重庆 400067

E-mail: dingxuanhao@ctbu.edu.cn, wangzhangyi@email.ctbu.edu.cn, yongningli@ctbu.edu.cn

收稿日期: 2022-08-18; 接受日期: 2023-04-28; 网络出版日期: 2023-06-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 121010920)、重庆市自然科学基金 (批准号: cstc2020jcyj-msxmX0318 和 CSTB2022NSCQ-MSX1045) 和重庆市教委 (批准号: KJQN202100822) 资助项目

摘要 本文分别提出关于双圆盘 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子的不变子空间、特征值与特征向量以及数值域的刻画等问题, 并对这些问题均给予肯定的回答.

关键词 双圆盘 Hardy 空间 Toeplitz 算子 不变子空间 特征值 数值域

MSC (2020) 主题分类 47B35

1 引言

设 $\mathbb{D}$ 为复平面 $\mathbb{C}$ 中的开单位圆盘, $\mathbb{D}^2 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的双圆盘, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ 为单位圆周, $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ 为 $\mathbb{D}^2$ 的特征边界. 记 dm 为 $\mathbb{T}^2$ 上的规范化的 Lebesgue 测度, 则 $L^p(\mathbb{T}^2, dm)$ 是 $\mathbb{T}^2$ 上一般的 Lebesgue 可测空间, $H^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 为 $L^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 中由集合

$$\{z_1^i z_2^j : z_1, z_2 \in \mathbb{T}, i, j \in \mathbb{Z}_+\}$$

生成的闭子空间. 双圆盘 Hardy 空间 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 是由 $\mathbb{D}^2$ 上满足不等式

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\mathbb{T}^2} |f(rz_1, rz_2)|^2 dm < \infty$$

的全纯函数构成的 Hilbert 空间. 对于 $f \in H^2(\mathbb{D}^2)$, 其范数定义为

$$\|f\|^2 = \sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\mathbb{T}^2} |f(rz_1, rz_2)|^2 dm.$$

该范数诱导了双圆盘 Hardy 空间上的内积, 下文用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积. 下面关于 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 的定义也是常用的, 即

$$H^2(\mathbb{D}^2) = \left\{ f(z_1, z_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z_1^m z_2^n : \sum_{m,n=0}^{\infty} |a_{mn}| < \infty \right\}.$$

英文引用格式: Ding X H, Wang Z Y, Li Y N. Some questions about the Hardy-Toeplitz operator of the bidisk (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1349–1356, doi: 10.1360/SSM-2022-0157

由文献 [8] 可知, $H^2(\mathbb{D}^2)$ 和 $H^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 是等距同构的. 因为 $H^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 中的元素在 $L^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 中正交系下的表达式与在 $\mathbb{D}^2$ 上的 Taylor 级数展式二者在形式上相同, 而且范数均为展开式中的系数绝对值的平方和的开方, 所以, 本文将 $H^2(\mathbb{D}^2)$ 和 $H^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 等同起来, 不再进行区分, 均用 H^2 表示. $H^\infty(\mathbb{D}^2)$ 是 $\mathbb{D}^2$ 上的所有有界全纯函数构成的空间, 且

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z_1, z_2)| : (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2\}.$$

H^2 是具有再生核的 Hilbert 空间, 其再生核为

$$K_z(w) = \frac{1}{1 - \overline{z_1}w_1} \cdot \frac{1}{1 - \overline{z_2}w_2},$$

其中, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{D}^2$. 从而, 标准化的再生核为

$$k_z(w) = \frac{\sqrt{1 - |z_1|^2}}{1 - \overline{z_1}w_1} \cdot \frac{\sqrt{1 - |z_2|^2}}{1 - \overline{z_2}w_2}.$$

记 $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \overline{z_1}}$ 和 $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \overline{z_2}}$ 为 Laplace 算子. 对于任意的 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2, dm)$, 其 Berezin 变换 $\tilde{\varphi}(z) = \langle \varphi k_z, k_z \rangle$ 是 $\mathbb{D}^2$ 上的 2- 调和函数, 即 $\Delta_1 \tilde{\varphi}(z) = 0$, $\Delta_2 \tilde{\varphi}(z) = 0$. 对于 $t \in \mathbb{T}^2$, 由于极限 $\lim_{r \to 1^-} \tilde{\varphi}(rt) = \varphi(t)$ 几乎处处成立, 故本文对 φ 和 $\tilde{\varphi}$ 不再加以区分.

