中国科学: 数学　2023 年　第 53 卷　第 7 期: 915～930
SCIENTIA SINICA　Mathematica
综 述

Lévy 型过程的耦合及应用

王健

福建师范大学数学与统计学院, 福州 350117
E-mail: jianwang@fjnu.edu.cn

收稿日期: 2023-02-10;　接受日期: 2023-04-16;　网络出版日期: 2023-05-29
国家自然科学基金 (批准号: 11831014, 12071076 和 12225104) 资助项目

摘要　本文围绕 Lévy 型过程的耦合这一主题, 综述本文作者在相关问题上开展的阶段性工作. 本文分为三部分: (1) Lévy 过程的成功耦合; (2) Lévy 过程驱动的随机微分方程的耦合构造; (3) 耦合方法在 Lévy 随机系统中的应用. 在每部分罗列相关主要研究结果, 并着重陈述耦合方法的传承与创新.

关键词　耦合　Lévy 型过程　反射耦合　修正基本耦合　指数遍历性

MSC (2020) 主题分类　60G51, 60J25, 60H10, 60G53

1　引言

耦合是一种很有用的概率方法, 在随机过程与随机分析领域有重要理论意义与应用价值 (参见文献 [30, 46]). 本文作者接触耦合的概念始于 2005 年在北京师范大学求学. 导师陈木法院士给本文作者的博士学位论文研究方向是 Lévy 型过程的遍历性. 当时陈老师敏锐地察觉到 Lévy 过程在随机分析与应用 (特别是金融数学) 中的重要性, 明确指出这个选题的重要意义, 并鼓励本文作者去发展 Lévy 型过程的耦合方法和泛函不等式. 之后, 在讨论班上, 多次聆听陈老师与王凤雨教授的最新研究成果报告, 了解到耦合方法能够有效用于讨论 Markov 过程的遍历性和 Markov 半群的正则性, 同时它在 Markov 链 Monte Carlo 算法、交互作用粒子系统和最优传输等方面有着很好的应用, 具体可参见文献 [10, 11, 50]. 特别让本文作者惊叹的是, 陈老师将耦合等概率方法引入到第一特征值估计研究, 并找到了下界估计的统一变分公式. 攻读博士学位期间, 本文作者经常听到陈老师和王老师提到齐步走耦合 (synchronous coupling 或 march coupling) 和反射耦合 (coupling by reflection) 的方法. 鉴于当时本文作者对于 Lévy 型过程的学习和相关研究刚刚起步, 因此未能深刻洞悉和参透 Lévy 型过程耦合的本质. 承蒙两位恩师的多次点拨与鼓励, 直到 2009 年初, 本文作者才开始专注于该课题的研究. 诚然, 本课题的研究源于文献 [11] 中第 26 页的公开问题 2.19: “What should be the representation of Markovian coupling operators for Lévy processes?”

接下来首先介绍耦合的相关概念, 读者可参见文献 [11] 了解更具体的细节.

英文引用格式: Wang J. Couplings of Lévy-type processes and applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 915–930, doi: 10.1360/SSM-2023-0029

定义 1.1 设 μ^k $(k=1,2)$ 为 $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ 上的概率测度, 若对于任意 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 都有

$$\widetilde{\mu}(A\times\mathbb{R}^d)=\mu^1(A),\quad \widetilde{\mu}(\mathbb{R}^d\times A)=\mu^2(A),$$

则称 $(\mathbb{R}^{2d},\mathscr{B}(\mathbb{R}^{2d}))$ 上的概率测度 $\widetilde{\mu}$ 为 μ^1 和 μ^2 的耦合, 即给定 $\mathbb{R}^d$ 上随机变量 X^1 和 X^2, 耦合等价于构造 $\mathbb{R}^{2d}$ 上随机变量 $\widetilde{X}=(\widetilde{X}^1,\widetilde{X}^2)$ 使得对于任意 $k=1,2$, $\widetilde{X}^k$ 与给定随机变量 X^k 具有相同的分布. 显然, 乘积测度 $\widetilde{\mu}=\mu^1\times\mu^2$ 是 μ^1 和 μ^2 的一个耦合. 称其为独立耦合, 这说明关于 μ^1 和 μ^2 的耦合总是存在的.

