



齐性空间自映射的同伦分类

献给杨乐教授 80 华诞

段海豹^{1,2*}, 林贤祖^{3,4}

1. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所, 北京 100190;

2. 中国科学院大学数学科学学院, 北京 100049;

3. 福建师范大学数学与信息学院, 福州 350117;

4. 福建省分析数学及应用重点实验室, 福州 350117

E-mail: dhh@math.ac.cn, linxianzu@126.com

收稿日期: 2019-01-05; 接受日期: 2019-05-05; 网络出版日期: 2019-08-22; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11771427) 资助项目

摘要 齐性空间是几何学中一类重要流形, 而连续映射的同伦分类是代数拓扑学中一个基本问题. 本文是一篇关于齐性空间自映射的同伦分类的综述文章. 本文回顾这个课题的前期工作, 介绍最新的进展, 以及林贤祖的一些新结果.

关键词 环同态 拓扑空间的自映射 齐性空间 旗流形

MSC (2010) 主题分类 55S37

1 引言

对于一个拓扑空间 X , 决定它的全体自映射 $f: X \rightarrow X$ 的同伦等价类 $[f]$ 的集合 $[X, X]$, 是代数拓扑学中一个基础性问题. 根据上同调理论的函子性质, 这个集合有一个代数表示:

$$r: [X, X] \rightarrow \text{End}(H^*(X)), \quad r[f] = f^*,$$

其中 $\text{End}(H^*(X))$ 是空间 X 的上同调环 $H^*(X)$ 的所有自同态的集合, 而 f^* 表示自映射 $f: X \rightarrow X$ 所诱导的上同调环同态. 此外, 关于集合 $[X, X]$ 和 $\text{End}(H^*(X))$ 中显而易见的半群 (monoid) 结构, r 也是一个半群同态. 利用这个表示, 决定同伦集合 $[X, X]$ 这个几何问题, 可分如下三个步骤完成:

- (i) (代数问题) 计算 $\text{End}(H^*(X)) = ?$;
- (ii) (实现问题) 决定 $\text{Im } r \subseteq \text{End}(H^*(X))$;
- (iii) (同伦问题) 如果 $r[f] = r[g]$, 判定是否有 $f \simeq g$.

英文引用格式: Duan H B, Lin X Z. Homotopic classification of self-maps of homogeneous spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 1293–1302, doi: 10.1360/N012019-00012

这个方法起源于 Hopf^[1] 对于 n 维球面 S^n 的自映射进行的同伦分类的工作. 他将球面的一个自映射 $f: S^n \rightarrow S^n$, 联系到唯一一个整数 d , 称为映射 f 的度数, 满足 $f^*(\alpha) = d \cdot \alpha$, 其中 $\alpha \in H^n(S^n) = \mathbb{Z}$ 是一个生成元. 据此, Hopf 证明了下述结果.

定理 1.1^[1] 对于 $n > 0$, n - 维球面 S^n 的自映射的度数诱导同构 $[S^n, S^n] \cong \mathbb{Z}$.

球面 S^n 是最为简单的齐性空间 (homogeneous spaces). 对于一般的齐性空间, 或者流形而言, 我们需要建立有效的理论, 使得 Hopf 的方法可以成功实施. 在本综述文章中, 我们将针对几何中具有基础地位的齐性空间和旗流形 (flag manifolds), 介绍这个课题的主要结果、最新进展, 以及所遗留的问题. 具体包括 X 为射影空间的情形 (第 2 节)、旗流形的上同调环自同态的分类 (第 3 节) 和上同调环自同态的实现问题 (第 4 节). 文中的上同调如果没标明系数, 则都理解为整系数上同调.

2 射影空间的自映射

众所周知, 射影空间共有三类, 即 n - 维实射影空间 $\mathbb{R}P^n$ 、 n - 维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 和 n - 维四元数射影空间 $\mathbb{H}P^n$. 我们也允许 $n = \infty$, 这时的射影空间就是无穷维射影空间. 其中 $\mathbb{R}P^n$ 和 $\mathbb{C}P^n$ 的自映射的同伦分类是比较简单的 (参见文献 [2]), 因为它们分别是 Eilenberg-MacLane 空间 $\mathbb{R}P^\infty$ 和 $\mathbb{C}P^\infty$ 的 n - 维骨架和 $2n$ - 维骨架. 例如, 对于 $\mathbb{C}P^n$, 我们有如下的简单结果 (参见文献 [2]):

定理 2.1 对于任意同伦类 $f \in [\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n]$, 存在唯一整数 $\alpha \in \mathbb{Z}$, 使得 $f^*(x) = \alpha \cdot x$, 其中 x 是 $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ 的一个生成元.