设 P 是从 $L^2(\mathbb{T}^2, dm)$ 到 H^2 上的正交投影算子, 对于 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2, dm)$, 定义双圆盘上 Hardy 空间 H^2 上符号为 φ 的 Toeplitz 算子为

$$T_\varphi f = P(\varphi f), \quad \forall\, f \in H^2.$$

易知 T_φ 是有界线性算子.

设 M_φ 为双圆盘 Hardy 空间上的乘法算子, 在空间分解 $L^2(\mathbb{T}^2) = H^2(\mathbb{T}^2) \oplus (H^2(\mathbb{T}^2))^\perp$ 下, 乘法算子 M_φ 有如下 2×2 矩阵表示:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} T_\varphi & H^*_{\bar{\varphi}} \\ H_\varphi & S_\varphi \end{pmatrix},$$

其中, H_φ 为双圆盘 Hardy 空间 H^2 到其自身的正交补空间 $(H^2)^\perp$ 上的 Hankel 算子, 其定义为

$$H_\varphi f = (I - P)(\varphi f), \quad f \in H^2;$$

S_φ 为双圆盘 Hardy 空间的正交补空间 $(H^2)^\perp$ 上的对偶 Toeplitz 算子, 其定义为

$$S_\varphi g = (I - P)(\varphi g), \quad g \in (H^2)^\perp.$$

设 u 是 $\mathbb{D}^2$ 上的非常值的内函数, 则双圆盘 Hardy 空间 H^2 可分解为 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$, 其中 $K_u^2 = H^2 \ominus uH^2$ 为模空间. 在该分解下, 对于任意的 $\varphi \in L^\infty$, Toeplitz 算子 T_φ 可表示成下述 2×2 算子矩阵:

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} t_\varphi & h^*_{\bar{\varphi}} \\ h_\varphi & a_\varphi \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

其中, 对于 $f \in uH^2$, $t_\varphi f = uP\bar{u}\varphi f$ 为小 Toeplitz 算子, $h_\varphi f = (I - uP\bar{u})\varphi f$ 为小 Hankel 算子, a_φ 为 K_u^2 到其自身上的截断 Toeplitz 算子. 令 M_u 为从 H^2 到 uH^2 上的算子且对于 $f \in H^2$, 有 $M_u f = uf$, 则易知 M_u 是酉算子且 $M_u T_\varphi M_{\bar{u}} = t_\varphi$, 即 T_φ 与 t_φ 是酉等价的.

设 H 是可分的 Hilbert 空间, T 是 H 上的有界线性算子. 如果 H 的闭子空间 M 满足 $TM \subset M$, 则称 M 为 T 的不变子空间. 对于双圆盘 Hardy 空间 H^2 及其上的有界线性算子 T_1 和 T_2, 如果闭子空间 $N \subset H^2$ 是 T_1 和 T_2 的公共不变子空间, 则称 N 为算子组 $\{T_1, T_2\}$ 的联合不变子空间. 双圆盘 Hardy 空间上的两个移位算子 T_{w_i} $(i = 1, 2)$ 定义为