同样地, 可以利用有限维分布定义两个随机过程的耦合. 当然, 给定两个边缘 Markov 过程, 所构造的耦合过程未必具有 Markov 性. 例如, Griffeath [19] 构造的离散时间 Markov 链的最大耦合 (maximal coupling) 就不具有 Markov 性. 为充分利用 Markov 过程理论与技巧, 本文仅局限于考虑 Markov 耦合.

定义 1.2 设 $X^k=(X_t^k)_{t\geqslant0}$ $(k=1,2)$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上 Markov 过程, 其对应的半群为 $(P_t^k)_{t\geqslant0}$. 若 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的 Markov 过程 $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t)_{t\geqslant0}$ 对应的 Markov 半群 $(\widetilde{P}_t)_{t\geqslant0}$ 满足

$$\widetilde{P}_t(f\otimes\mathbb{1})(x,y)=P_t^1f(x),\quad \widetilde{P}_t(\mathbb{1}\otimes f)(x,y)=P_t^2f(y),\quad x,y\in\mathbb{R}^d,\quad f\in B_b(\mathbb{R}^d),$$

则称 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的 Markov 过程 $\widetilde{X}=(\widetilde{X}_t)_{t\geqslant0}$ 为 X^1 和 X^2 的 Markov 耦合, 其中, $(f\otimes g)(x,y)=f(x)g(y)$, $B_b(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上有界可测函数全体.

上述定义用半群来描述, 很自然地可引出下面由 Markov 过程生成元算子刻画的定义. 在下面定义中, $\mathscr{D}(L)$ 代表算子 L 的 (广义) 定义域, 我们不要求 $(L,\mathscr{D}(L))$ 是闭算子.

定义 1.3 设 $L_k:\mathscr{D}(L_k)\to B(\mathbb{R})$, $C_b^2(\mathbb{R}^d)\subset\mathscr{D}(L_k)\subset B(\mathbb{R}^d)$ $(k=1,2)$ 为两个 Markov 过程的生成元算子, 其中 $B(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上可测函数全体. 类似地, 可定义 $B(\mathbb{R}^d)$ 和 $B(\mathbb{R}^{2d})$. 若 $\mathbb{1}\otimes\mathscr{D}(L_2)\cup\mathscr{D}(L_1)\otimes\mathbb{1}\subset\mathscr{D}(\widetilde{L})$ 且

$$\widetilde{L}(f\otimes\mathbb{1})(x,y)=L_1f(x),\quad \widetilde{L}(\mathbb{1}\otimes f)(x,y)=L_2f(y),\quad x,y\in\mathbb{R}^d,\quad f\in C_b^2(\mathbb{R}^d),$$

则称线性算子 $\widetilde{L}:\mathscr{D}(\widetilde{L})\to B(\mathbb{R})$ $(\mathscr{D}(\widetilde{L})\subset B(\mathbb{R}^{2d}))$ 为 L_1 和 L_2 的耦合算子.

容易证明, 若 $\mathbb{R}^{2d}$ 上 Markov 过程 $\widetilde{X}$ 为 X^1 和 X^2 的 Markov 耦合, 则 $\widetilde{X}$ 的生成元算子 $\widetilde{L}$ 为 X^1 和 X^2 生成元算子 L_1 和 L_2 的耦合算子. 反之, 若 $\widetilde{L}$ 为 Markov 算子 L_1 和 L_2 的耦合算子, 要想利用 Markov 过程理论与方法, 需要考虑 $\widetilde{L}$ 如何对应于一个 Markov 过程 (简称为 Markov 耦合过程). 这将涉及鞅问题解存在性或 Markov 耦合过程的构造问题. 由于耦合算子相比于耦合过程更加容易把握, 所以本文将聚焦于这个概念. 本文仅考虑 $X^1=X^2$, 即 $(P_t^1)_{t\geqslant0}=(P_t^2)_{t\geqslant0}$ 和 $L_1=L_2$ 的情形. 不同 Markov 过程耦合的最新应用可参见文献 [18].

本文的研究对象是 Lévy 型过程. 众所周知, Lévy 过程是 Markov 过程和半鞅的典型代表, 具有独立平稳增量的性质. $\mathbb{R}^d$ 上 Lévy 过程的无穷小生成元可以写成

$$\begin{aligned}L_0f(x)=&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\\&+\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+z)-f(x)-\langle\nabla f(x),z\rangle\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant1\}})\,\nu(dz),\quad f\in C_b^2(\mathbb{R}^d).\end{aligned}$$

记 $A=(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, $b=(b_i)_{1\leqslant i\leqslant d}$, 则 (A,b,ν) 称为 Lévy 三元组, 对应到算子 L_0 的三项, A、b 和 ν 分别代表 Lévy 过程的 Brown 运动、漂移和 Lévy 跳. 当 $A=0$ 且 $b=0$ 时, 称为纯跳的 Lévy 过程.