进一步, 集合间对应 $f \mapsto \alpha$ 诱导同构 $[\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n] \simeq \mathbb{Z}$.

定理 2.1 给出了 n - 维复射影空间 $\mathbb{C}P^n$ 自映射的完整的同伦分类. 但是相比较之下, $\mathbb{H}P^n$ 的情形就复杂多了, 因为无穷维四元数射影空间 $\mathbb{H}P^\infty$ 不是 Eilenberg-MacLane 空间. 与定理 2.1 类似, 给定四元数射影空间 $\mathbb{H}P^n$ 的一个自映射 f , 存在唯一的一个整数 d , 使得 $f^*(x) = d \cdot x$, 其中 x 是 $H^4(\mathbb{H}P^n) = \mathbb{Z}$ 的一个生成元. 称这个整数 d 为自映射 f 的指标, 记为 $\text{ind } f$.

对于每个正整数 k , 令

$$C_k = \begin{cases} \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \prod_{0 \leq i \leq k-1} (x - i^2) \equiv 0 \pmod{\frac{(2k)!}{2}} \right\}, & \text{若 } k \equiv 1 \pmod{2}, \\ \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \prod_{0 \leq i \leq k-1} (x - i^2) \equiv 0 \pmod{(2k)!} \right\}, & \text{若 } k \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

对于每个正整数 n , 定义交集 $FG_n := C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n$. Feder 和 Gitler^[3] 运用了复 K - 理论和四元数 K - 理论, 证明了下述结果:

定理 2.2^[3] 如果整数 m 可以实现为 n 维四元数射影空间 $\mathbb{H}P^n$ 的某个自映射的指标, 则必有 $m \in FG_n$.

例如, 对于四元数射影平面 $\mathbb{H}P^2$ 的一个自映射, 它的指标 m 必须满足同余式

$$m(m-1) \equiv 0 \pmod{(24)}. \quad (2.1)$$

Feder 和 Gitler^[3] 还提出了下面的猜想:

猜想 2.1 每个整数 $k \in FG_n$ 可以实现为 $\mathbb{H}P^n$ 的某个自映射的指标.

当 $n = 1, 2$ 时, 这个猜想是很容易验证. McGibbon^[2] 给出了关于 $n = 3$ 的证明. 2003 年, Granja^[4] 证明了 $n = 4, 5$ 的情形. $n \geq 6$ 时这个猜想一直悬而未决, 成为了这个领域具有挑战性的公开难题. 文

献 [2, 4] 使用的逐个维数延拓的方法, 在高维的时候已经行不通了. 本文第二位作者认为一个潜在可行的办法是运用代数的方法, 建立 $\mathbb{H}P^n$ 的一个全新的同伦模型.

当 $n = \infty$ 时, 这个猜想也是正确的, 因为文献 [3] 中就已经指出集合 FG_∞ 是由零和所有的奇平方数组成, 而 Sullivan 在 1970 年他的专著 [5] 中早已证明, 所有的奇平方数都可以实现为 $\mathbb{H}P^\infty$ 的某个自映射的指标.

另一方面, 当 n 为有限时, 存在 $\mathbb{H}P^n$ 的两个指标相等但不是同伦等价的自映射 (参见文献 [6, 7]). 而 Mislin^[8] 在 1987 年证明了 $\mathbb{H}P^\infty$ 的两个指标相等的自映射总是同伦等价的. Sullivan、Feder、Gitler 和 Mislin 关于 $\mathbb{H}P^\infty$ 的自映射同伦分类的工作后来被推广到任意连通紧 Lie 群 G 的分类空间 BG 的情形, 参见文献 [9–11].

在代数拓扑中, 除了上述常见的三类射影空间外, 还有 Cayley 射影平面 $\mathbb{K}P^2$. 由于 $\mathbb{K}P^2$ 具有十分简单的腔胞结构, 它的自映射的同伦分类是比较简单的, 也可以作为代数拓扑的一道很不错的习题, 答案参见文献 [12].

另外, 如果考虑 p -局部化空间, 我们还有一大类 p -局部化射影空间, 我们先简要介绍这类空间, 详见文献 [5]. 首先令 p 为一个奇素数. 当正整数 $n \mid p-1$ 时, p -局部化球面 S_p^{2n-1} 具有道路空间结构 $S_p^{2n-1} \simeq \Omega B_p^{2n-1}$, 且 B_p^{2n-1} 在同伦意义下是唯一的. 称 B_p^{2n-1} 为 p -局部化无穷射影空间. 与无穷射影空间类似, 我们有

$$H^*(B_p^{2n-1}) = \mathbb{Z}_p[\alpha],$$

其中 $\mathbb{Z}_p$ 是 $\mathbb{Z}$ 的 p -局部化, 且 $\alpha \in H^{2n}(B_p^{2n-1})$ 是生成元. 对于任意的 $k \in \mathbb{Z}_p$, 我们也可以定义类似的上同调环自同态

$$j_k : H^*(B_p^{2n-1}) \rightarrow H^*(B_p^{2n-1}), \quad \alpha \mapsto k\alpha.$$