$$T_{w_i} f = w_i f, \quad \forall f \in H^2.$$

一直以来, 是否每个可分的无穷维 Hilbert 空间上的有界线性算子均有非平凡的闭的不变子空间是一个有趣的但非常困难且至今仍未得到解决的公开问题, 也是经典算子理论领域的核心问题之一. 对于不变子空间问题, 一个有希望的方法是, 通过计算具体的特殊算子并观察它们的不变子空间的结构来积累证据. 单边移位算子的不变子空间问题是一个很好的具体例子. Beurling [1] 首次利用解析函数论的方法刻画了单位圆盘 Hardy 空间上的单边移位算子的所有闭的不变子空间. 众所周知, 根据 Beurling 定理 [1] 容易得到: 若 u 为双圆盘 Hardy 空间 H^2 上的内函数, 则 uH^2 为 H^2 上的算子组 $\{T_{w_1}, T_{w_2}\}$ 的联合不变子空间, 并且容易验证对于 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$, uH^2 也是 T_φ 的不变子空间. 特别地, 设 $M_{ij} = w_1^i w_2^j H^2$ $(i, j \geqslant 0)$, 则 M_{ij} 显然是 $\{T_{w_1}, T_{w_2}\}$ 的联合不变子空间. 但是, 并非所有的 $\{T_{w_1}, T_{w_2}\}$ 的联合不变子空间均能写成 uH^2 形式, 其中 u 为内函数 [8]. 由此, 引出本文的第一个问题:

问题 1.1 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ 以及 $M_{ij} = w_1^i w_2^j H^2$, $\forall i, j \geqslant 0$. 若 $\{T_{w_1}, T_{w_2}\}$ 的联合不变子空间中所有形式为 M_{ij} 的子空间都是 T_φ 的不变子空间, 是否可得 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T}^2)$?

算子的特征值和特征向量是泛函分析等相关领域的学者所关注的重要问题之一. 对于双圆盘 Hardy 空间 H^2 上的 Toeplitz 算子, 一个众所周知的事实是, 如果 $\varphi \in \overline{H^\infty(\mathbb{D}^2)}$, 则有 $T_\varphi K_z = \varphi(z) K_z$, 即 K_z 是 T_φ 的特征向量. 那么是否只有余解析符号的 Toeplitz 算子才有这种性质呢? 于是很自然地有下面的问题:

问题 1.2 设 A 是 H^2 上的有界线性算子, 如果对于 $z \in \mathbb{D}^2$, 有 $AK_z = \lambda_z K_z$, 则 A 是否是余解析符号的 Toeplitz 算子?

设 T 为 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子, 则算子 T 的数值域定义为集合

$$W(T) = \{\langle Tf, f\rangle : f \in H, \|f\| = 1\}.$$

与算子的谱类似, 算子的数值域是复平面中的子集并且可以反映出算子的一些代数性质. 例如, T 是自伴算子当且仅当 $W(T) \subset \mathbb{R}$, T 是半正定的当且仅当 $W(T) \subset [0, \infty)$. 如果 T 是亚正规算子 [2], 则 T 是凸算子, 即 $\overline{W(T)} = \mathrm{conv}\sigma(T)$, 其中 $\mathrm{conv}M$ 表示集合 M 的凸包. Klein [5] 应用算子的谱完全刻画了单位圆盘上的 Hardy-Toeplitz 算子的数值域.

对于双圆盘 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子, 若 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, $z \in \mathbb{D}^2$, 容易得到

$$\varphi(z) = \langle \varphi k_z, k_z\rangle = \langle T_\varphi k_z, k_z\rangle \in W(T_\varphi),$$

即 $\varphi(\mathbb{D}^2) \in W(T_\varphi)$. 反过来, 集合 $\varphi(\mathbb{D}^2)$ 是否包含 $W(T_\varphi)$? 从而有以下问题:

问题 1.3 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, $\varphi(\mathbb{D}^2)$ 可以刻画 T_φ 的数值域 $W(T_\varphi)$ 吗?

对于以上 3 个问题, 本文分别在第 2–4 节给出了肯定的回答.

2 不变子空间

本节主要关注双圆盘 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子的不变子空间问题, 给出问题 1.1 的肯定回答. 本节的主要结果如下:

定理 2.1 设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ 及 $M_{ij} = w_1^i w_2^j H^2$ $(i, j \geqslant 0)$. 若所有的 M_{ij} $(i, j \geqslant 0)$ 均是 T_φ 的不变子空间, 则 $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T}^2)$.