Lévy 型过程是每一点运动轨迹如同 Lévy 过程的一大类 Markov 过程, 它与 Lévy 过程的关系正如扩散过程与 Brown 运动的关系, 其无穷小生成元算子可以表示为

$$\begin{aligned} Lf(x) = &\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) - f(x) - \langle \nabla f(x), z\rangle \mathbb{1}_{\{|z|\leqslant 1\}})\,\nu(x,dz), \quad f\in C_b^2(\mathbb{R}^d), \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中 $\nu(x,dz)$ 是 Lévy 型核. 特别地, 当 $\nu(x,dz)\equiv 0$ 时, Lévy 型过程就是我们熟知的扩散过程. 关于 Lévy 型过程和 Lévy 过程更多的性质可分别参见文献 [9,40].

扩散过程的耦合及其应用有着丰富的结果. 理论方面包含两个奠基性的工作: (i) Lindvall 和 Rogers [31] 关于扩散过程反射耦合的构造; (ii) Chen 和 Li [12] 关于扩散过程的耦合算子及其最优问题的研究. 应用方面的结果很多, 包括上面提到的 Chen 和 Wang [13] 利用耦合方法深入研究 Riemann 流形上 Laplace 算子的第一特征值估计, 以及 Priola 和 Wang [39] 利用反射耦合和齐步走耦合相结合的方法建立扩散半群的梯度估计等. 与此同时, 扩散过程的耦合方法逐渐成为一种基本而又重要的数学工具, 在其他相关领域内也有着极其广泛的应用. 耦合在最优传输问题的研究可详见法国数学家 Villani [47,48] 的相关专著. 因此, 研究 Lévy 型过程耦合性质主要的挑战在于 (1.1) 中扩散系数 $a_{ij}(x)$ 退化 (甚至 $a_{ij}(x)\equiv 0$) 的情形, 因为此时关于扩散过程的结果与方法无法使用. 为方便叙述, 本文仅考虑 (1.1) 中扩散系数 $a_{ij}(x)\equiv 0$ 的情形, 并简称对应的过程为纯跳 Lévy 型过程. 据作者所知, 上面提到的扩散过程的耦合结果对纯跳 Lévy 型过程而言在 2009 年之前几乎没有.

接下来介绍近些年在纯跳 Lévy 型过程耦合方面取得的进展, 内容按照每个时期研究的阶段性成果展开, 包括 3 个方面: (1) Lévy 过程的成功耦合; (2) Lévy 过程驱动的随机微分方程的耦合构造; (3) 耦合方法在 Lévy 随机系统中的应用.

2 Lévy 过程的成功耦合

首先给出 Markov 过程成功耦合的定义.

定义 2.1 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上 Markov 过程, $(X_t', X_t'')_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{R}^{2d}$ 上关于 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的 Markov 耦合过程. 称

$$T := \inf\{t\geqslant 0: X_t' = X_t''\}$$

为耦合过程 $(X_t', X_t'')_{t\geqslant 0}$ 的耦合时间. 若 T 几乎处处有限, 则称该耦合成功. 进一步地, 若对于 $\mathbb{R}^d$ 上的任意两个概率分布 μ_1 和 μ_2, 存在成功耦合过程 $(X_t', X_t'')_{t\geqslant 0}$ 使得边缘过程 $(X_t')_{t\geqslant 0}$ 和 $(X_t'')_{t\geqslant 0}$ 对应的初分布分别为 μ_1 和 μ_2, 则称 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 具有 (成功) 耦合性质.

根据文献 [30,46], 可知 Markov 过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 具有耦合性质等价于

$$\lim_{t\to\infty}\|\mu_1 P_t - \mu_2 P_t\|_{\rm var} = 0, \quad \forall\, \mu_1,\mu_2\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^d),$$

这里, $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 上概率测度全体, $\mu P_t(A) := \int_{\mathbb{R}^d} P_t(x,A)\,\mu(dx)$, 其中 $P_t(x,\cdot)$ 为 Markov 过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的转移概率核, $\|\cdot\|_{\rm var}$ 代表全变差范数.