关于这类射影空间的自映射, 我们有下列结果 (参见文献 [13]):

定理 2.3 令 $\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_p$ 为 $\mathbb{Z}_p$ 的 p -完备化, 则同态 j_k 可以由空间 B_p^{2n-1} 的自映射诱导的充分且必要的条件是, k 在 $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ 中是一个 n 次幂.

证明 B_p^{2n-1} 的自映射的构造需要用到 Sullivan 关于 p -局部化和 p -完备化同伦理论^[5]. 利用 p -完备化的 K 理论和 Chern 特征, 必要性的证明可以归结为一个整值多项式序列的计算, 参见文献 [13]. $\square$

3 齐性空间上同调环的自同态的分类

对于一个紧致连通 Lie 群 G 以及它的一个闭子群 P , 商空间 G/P 是一个光滑流形, 称为群 G 的一个齐性空间. 进一步, 如果 $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G$ 是 Lie 群 G 的一个单参数子群, 则它在 G 中的中心化子

$$G_\alpha = \{g \in G, g\alpha(t)g^{-1} = \alpha(t), t \in \mathbb{R}\}$$

是 G 的一个抛物子群. 此时, 齐性空间 G/G_α 也是一个代数流形, 称为 Lie 群 G 的一个旗流形 (flag manifold).

齐性空间是前两节中所讨论过的球面 S^n 与射影类空间的自然推广. 它们的上同调环的结构更为丰富. 尤其是, 对于旗流形 $M = G/G_\alpha$ 而言, 我们有如下两个经典结果, 使得对于同伦集合 $[M, M]$ 的研究可以深入展开.

引理 3.1 如果 $M = G/G_\alpha$ 是一个旗流形, 则上同调表示 $r : [X, X] \rightarrow \text{End}(H^*(X))$ 具有有限的核 (kernel) 和上核 (cokernel).

证明 令 M_Q 为旗流形 M 的有理化空间. 利用有理同伦论可以证明, 表示同态 r 的有理化

$$r_Q : [M_Q, M_Q] \rightarrow \text{End}(H^*(M_Q))$$

是一一对应, 详见文献 [14]. □

引理 3.2 对于一个旗流形 M , 存在一组偶数维上同调类 $\{x_1, \dots, x_n\}$, 以及这些类的一组多项式 $\{f_k(x_1, \dots, x_n), 1 \leq k \leq m\}$, 使得自然含入 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset H^*(M)$ 诱导环同构

$$H^*(M) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] / \langle f_1, \dots, f_m \rangle.$$

证明 根据 Bernstein 等^[15] 及 Bott 和 Samelson^[16] 的经典结果可知, 对于每个旗流形 M , 存在一个胞腔分解, 其中只有偶数维胞腔. 据此, 在上同调环 $H^*(M)$ 中, 可找到一个极小的偶数维生成元系 $\{x_1, \dots, x_n\}$, 使得它们到 $H^*(M)$ 的自然含入诱导环的满同态

$$h : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow H^*(M).$$

再根据 Hilbert 基定理可知, 存在一组多项式

$$\{f_1, \dots, f_m\} \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

满足 $\ker h = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. 至此, 引理得证.

在 Duan 和 Zhao 的近期工作 [17, 18] 中, Duan 和 Zhao 利用 Schubert 演算的方法, 得到了决定生成元系 $\{x_1, \dots, x_n\}$, 以及关系 $\{f_1, \dots, f_m\}$ 的显性表达式的一般方法. □

总之, 引理 3.1 表明, 决定旗流形 M 上同调环 $H^*(M)$ 的全部自同态, 是解答 M 的自映射的同伦分类问题的至关重要一步. 而引理 3.2 则表明, 决定上同调环 $H^*(M)$ 的自同态, 本质上是一个代数问题. 为了介绍相关结果, 我们引入旗流形的第一组实例.