证明 对于 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, 可将 $\varphi(w_1, w_2)$ 表示成

$$\varphi = \varphi_{++} + \varphi_{+-} + \varphi_{-+} + \varphi_{--},$$

其中, φ_{++} 是关于两个变量均解析的函数; φ_{--} 是关于两变量均共轭解析的函数; φ_{+-} 是关于 w_1 解析且关于 w_2 共轭解析的函数, 并满足 $\varphi_{+-}(0, w_2) = 0$ 和 $\varphi_{+-}(w_1, 0) = 0$; φ_{-+} 是关于 w_1 共轭解析且关于 w_2 解析的函数, 并满足 $\varphi_{-+}(0, w_2) = 0$ 和 $\varphi_{-+}(w_1, 0) = 0$.

对于 M_{ij}, 取 $i = 1$ 和 $j = 0$, 由 Beurling 定理[1] 易知, $M_{10} = w_1 H^2$ 是 T_{w_1} 和 T_{w_2} 的联合不变子空间. 根据已知条件, 则有

$$T_\varphi M_{10} \subset M_{10}.$$

对于 $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{T}^2$, 因为

$$\begin{aligned}
T_\varphi w_1 &= \varphi_{++}(w_1, w_2) w_1 + P\varphi_{+-}(w_1, w_2) w_1 + P\varphi_{-+}(w_1, w_2) w_1 + P\varphi_{--}(w_1, w_2) w_1 \\
&= \varphi_{++}(w_1, w_2) w_1 + 0 + P w_1 \sum_{i,j=1}^{\infty} \varphi_{-+}(i, j) \overline{w_1}^i w_2^j + P \sum_{i,j=0}^{\infty} \varphi_{--}(i, j) \overline{w_1}^i \overline{w_2}^j w_1 \\
&= w_1 \varphi_{++}(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{-+}(1, j) w_2^j + \sum_{i=0}^{1} \varphi_{--}(i, 0) \overline{w_1}^i w_1 \\
&= w_1 \varphi_{++}(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{-+}(1, j) w_2^j + \varphi_{--}(0, 0) w_1 + \varphi_{--}(1, 0) \\
&\in w_1 H^2,
\end{aligned}$$

其中, $\varphi_{-+}(i, j)$ 表示 φ_{-+} 的 Taylor 展开式中对应项 $\overline{w_1}^i w_2^j$ 的系数, 其余符号类似, 所以可得

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{-+}(1, j) w_2^j + \varphi_{--}(1, 0) = 0,$$

从而 $\varphi_{-+}(1, j) = 0$, $\varphi_{--}(1, 0) = 0$. 同理, 由于

$$\begin{aligned}
T_\varphi w_1^2 &= \varphi_{++}(w_1, w_2) w_1^2 + P\varphi_{+-}(w_1, w_2) w_1^2 + P\varphi_{-+}(w_1, w_2) w_1^2 + P\varphi_{--}(w_1, w_2) w_1^2 \\
&= \varphi_{++}(w_1, w_2) w_1^2 + P \sum_{i=2, j \geqslant 1}^{\infty} \varphi_{-+}(i, j) \overline{w_1}^i w_2^j w_1^2 + P \sum_{i,j=0}^{\infty} \varphi_{--}(i, j) \overline{w_1}^i \overline{w_2}^j w_1^2 \\
&= w_1^2 \varphi_{++}(w) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{-+}(2, j) w_2^j + \varphi_{--}(0, 0) w_1^2 + \varphi_{--}(0, 0) w_1 + \varphi_{--}(2, 0) \\
&\in w_1^2 H^2,
\end{aligned}$$

$w_1^2\varphi_{++}(w)+\varphi_{--}(0,0)w_1^2\in w_1^2H^2$, 故可得

$$\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{-+}(2,j)w_2^j+\varphi_{--}(0,0)w_1+\varphi_{--}(2,0)\in w_1^2H^2.$$