定理 2.1 (参见文献 [42, 定理 1.1]) 设 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上纯跳 Lévy 过程, 其对应的 Lévy 测度

为 ν. 记 $P_t(x,\cdot)$ 为 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 的转移核. 对于任意 $\varepsilon>0$ 和 $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 定义

$$\nu_\varepsilon(B)=\begin{cases}\nu(B), & \nu(\mathbb{R}^d)<\infty,\\ \nu(\{z\in B:|z|\geqslant\varepsilon\}), & \nu(\mathbb{R}^d)=\infty.\end{cases}$$

如果存在常数 $\varepsilon,\delta>0$, 使得

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^d:|x|\leqslant\delta}[\nu_\varepsilon\wedge(\delta_x*\nu_\varepsilon)](\mathbb{R}^d)>0, \tag{2.1}$$

则存在常数 $C:=C(\varepsilon,\delta,\nu)>0$ 使得对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 和 $t\geqslant 0$, 都有

$$\|P_t(x,\cdot)-P_t(y,\cdot)\|_{\mathrm{var}}\leqslant\frac{C(1+|x-y|)}{\sqrt{t}}\wedge 2. \tag{2.2}$$

特别地, Lévy 过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 具有成功耦合性质.

注 2.1 (1) 粗略地讲, 由 (2.1) 可知, 纯跳 Lévy 过程如果有充分多的跳就可能具有成功耦合性质, 它至少需要对充分小 $\varepsilon,\delta>0$ 以及任意 $x\in B(0,\delta)$, 都有 $(x+\mathrm{supp}(\nu_\varepsilon))\cap\mathrm{supp}(\nu_\varepsilon)\neq\emptyset$. 因此离散支撑 Lévy 测度生成的 Lévy 过程可能不具有耦合性质. 例如, 考虑一维复合 Poisson 过程, 若其对应的 Lévy 测度支撑在 $\mathbb{Z}$ 上, 则对于任意 $\delta\in(0,1)$, $x\in B(0,\delta)$, 都有 $[\nu\wedge(\delta_x*\nu)](\mathbb{Z})=0$. 进一步地, 任意满足 $f(\cdot+u)=f(\cdot)$ (其中 $u\in\mathbb{Z}$) 的函数 f 是该复合 Poisson 过程的调和函数. 从而根据文献 [16] 可知该过程不具有耦合性质. 这也说明条件 (2.1) 在某种情形下是必要的.

(2) 由 (2.2) 可知, 对局部一致的 $x,y\in\mathbb{R}^d$, 有

$$\|P_t(x,\cdot)-P_t(y,\cdot)\|_{\mathrm{var}}\leqslant O(t^{-1/2}),\quad t\to\infty,$$

这里 $t^{-1/2}$ 对具有成功耦合性质的复合 Poisson 过程而言是最优的, 具体可参见文献 [51, 注 3.1].

定理 2.1 的证明 首先, 根据 Lévy 过程独立平稳增量的性质, 可将 $X:=(X_t)_{t\geqslant 0}$ 分解成两个独立 Lévy 过程 $X':=(X'_t)_{t\geqslant 0}$ 和 $X'':=(X''_t)_{t\geqslant 0}$. 分别记 $P_t(x,\cdot)$、$P'_t(x,\cdot)$ 和 $P''_t(x,\cdot)$ 为 Lévy 过程 X、X' 和 X'' 的转移核, P_t、P'_t 和 P''_t 分别为 X、X' 和 X'' 的转移半群. 从而对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 和 $t>0$, 都有

$$\begin{aligned}\|P_t(x,\cdot)-P_t(y,\cdot)\|_{\mathrm{var}}&=\sup_{\|f\|_\infty\leqslant 1}|P_tf(x)-P_tf(y)|=\sup_{\|f\|_\infty\leqslant 1}|P'_tP''_tf(x)-P'_tP''_tf(y)|\\&\leqslant\sup_{\|f\|_\infty\leqslant 1}|P'_tf(x)-P'_tf(y)|=\|P'_t(x,\cdot)-P'_t(y,\cdot)\|_{\mathrm{var}}.\end{aligned}$$

从而, 若 X' 具有成功耦合性质, 则原过程 X 也具有成功耦合性质.