例 3.1 在 n 阶酉群 $G = U(n)$ 中, 任一单参数子群 $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow U(n)$ 共轭于同态

$$\alpha(t) = \text{diag}\{e^{it\theta_1} I_{k_1}, \dots, e^{it\theta_m} I_{k_m}\},$$

其中 $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_m < 2\pi$ 且 $k_1 + \dots + k_m = n$. 于是有

$$U(n)_\alpha = U(k_1) \times \dots \times U(k_m),$$

从而,

$$U(n)/U(n)_\alpha = \{\mathbb{C}^n = L_1 \oplus \dots \oplus L_m, \dim L_i = k_i, L_i \perp L_j\}.$$

关于此类旗流形 $U(n)/U(n)_\alpha$ 上同调环的显性表示, 我们考虑两种极端情形:

情形 1 如果 $m = n$, 则有 $k_i = 1$. 此时, $U(n)_\alpha = T^n$ 是 $U(n)$ 的极大环面子群, 相应的旗流形 $F(n) := U(n)/T^n$ 称为酉群 $U(n)$ 的全旗流形 (the complete flag manifold), 并且具有如下几何表述:

$$F(n) = \{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{C}P^{n-1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{n-1} \mid l_i \perp l_j\}.$$

n 元置换群 Σ_n 在该流形上有一个自然作用 $\Sigma_n \times F(n) \rightarrow F(n)$, 其定义是

$$\sigma(l_1, \dots, l_n) = (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(n)}), \quad \sigma \in \Sigma_n.$$

此外, 令 $x_i \in H^2(F(n))$ 为第 i 个因子空间 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上的 Hopf 复线丛的 Euler 类, 则由 Chern 类的公理性质可证明

$$H^*(F(n)) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] / \langle e_r(x_1, \dots, x_n), 1 \leq r \leq n \rangle,$$

其中 e_r 是 $x_1, \dots, x_n$ 的第 r 个对称多项式.

情形 2 如果 $m = 2$, 且 $k_1 = k$, 则有 $U(n)_\alpha = U(k) \times U(n-k)$, 相应的旗流形 $G_{k,n} = U(n)/U(k) \times U(n-k)$ 是向量空间 $\mathbb{C}^n$ 中 k 维线性子空间的复 Grassmann 流形. 令 $1 + c_1 + \dots + c_k \in H^*(G_{k,n})$ 为 $G_{k,n}$ 上的典型 k 维复向量丛的全 Chern 类, 则由 Chern 类的公理性质可以证明

$$H^*(G_{k,n}) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_k] / \langle h_{n-k+1}, \dots, h_n \rangle,$$

其中 h_r 是 Taylor 展开式 $(1 + c_1 + \dots + c_k)^{-1} = 1 + h_1 + h_2 + \dots$ 中的 r 齐次分量.

根据引理 3.2, 旗流形 M 的上同调环 $H^*(M)$ 只有偶数维元素. 因此, 每个整数 $m \in \mathbb{Z}$ 决定了上同调环 $H^*(M)$ 的唯一一个自同态

$$l_m : H^*(M) \rightarrow H^*(M), \quad l_m(u) := m^i u, \quad u \in H^{2i}(G/P).$$

定义 3.1 环同态 l_m 称为旗流形上同调的 m 阶 Adams 映射.

基于上面的准备工作, 我们来介绍 Hoffmann 关于例中给出的两组旗流形 $F(n)$ 和 $G_{k,n}$ 的具有启发性的结果.

定理 3.1 ^[19] 对于全旗流形 $M = F(n)$, 任一环同态 $h \in \text{End}(H^*(M))$ 可唯一分解为复合同态 $h = l_m \circ \sigma^*$, 其中 $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \in \Sigma_n$.

对于复 Grassmann 流形 $G_{k,n}$ 而言, 它的第二维上同调同构于整数加法群 $\mathbb{Z}$, 生成元是它的 Kaehler 类 $c_1 \in H^2(G_{k,n})$. 从而, 任一环同态 $h \in \text{End}(H^*(G_{k,n}))$ 决定了唯一的一个整数 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $h(c_1) = m \cdot c_1$.

定理 3.2 ^[20] 已知环同态 $h \in \text{End}(H^*(G_{k,n}))$, 如果 $h(c_1) = m \cdot c_1$, $m \neq 0$, 则有 $h = l_m$, 或 $h = l_m \circ \tau^*$, 在后一情形, 我们有 $n = 2k$, 并且 τ 是流形 $G_{k,2k}$ 上的自然对合 (involution).

注 3.1 如果 $h(c_1) = 0$, Hoffmann 猜想到 $h = l_0$. 对于 $n \geq 2k^2 - k - 1$ 以及 $k \leq 3$, 该猜想已在文献 [14, 21] 中得到证实.

上述两个定理揭示, 尽管旗流形的几何和上同调环的结构有复杂的表现形式, 但它们的上同调环自同态的集合 $\text{End}(H^*(M))$ 简洁至极. 这个现象被称为旗流形上同调环的刚性性质. 为了深入探讨刚性性质的更为普遍的表现形式, 我们需要进一步了解旗流形的完整分类.