但是

$$\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{-+}(2,j)w_2^j+\varphi_{--}(0,0)w_1+\varphi_{--}(2,0)\in (w_1^2H^2)^{\perp},$$

故

$$\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{-+}(2,j)w_2^j+\varphi_{--}(0,0)w_1+\varphi_{--}(2,0)=0,$$

从而 $\varphi_{-+}(2,j)=0$, $\varphi_{--}(0,0)=0$, $\varphi_{--}(2,0)=0$. 依次进行下去, 则可得 $\varphi_{-+}=0$ 和

$$\varphi_{--}(i,0)=0,\quad \forall\, i\geqslant 0.$$

同理, 利用 $T_\varphi w_2^jH^2\subset w_2^jH^2$, 应用上述同样的方法, 可得 $\varphi_{+-}=0$ 且 $\varphi_{--}(0,j)=0$, $\forall\, j\geqslant 0$. 从而 $\varphi=\varphi_{++}+\varphi_{--}$ 且 $\varphi_{--}(0,w_2)=0$ 和 $\varphi_{--}(w_1,0)=0$. 又由于 $T_\varphi w_1^mw_2^nH^2\subset w_1^mw_2^nH^2$,

$$\begin{aligned}
T_\varphi w_1^mw_2^n&=w_1^mw_2^n\varphi_{++}(w_1,w_2)+P\varphi_{--}(w_1,w_2)w_1^mw_2^n\\
&=w_1^mw_2^n\varphi_{++}(w_1,w_2)+P\sum_{i,j=0}^{\infty}\varphi_{--}(i,j)\overline{w_1}^i\overline{w_2}^jw_1^mw_2^n\\
&=w_1^mw_2^n\varphi_{++}(w_1,w_2)+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{--}(i,j)w_1^{m-i}w_2^{n-j}\\
&\in w_1^mw_2^nH^2,
\end{aligned}$$

$w_1^mw_2^n\varphi_{++}\in w_1^mw_2^nH^2$, 所以

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{--}(i,j)w_1^{m-i}w_2^{n-j}\in w_1^mw_2^nH^2.$$

又因为 $\varphi_{--}(0,0)=0$, 故

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{--}(i,j)w_1^{m-i}w_2^{n-j}\perp w_1^mw_2^nH^2,$$

从而

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\varphi_{--}(i,j)w_1^{m-i}w_2^{n-j}=0,$$

因此

$$\varphi_{--}(i,j)=0,\quad 0\leqslant i\leqslant m,\quad 0\leqslant j\leqslant n.$$

由 m 和 n 的任意性可知 $\varphi_{--}=0$, 从而 $\varphi=\varphi_{++}\in H^\infty(\mathbb{T}^2)$. 结论得证. □

注 2.1 对于 $M_{ij}=w_1^iw_2^jH^2$ $(i,j\geqslant 0)$, 若 A 是 H^2 上的有界线性算子且满足 $AM_{ij}\subset M_{ij}$, $\forall\, i,j\geqslant 0$, 则 A 不一定是 Toeplitz 算子. 例如, 定义算子 A 为 $Aw_1^i=\alpha_iw_1^{i+1}$, $\alpha_i>0$, 则显然有 $AM_{ij}\subset M_{ij}$, $\forall\, i,j\geqslant 0$, 但 A 不是 Toeplitz 算子.

3 特征值和特征向量

本节主要关注双圆盘 Hardy 空间上的有界线性算子的特征值和特征向量问题. 本节的第一个主要结论如下:

定理 3.1 设 A 为双圆盘 Hardy 空间 H^2 上的有界线性算子. 若对于任意的 $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{D}^2$, K_z 是算子 A 的特征向量, 则存在 $\varphi\in\overline{H^\infty}$ 使得 $A=T_\varphi$.