接下来, 取 $X=X'+X''$, 其中 Lévy 过程 X' 对应的 Lévy 测度为 ν_ε. 注意到 ν_ε 是 $\mathbb{R}^d$ 上有限测度, 因此直观上 X' 仅具有大跳. 为此, 不妨设 X' 为复合 Poisson 过程, 即对于任意 $t>0$, 有 $X'_t=S_{N_t}$, 其中, $(N_t)_{t\geqslant 0}$ 为强度为 $\nu_\varepsilon(\mathbb{R}^d)$ 的 Poisson 过程, $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$ 为随机游动且 $X_k\sim\nu_\varepsilon/\nu_\varepsilon(\mathbb{R}^d)$, 并且 $(N_t)_{t\geqslant 0}$ 与 $(S_n)_{n\geqslant 1}$ 独立.

最后, 结合上述分析, 若随机游动 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 具有成功耦合性质, 则原过程 X 也具有成功耦合性质. 进一步地, 借助 Mineka 和 Lindvall-Rogers 关于随机游动耦合的构造 (参见文献 [32]), 利用条件 (2.1) 保证了 $(S_n)_{n\geqslant 0}$ 具有成功耦合. 从而定理 2.1 得证. $\square$

定理 2.1 改进了文献 [51, 定理 3.1], 后者的证明方法与上述思路完全不同, 是基于 Poisson 空间的条件 Girsanov 变换, 文献 [51] 假设 Lévy 测度具有非平凡绝对连续部分. 事实上, 根据文献 [43, 命题 1.5] 可知, 若 $\nu(dz) \geqslant \rho_0(z)\,dz$, 且存在 $z_0 \in \mathbb{R}^d$ 和 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\int_{B(z_0,\varepsilon)} \frac{dz}{\rho_0(z)} < \infty,$$

则 (2.1) 成立. 因此, 定理 2.1 适用性很广.

根据定理 2.1 的证明方法以及 Lindvall 和 Rogers [32] 关于随机游动的 0-1 律, 可以给出 Lévy 过程具有耦合性质的充要条件.

推论 2.1 (参见文献 [42, 定理 4.1]) Lévy 过程具有耦合性质当且仅当存在 $t_0 \geqslant 0$ 使得当 $t > t_0$ 时, 其转移概率 $P_t(x,\cdot)$ 具有绝对连续部分. 特别地, 若 Lévy 过程具有强 Feller 性质, 则它必定具有成功耦合性质.

进一步地, 利用独立时间变换的技巧, 给出从属 Brown 运动成功耦合的构造, 并得到该耦合过程的耦合时间的精细估计 [8]; 同时, 也利用 Lévy 过程的特征指数的渐近性质给出一般 Lévy 过程耦合性质的定量估计 [41].

文献 [8, 41, 42] 指出, 纯跳 Lévy 过程耦合性质的研究与 Brown 运动相比复杂很多, 其证明方法多次用到 Lévy 过程的特征, 如上述半群独立分解的思想. 由于 Ornstein-Uhlenbeck 过程

$$dX_t = AX_t\,dt + dZ_t, \quad \text{其中 } A \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$$

生成半群可以通过驱动噪声 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 显式表示, 所以可以利用上述研究方法考虑 Lévy 驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的耦合性质 (参见文献 [43, 53]). 然而, 在研究非线性漂移情形下 Lévy 过程驱动的随机微分方程耦合性质时, 上述方法将失效. 近些年, 关于带跳随机微分方程解的存在唯一性问题有许多漂亮的结果, 可以参见张希承教授的工作. 因为涉及文献比较多, 这里不一一举例. 有了这些工作的铺垫, 受到陈老师与王老师工作的启发, 本文借助耦合算子的概念研究 Lévy 过程驱动的随机微分方程的耦合性质, 这样自然面临下面一系列问题: (i) Lévy 过程驱动的随机微分方程耦合构造的一般形式是什么? (ii) Lévy 过程驱动的随机微分方程是否有类似 Brown 运动情形的反射耦合? (iii) 可否通过耦合算子给出上述定理 2.1 中 Lévy 过程耦合性质的证明? 这些问题正是下一节研究内容的驱动力, 本文逐一回答.