下面假设 G 是一个半单紧致 Lie 群, $T \subset G$ 是它的一个极大环面, 则指数映射诱导交换图表:

$$\begin{array}{ccc} L(T) & \longrightarrow & L(G) \\ \exp \downarrow & & \exp \downarrow \\ T & \longrightarrow & G, \end{array} \quad (3.1)$$

其中 $L(T)$ 和 $L(G)$ 分别是 T 和 G 在群单位元处的切空间, 分别称为 Lie 群 G 的 Cartan 子代数和 Lie 代数. 我们赋予 Lie 代数 $L(G)$ 一个 Euclid 度量, 使得 G 在 Lie 代数 $L(G)$ 上的共轭作用是等距作用. 一个向量 $\beta \in L(T)$ 称为奇异的, 如果它所决定的单参数子群

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \exp(t\beta)$$

满足 $\dim G_\alpha > \dim T$, 其中 G_α 是 α 的中心化子. 向量空间 $L(T)$ 中的所有奇异向量所构成的集合 $S(G)$ 称为 Lie 群 G 的 Stiefel 图. 由 Lie 群的基础理论可知下面的引理:

引理 3.3 (Stiefel 图的几何性质) 对于一个半单 Lie 群 G , 令

$$n = \dim T, \quad m = \frac{1}{2}(\dim G - n),$$

则有

(i) 在向量空间 $L(T)$ 中恰好存在 $m = \frac{1}{2}(\dim G - n)$ 张通过原点的超平面 $\{L_1, \dots, L_m\}$, 使得 $S(G) = L_1 \cup \dots \cup L_m$;

(ii) 令 l_i 是超平面 L_i 的过原点的法直线, 则指数映射 $\exp: L(T) \rightarrow T$ 将法直线 l_i 映为极大环面 T 的一个圆周子群, $1 \leq i \leq m$;

(iii) 令 $\sigma_i: L(T) \rightarrow L(T)$ 为关于超平面 L_i 的反射变换, 则有 $\sigma_i(S(G)) = S(G)$.

根据引理 3.3 可知, Stiefel 图 $S(G)$ 在 $L(T)$ 中的补空间 $L(T) - S(G)$ 是 $L(T)$ 中以原点为顶点的一些 n -维开凸集的无交并; 每一个开凸集闭包称为 Lie 群 G 的一个 Weyl 房. 取定 Lie 群 G 的一个 Weyl 房 Δ . 将它的从原点出发的棱依次命名为 $k_1, \dots, k_n$. 在每条棱 k_i 上取定一个非零向量 ω_i , 得到一组非零向量 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. 于是, 每个子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, 决定了 Lie 群 G 的一个单参数子群 α_I , 它的定义是

$$\alpha_I: \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \exp\left(t \cdot \sum_{i \in I} \omega_i\right).$$

下述定理给出了 Lie 群 G 的旗流形的分类.

定理 3.3 对于 Lie 群 G 的每个单参数子群 $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$, 存在唯一一个子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, 使得

$$G/G_\alpha \cong G/G_{\alpha_I}.$$

证明 对于所给定的单参数子群 $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$, 存在唯一一个位于 Weyl 房 Δ 的非零向量 $u \in \Delta$, 使得参数子群 α 在群 G 中共轭于单参数子群 $\alpha' = \exp(t \cdot u)$, $t \in \mathbb{R}$. 于是得同构 $G/G_\alpha \cong G/G_{\alpha'}$. 进一步, 由于 $u \in \Delta$, 并且 Δ 中的每个向量可以唯一表示为向量组 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ 的非负系数的线性组合, 因此存在唯一一个子集 $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, 使得

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot \omega_i, \quad \lambda_i > 0.$$

证明由群同构 $G_{\alpha'} \cong G_{\alpha_I}$ 完成. □

定义 3.2 如果 $I = \{1, \dots, n\}$, 则有 $G_{\alpha_I} = T$. 此时称 G/T 为 Lie 群 G 的全旗流形 (complete flag manifold). 如果 $I = \{i\}$, 则 α_I 是 Weyl 房 Δ 的第 i 条棱. 此时称 G/G_{α_I} 为 Lie 群 G 的第 i 个广义 Grassmann 流形.

接着考虑旗流形 G/T 的上同调环自同态的集合 $\text{End}(H^*(G/T))$. 设 Lie 群 G 的 Stiefel 图是 $S(G) = L_1 \cup \dots \cup L_m$. 在每条法直线 l_i 上取一对长度最小的互反向量 $\pm \alpha_i \in l_i$, 满足 $\exp(\pm \alpha_i) = e$, 我们得到 Lie 群 G 的根系 (the root system of G) $\Phi(G) = \{\pm \alpha_i \in L(T), 1 \leq i \leq m\}$, 以及根系的自同构群 $\Delta(G) = \{\sigma \in \text{Aut}(L(T)), \sigma(\Phi(G)) = \Phi(G)\}$, 参见文献 [22]. 根据 Borel 对于上同调环 $H^*(G/T)$ 的表述, 每个元素 $\sigma \in \Delta(G)$ 诱导了一个环同态 $\sigma^* \in \text{End}(H^*(G/T))$. 文献 [23, 24] 得到了定理 3.1 的如下推广.