证明 对于 $z\in\mathbb{D}^2$, 由已知可得存在 λ_z 使得 $AK_z=\lambda_zK_z$, 其中 λ_z 是由 z 确定的数. 由于

$$K_z(w)=\frac{1}{1-\overline{z_1}w_1}\cdot\frac{1}{1-\overline{z_2}w_2},$$

故可得 $\lambda_z=(1-\overline{z_1}w_1)(1-\overline{z_2}w_2)AK_z$, 从而可知 λ_z 是关于 z 的共轭解析函数. 令 $\varphi(z)=\lambda_z$. 又因为 $\langle Ak_z,k_z\rangle=\langle\lambda_zk_z,k_z\rangle=\lambda_z$, 所以

$$|\lambda_z|=|\varphi(z)|=|\langle Ak_z,k_z\rangle|\leqslant\|A\|,$$

从而 φ 是 $\mathbb{D}^2$ 上的有界共轭解析函数. 因此, 由 $\langle Ak_z,k_z\rangle=\varphi(z)=\langle P\varphi k_z,k_z\rangle=\langle T_\varphi k_z,k_z\rangle$ 以及 Berezin 变换的单射性 [9] 便可得 $A=T_\varphi$. 证毕. □

众所周知, 如果 $\varphi\in\overline{H^\infty(\mathbb{D}^2)}$, 则有 $T_\varphi K_z=\varphi(z)K_z$, 即 K_z 是 T_φ 的特征向量. 反过来, 可得如下结论:

定理 3.2 设 $\varphi\in L^\infty$, 若存在 $z\in\mathbb{D}^2$, 使得 K_z 是 T_φ 的特征向量, 则 $\varphi\in\overline{H^\infty}$.

证明 由已知, 存在 $z\in\mathbb{D}^2$, 使得 K_z 是 T_φ 的特征向量, 即 $T_\varphi K_z=\lambda_zK_z$, 从而 $P\varphi K_z=\lambda_zK_z$. 对于 $\varphi\in L^\infty$, $\varphi(w_1,w_2)$ 可表示成

$$\varphi=\varphi_{++}+\varphi_{+-}+\varphi_{-+}+\varphi_{--},$$

其中, φ_{++} 是关于两个变量均解析的函数; φ_{--} 是关于两变量均共轭解析的函数; φ_{+-} 是关于 w_1 解析且关于 w_2 共轭解析的函数, 并满足 $\varphi_{+-}(0,w_2)=0$ 和 $\varphi_{+-}(w_1,0)=0$; φ_{-+} 是关于 w_1 共轭解析且关于 w_2 解析的函数, 并满足 $\varphi_{-+}(0,w_2)=0$ 和 $\varphi_{-+}(w_1,0)=0$. 故可得

$$P\varphi K_z=\varphi_{++}(w)K_z(w)+[\varphi_{+-}(w_1z_2)+\varphi_{-+}(z_1w_2)]K_z(w)+\varphi_{--}(w)K_z(w)=\lambda_zK_z,$$

从而

$$\varphi_{++}(w)+\varphi_{--}(z)+\varphi_{+-}(w_1z_2)+\varphi_{-+}(z_1w_2)=\lambda_z,$$

即 $\varphi_{++}(w)+\varphi_{+-}(w_1z_2)+\varphi_{-+}(z_1w_2)=\lambda_z-\varphi_{--}(z)$. 由于

$$\frac{\partial}{\partial w_1}(\varphi_{++}(w)+\varphi_{+-}(w_1z_2))=0, \tag{3.1}$$

故 $\varphi_{++}(w)$ 关于 w_2 是常数. 同理, 由

$$\frac{\partial}{\partial w_2}(\varphi_{++}(w)+\varphi_{-+}(z_1w_2))=0, \tag{3.2}$$

可得 $\varphi_{++}(w)$ 关于 w_1 是常数. 从而有

$$\frac{\partial}{\partial w_1}\varphi_{++}(w)=0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\varphi_{++}(w)=0. \tag{3.4}$$

因此, 由 (3.1) 和 (3.3) 可得 $\frac{\partial}{\partial w_1}\varphi_{+-}(w_1z_2)=0$, 从而 $\varphi_{+-}(w_1z_2)=0$. 同理, 由 (3.2) 和 (3.4) 可得

$$\frac{\partial}{\partial w_2}\varphi_{-+}(z_1w_2)=0,$$

从而 $\varphi_{-+}(z_1w_2)=0$. 因此有 $\varphi=\varphi_{--}\in\overline{H^\infty}$. □

4 数值域

本节给出双圆盘 Hardy 空间上有界符号的 Toeplitz 算子数值域的刻画, 其中需要用到分块算子矩阵的二次数值域的性质. 首先给出本节需要的基本知识. 下述关于算子数值域的一些简单性质, 其证明可参见文献 [4]. 更多关于算子数值域的知识可参见文献 [3,4].

引理 4.1 [4] 算子 T 的数值域 $W(T)$ 具有下述性质:

(1) $W(T)$ 是凸集;

(2) $\sigma(T)\subset\overline{W(T)}$;

(3) $W(T^*)=\{\bar\lambda,\lambda\in W(T)\}$;

(4) 对于任意的酉算子 U, 都有 $W(U^*TU)=W(T)$.

设 H_1 和 H_2 为 Hilbert 空间, 记 $\mathcal{A}$ 为 $H_1\oplus H_2$ 上的由下述分块矩阵给出的线性算子:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中, A 和 D 分别表示 H_1 和 H_2 上的线性算子, B 为从 H_1 到 H_2 上的线性算子, C 为从 H_2 到 H_1 上的线性算子.

2×2 分块算子矩阵 $\mathcal{A}$ 的二次数值域的概念由 Langer 和 Tretter [7] 引入, 定义为集合

$$W^2(\mathcal{A})=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\det\begin{pmatrix}\langle Ax,x\rangle-\lambda & \langle By,x\rangle\\ \langle Cx,y\rangle & \langle Dy,y\rangle-\lambda\end{pmatrix}=0,\|x\|=\|y\|=1\ \text{且}\ x\in H_1,y\in H_2\right\}.$$

分块算子矩阵的二次数值值域的一些基本性质见下述引理, 其证明可参见文献 [6].

引理 4.2 [6] $H_1\oplus H_2$ 上的线性算子 $\mathcal{A}$ 的二次数值域 $W^2(\mathcal{A})$ 具有如下性质:

(1) $W^2(\mathcal{A})\subset W(\mathcal{A})$.

(2) $\sigma(\mathcal{A})\subset\overline{W^2(\mathcal{A})}$.

(3) $W^2(\mathcal{A}^*)=(W^2(\mathcal{A}))^*=\{\lambda\in\mathbb{C}:\bar\lambda\in W^2(\mathcal{A})\}$.

(4) 若 $\dim H_2>1$, 则 $W(A)\subset W^2(\mathcal{A})$; 若 $\dim H_1>1$, 则 $W(D)\subset W^2(\mathcal{A})$.

本节的主要结论如下:

定理 4.1 设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, 则 $\overline{W(T_\varphi)}=\mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)}$, 其中 $\mathrm{conv}M$ 表示集合 M 的凸包.

证明 对于 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, 由于 $\overline{W(M_\varphi)}=\mathrm{conv}\sigma(M_\varphi)=\mathrm{conv}\mathcal{R}(M_\varphi)$, 其中, M_φ 为双圆盘 Hardy 空间上的乘法算子, $\mathcal{R}(M_\varphi)$ 为 M_φ 的本质值域, 又因为 $\mathcal{R}(M_\varphi)\subset\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)}$, 故可得 $\mathrm{conv}\mathcal{R}(M_\varphi)\subset\mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)}$, 从而 $\overline{W(M_\varphi)}\subset\mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)}$. 对于任意的 $z\in\mathbb{D}^2$, 由于

$$\langle M_\varphi k_z,k_z\rangle=\varphi(z)\in W(M_\varphi),$$

所以有 $\varphi(\mathbb{D}^2) \subset W(M_\varphi)$, 从而 $\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)} \subset \overline{W(M_\varphi)}$. 由于 $W(M_\varphi)$ 是凸集, 故可知 $\overline{W(M_\varphi)}$ 也是凸集, 所以 $\mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)} \subset \overline{W(M_\varphi)}$, 因此 $\overline{W(M_\varphi)} = \mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)}$.