表 1 Lie 群 G 以及它的中心化子 G_α

G	$SO(2n)$	F_4	F_4	E_6	E_7	E_7	E_7	E_8
α	ω_n	ω_1	ω_4	ω_6	ω_1	ω_7	ω_2	ω_8
G_α	$SU(n) \cdot S^1$	$Sp(3) \cdot S^1$	$Spin(7) \cdot S^1$	$Spin(10) \cdot S^1$	$Spin(12) \cdot S^1$	$E_6 \cdot S^1$	$SU(7) \cdot S^1$	$E_7 \cdot S^1$

定理 3.4 $\text{End}(H^*(G/T)) = l_k \circ \sigma^*, k \in \mathbb{Z}, \sigma \in \Delta(G).$

我们转而考虑由表 1 所规定的广义 Grassmann 流形 G/G_α , 其中第一行是所考虑的半单 Lie 群 G , 第二行是单参数子群 α 在 Weyl 房 Δ 中的位置 (ω_i 表示第 i 条棱), 第三行给出对应的单参数子群 α 的中心化子 G_α 的标准型. 与定理 3.2 所考虑的经典的 Grassmann 流形 $G_{k,n}$ 一样, 广义 Grassmann 流形 $M = G/G_\alpha$ 的第二维上同调同构于整数加法群 $\mathbb{Z}$, 生成元是它的 Kaehler 类 $\kappa \in H^2(M)$. 从而, 任一环同态 $h \in \text{End}(H^*(M))$ 决定了唯一一个整数 $m \in \mathbb{Z}$, 使得 $h(\kappa) = m \cdot \kappa$. 文献 [25, 26] 得到了下述结果:

定理 3.5 设 M 是表 1 中给出的广义 Grassmann 流形之一. 对于一个环同态 $h \in \text{End}(H^*(M))$, 如果 $h(\kappa) = m \cdot \kappa, m \neq 0$, 则环同态 h 就是 Adams 映射 l_m .

注 3.2 与复 Grassmann 流形不同的是, 对于广义 Grassmann 流形而言, 满足 $h(\kappa) = 0$ 的自同态不一定是零同态, 参见文献 [25] 中给出的例子.

总结本节的主要结果定理 3.4 和 3.5, 我们注意到两个一般性事实:

- (1) 对于一个旗流形 M , 它的全体上同调环自同态的集合 $\text{End}(H^*(M))$ 具有简洁的表达公式;
- (2) 全体 Adams 映射 $\{l_m, m \in \mathbb{Z}\}$ 构成了集合 $\text{End}(H^*(M))$ 的基本成元.

因此, 试图通过表示 $r: [M, M] \rightarrow \text{End}(H^*(M))$ 来研究同伦集合 $[M, M]$ 的课题, 相当程度上可归结于如下问题.

Adams 映射的几何实现问题 给定一个旗流形 M , 决定下面的整数集的子集合:

$$A(M) = \{m \in \mathbb{Z}, l_m \in \text{Im}(r)\}.$$

这个问题将是下一节讨论的主题.

4 齐性空间上同调环的 Adams 映射的几何实现问题

由于许多常见的齐性空间都具有同调刚性, 所以, 上一节提出的 Adams 映射的几何实现问题, 在齐性空间的自映射的同伦分类中, 显得尤为突出且基本. 关于这个问题, 下述定理是迄今为止最为一般的结果 (参见文献 [27, 28]).

对于一个半单 Lie 群 G , 由所有反射变换 $\sigma_i: L(T) \rightarrow L(T)$ (见引理 3.3) 所生成 Euclid 空间 $L(T)$ 的自等距群 $\text{Aut}(L(T))$ 的子群 $W(G)$, 称为 G 的 Weyl 群, 它的阶数记为 $|W(G)|$.

定理 4.1 [27, 28] 已知齐性空间 G/P , 其中 G 是一个连通紧致半单 Lie 群, 而 P 是 G 的一个等秩的连通闭子群. 如果 k 是一个与 $|W(G)|$ 互素的整数, 则存在 G/P 的一个自映射

$$f_k: G/P \rightarrow G/P,$$

满足 $H^*(f_k, \mathbb{Q}) = l_k$.

证明 这个定理的证明综合运用了 Etale 同伦理论和局部化完备化的技巧 [5, 29]. 证明的思路是构造下列映射图表:

$$\begin{array}{ccccc} G/P & \xrightarrow{j} & BP & \longrightarrow & BG \\ & & \downarrow \psi^p & & \downarrow \varphi^p \\ G/P & \xrightarrow{j} & BP & \longrightarrow & BG, \end{array} \quad (4.1)$$

其中 ψ^p 和 φ^p 在第 $2i$ 个有理上同调群上的作用都是乘以方幂 k^i . 根据局部化完备化同伦理论, (4.1) 中的第二个交换图当限制在 BP 的任何有限 CW 子复形上是可交换的, 从而诱导出 G/P 的自映射, 详见文献 [28]. $\square$

我们转而考虑哪些 Adams 映射不能由 G/P 的自映射诱导的问题. 迄今这个方面的结果是十分零星的. 我们先介绍关于复 Grassmann 流形 $G_{k,n}$ 的一些结果:

定理 4.2 [28] 给定一个正整数 n , 令 k 为一个与阶乘 $n!$ (即 $U(n)$ 的 Weyl 群的阶数) 不互素的非零整数, 那么总存在另一个正整数 r (仅依赖于 k 和 n), 使得当 $m > r$ 时, Adams 映射 l_k 不能由 $G_{n,m}$ 的自映射所诱导.

注 4.1 定理 4.2 的证明要运用 Ishiguro [9] 关于 Lie 群分类空间的自映射的一个定理. 一般情形下, 这个定理中的正整数 r 是无法估计的, 因为 Ishiguro 的定理的证明没有告诉我们 $BU(n)$ 的自映射的阻碍具体发生在哪个维数上.

在 $n = 2$ 时, 运用定理 2.3, 我们可以给出更为具体的结果:

定理 4.3 [28] 给定正整数 m 和一个整数 p , 满足 p^2 不属于 FG_n 且 $m \geq 2n$, 那么 Adams 映射 l_p 不能由 $G_{2,m}$ 的自映射诱导.

注 4.2 因为 FG_∞ 是由零和奇平方数组成的, 在 $G_{2,m}$ 的情形, 这个结果比定理 4.3 更强.

例 4.1 FG_2 是由满足同余式

$$m(m-1) \equiv 0 \pmod{24} \quad (4.2)$$

的整数构成的, 所以当整数 p 为 $4n+2$ 型时, Adams 映射 l_p 不能由 $G_{2,m}$ 的自映射所诱导, 其中 $m \geq 4$.

运用文献 [30, 命题 5] (Ishiguro 的定理的一个特殊情形) 的证明方法, 本文第二位作者证明了下述结果.

定理 4.4 令 n' 为正整数, $n = 4n' + 2$, k 是一个偶数, 则当 $m > nk$ 时, Adams 映射 l_k 不能由 $G_{n,m}$ 的自映射所诱导.

这个定理的证明与文献 [30, 命题 5] 类似, 需要指出的是, 文献 [30] 中的公式

$$RO(G) \cap RH(G) = (1+t)R(G)$$

应当替换为

$$KO(G_{n,m}) \cap KH(G_{n,m}) = (1+t)K(G_{n,m}),$$

其中 $RO(G)$ 、 $R(G)$ 和 $RH(G)$ 分别是 Lie 群 G 的实表示环、复表示环和四元数表示群, 而 KO 、 K 和 KH 分别是实、复和四元数的 K 理论.

注 4.3 对于四元数 Grassmann 流形, 我们也有类似于定理 4.2–4.4 的结果. 有意思的是, 定理 4.3 和 4.4 的证明都需要用到复 K 理论和四元数 K 理论. 更进一步的结果可能需要用到其他更为精细的上同调理论.

令 T 为连通紧 Lie 群 G 的极大子环群. 关于齐性空间 G/T , 它们的上同调环的自同态的实现问题更加困难, 目前作者知道的唯一结果是 $U(3)/T(3)$ 的所有 Adams 映射 l_k 均可以由 $U(3)/T(3)$ 的自映射诱导, 这是文献 [31, 定理 2] 的一个简单推论. 对于其他 G/T 型齐性空间和 $\mathbb{R}^{2n}$ 上复结构的 Grassmann 流形等常见的齐性空间, 迄今为止, 尚不知道是否存在一个不能由自映射诱导的 Adams 映射.