由于 $\dim((H^2)^\perp) > 1$, 所以由引理 4.2 可得

$$W(T_\varphi) \subset W^2(M_\varphi) \subset W(M_\varphi). \tag{4.1}$$

对于任意的 $z \in \mathbb{D}^2$, 因为 $\langle \varphi k_z, k_z \rangle = \varphi(z) \in W(T_\varphi)$, 所以 $\varphi(\mathbb{D}^2) \subset W(T_\varphi)$, 从而 $\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)} \subset \overline{W(T_\varphi)}$. 由于 $W(T_\varphi)$ 是凸集, 故 $\overline{W(T_\varphi)}$ 也是凸集, 所以 $\mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)} \subset \overline{W(T_\varphi)}$. 又因为 $\mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)} = \overline{W(M_\varphi)}$, 结合 (4.1), 从而可得 $\overline{W(T_\varphi)} = \mathrm{conv}\overline{\varphi(\mathbb{D}^2)}$. 因此结论成立. □

由二次数值域的定义可知, 2×2 分块算子矩阵的二次数值域与空间分解有关. 对于双圆盘 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子, 在空间分解 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$ 下, 下述结论给出了双圆盘 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的二次数值域的刻画:

定理 4.2 设 $\varphi \in L^\infty$, u 是 $\mathbb{D}^2$ 上的阶大于 1 的内函数, 则在空间分解 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$ 下, 有 $W^2(T_\varphi) = W(T_\varphi)$.

证明 由 T_φ 在空间分解 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$ 下的矩阵表示 (1.1) 及引理 4.2 可得

$$W(t_\varphi) \subset W^2(T_\varphi) \subset W(T_\varphi).$$

由于 T_φ 与 t_φ 是酉等价的, 所以根据引理 4.1 可得 $W(t_\varphi) = W(T_\varphi)$, 从而 $W^2(T_\varphi) = W(T_\varphi)$. 证毕. □

参考文献

1 Beurling A. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math, 1949, 81: 239–255

2 Conway J B. Subnormal Operators. Boston: Pitman, 1981

3 Gustafson K E, Rao D K M. Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators and Matrices. Berlin: Springer, 1997

4 Halmos P R. A Hilbert Space Problem Book, 2nd ed. Berlin: Springer, 1982

5 Klein E M. The numerical range of a Toeplitz operator. Proc Amer Math Soc, 1972, 35: 101–103

6 Langer H, Markus A, Matsaev V, et al. A new concept for block operator matrices: The quadratic numerical range. Linear Algebra Appl, 2001, 330: 89–112

7 Langer H, Tretter C. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J Operator Theory, 1998, 39: 339–359

8 Rudin W. Function Theory in Polydiscs. New York: Benjamin, 1969

9 Zhu K H. Operator Theory in Function Spaces, 2nd ed. Providence: Amer Math Soc, 2007

Some questions about the Hardy-Toeplitz operator of the bidisk

Xuanhao Ding, Zhangyi Wang & Yongning Li

Abstract In this paper, we formulate several questions about the invariant subspaces, the eigenvalues and the eigenvectors, and the characterization of the numerical range for the Toeplitz operator on the Hardy space over the bidisk, respectively, and we give the affirmative answers to the questions.

Keywords Hardy space over the bidisk, Toeplitz operator, invariant subspace, eigenvalue, numerical range

MSC(2020) 47B35

doi: 10.1360/SSM-2022-0157