参考文献

- 1 Whitehead G W. Elements of Homotopy Theory. Graduate Texts in Mathematics. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1978
- 2 McGibbon C. Self-maps of projective spaces. Trans Amer Math Soc, 1982, 271: 325–346
- 3 Feder S, Gitler S. Mappings of quaternionic projective spaces. Bol Soc Mat Mexicana (3), 1973, 18: 33–37
- 4 Granja G. Self maps of $\mathbb{H}P^n$ via the unstable Adams spectral sequence. Proc Amer Math Soc, 2015, 143: 4547–4559
- 5 Sullivan D. Geometric Topology I: Localization, Periodicity and Galois Symmetry. Cambridge: MIT Press, 1970
- 6 Katōgi K. On self maps of $\mathbb{H}P^n$ for $n = 4$ and 5 . Math J Okayama Univ, 2010, 52: 143–146
- 7 Marcum H, Randall D. A note on self-mappings of quaternionic projective spaces. An Acad Brasil Ciênc, 1976, 48: 7–9
- 8 Mislin G. The homotopy classification of self-maps of infinite quaternionic projective space. Q J Math, 1987, 38: 245–257
- 9 Ishiguro K. Unstable Adams operations on classifying spaces. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1987, 102: 71–75
- 10 Jackowski S, McClure J, Oliver B. Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions. Ann of Math (2), 1992, 135: 183–226
- 11 Wilkerson C W. Self-maps of classifying spaces. In: Localization in Group Theory and Homotopy Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 418. New York: Springer-Verlag, 1974, 150–157
- 12 Gonçalves D L, Spreafico M. Quaternionic line bundles over quaternionic projective spaces. Math J Okayama Univ, 2006, 48: 87–101
- 13 Lin X Z. Self-maps of p -local infinite projective spaces. Sci China Math, 2012, 55: 739–744
- 14 Glover H, Homer W. Endomorphisms of the cohomology rings of finite Grassmann manifolds. In: Geometric Applications of Homotopy Theory. Lecture Notes in Mathematics, vol. 657. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1978, 170–193
- 15 Bernstein I N, Gel'fand I M, Gel'fand S I. Schubert cells and cohomology of the spaces G/P . Russian Math Surveys, 1973, 28: 1–26
- 16 Bott R, Samelson H. The cohomology ring of G/t . Proc Natl Acad Sci USA, 1955, 41: 490–493
- 17 Duan H, Zhao X. The Chow rings of generalized Grassmannians. Found Comput Math, 2010, 10: 245–274
- 18 Duan H, Zhao X. Schubert presentation of the cohomology ring of flag manifolds G/T . LMS J Comput Math, 2015, 18: 489–506
- 19 Hoffman M. On fixed point free maps of the complex flag. Indiana Univ Math J, 1984, 33: 249–255
- 20 Hoffman M. Endomorphisms of the cohomology of complex Grassmannians. Trans Amer Math Soc, 1984, 281: 745–760
- 21 O'Neill L S. The fixed point property for Grassmann's manifold. PhD Thesis. Columbus: Ohio State University, 1974
- 22 Papadima S. Rigidity properties of compact Lie groups modulo maximal tori. Math Ann, 1986, 275: 637–652
- 23 Duan H B, Zhao X. The classification of cohomology endomorphisms of certain flag manifolds. Pacific J Math, 2000, 192: 93–102
- 24 赵旭安. 旗流形的上同调环的自同态. 数学学报, 2001, 44: 1099–1106
- 25 Duan H. Self-maps of the Grassmannian of complex structures. Compos Math, 2002, 132: 159–175
- 26 Li F, Duan H. Homology rigidity of Grassmannians. Acta Math Sci Ser B Engl Ed, 2009, 29: 697–704
- 27 Friedlander E M. Maps between localized homogeneous spaces. Topology, 1977, 16: 205–216
- 28 Lin X. Geometric realization of Adams maps. Acta Math Sin Engl Ser, 2011, 27: 863–870
- 29 Artin M, Mazur B. Etale Homotopy. Lecture Notes in Mathematics, vol. 100. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1969
- 30 Hubbuck J R. Homotopy-homomorphisms of Lie groups. In: New Developments in Topology. London Mathematical

Society Lecture Note Series, vol. 11. Cambridge: Cambridge University Press, 1974, 33–41

31 Saneblidze S. On the homotopy classification of maps. J Homotopy Relat Struct, 2009, 4: 347–357

Homotopic classification of self-maps of homogeneous spaces

Haibao Duan & Xianzu Lin

Abstract The homogeneous spaces of Lie groups, including all the flag manifolds, constitute an important family of manifolds in geometry and topology. The homotopy classification on the continuous maps between these manifolds is a classical and fundamental problem of algebraic topology. In this paper we survey some classical and recent results devoted to the subject. Two new results by the second author are also announced.

Keywords ring homomorphism, self-map of topological space, homogeneous space, flag manifold

MSC(2010) 55S37

doi: 10.1360/N012019-00012