3 Lévy 过程驱动的随机微分方程的耦合构造

考虑如下随机微分方程 (stochastic differential equation, SDE):

$$dX_t = b(X_t)dt + dZ_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.1}$$

其中, $Z := (Z_t)_{t\geqslant 0}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上纯跳 Lévy 过程, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为可测函数. 总假设方程 (3.1) 存在唯一强解. 例如, 当 b 满足单边 Lipschitz 条件 (参见文献 [23]), 或 b 是 Hölder 连续且 Z 具有某种正则性时 (参见文献 [14]), 上述结论成立. 易知, 强解 $X := (X_t)_{t\geqslant 0}$ 对应的无穷小生成元为

$$Lf(x) = \langle \nabla f(x), b(x)\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (f(x+z) - f(x) - \langle \nabla f(x), z\rangle \mathbb{1}_{\{|z|\leqslant 1\}})\,\nu(dz), \quad f \in C_b^2(\mathbb{R}^d), \tag{3.2}$$

其中 ν 为 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 对应的 Lévy 测度.

正如上面提到的, 为考虑方程 (3.1) 的 Markov 耦合, 将充分利用耦合算子的概念. 为此, 对于任意 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^{2d})$, 定义

$$\begin{aligned}\widetilde{L}f(x,y)=&\langle\nabla_x f(x,y),b(x)\rangle+\langle\nabla_y f(x,y),b(y)\rangle\\&+\int_{\mathbb{R}^{2d}}(f(x+u,y+v)-f(x,y)-\langle\nabla_x f(x,y),u\rangle\mathbb{1}_{\{|u|\leqslant 1\}}\\&-\langle\nabla_y f(x,y),v\rangle\mathbb{1}_{\{|v|\leqslant 1\}})\,\widetilde{\nu}(x,y,du,dv),\end{aligned}\tag{3.3}$$

这里 $\nabla_x f(x,y)$ 和 $\nabla_y f(x,y)$ 分别表示 $f(x,y)$ 关于 x 和 y 的梯度, $\widetilde{\nu}(x,y,du,dv)$ 满足对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^d$, 都有

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}(1\wedge(|u|^2+|v|^2))\widetilde{\nu}(x,y,du,dv)<\infty.$$

引理 3.1 (参见文献 [26, 引理 2.1]) 由 (3.3) 给定的算子 $\widetilde{L}$ 为无穷小生成元算子 L 的耦合算子, 当且仅当对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^d$ 和 $A,B\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$, 都有

$$\widetilde{\nu}(x,y,A\times\mathbb{R}^d)=\nu(A),\quad \widetilde{\nu}(x,y,\mathbb{R}^d\times B)=\nu(B).$$

引理 3.1 指出, (3.3) 定义的算子 $\widetilde{L}$ 是生成元算子 L 的耦合算子, 本质上要求测度核 $\widetilde{\nu}$ 满足类似于概率测度耦合的边缘性质. 当然, 若仅利用引理 3.1 的刻画, 则其适用性有很大局限性. 为此提出分解的思想给出测度核 $\widetilde{\nu}$ 的具体构造. 对于任意 $1\leqslant i<n+1\leqslant\infty$, 设 ν_i 为 $\mathbb{R}^d$ 上非负测度且满足 $\sum_{i=1}^n\nu_i\leqslant\nu$, $\Psi_i:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 为连续且同胚映射 (即 Ψ_i 可逆且满足 $\Psi_i(\mathbb{R}^d)=\mathbb{R}^d$). 对于任意 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^{2d})$, 定义

$$\begin{aligned}\widetilde{L}f(x,y)=&\langle\nabla_x f(x,y),b(x)\rangle+\langle\nabla_y f(x,y),b(y)\rangle\\&+\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+z,y+\Psi_i(z))-f(x,y)-\langle\nabla_x f(x,y),z\rangle\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant 1\}}\\&-\langle\nabla_y f(x,y),\Psi_i(z)\rangle\mathbb{1}_{\{|\Psi_i(z)|\leqslant 1\}})\,\mu_{\nu_i,\Psi_i}(dz)\\&+\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+z,y+z)-f(x,y)-\langle\nabla_x f(x,y),z\rangle\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant 1\}}\\&-\langle\nabla_y f(x,y),z\rangle\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant 1\}})\left(\nu-\sum_{i=1}^n\mu_{\nu_i,\Psi_i}\right)(dz),\end{aligned}\tag{3.4}$$

其中 $\mu_{\nu_i,\Psi_i}(dz)=[\nu_i\wedge(\nu_i\circ\Psi_i)](dz)$.

命题 3.1 (参见文献 [26, 推论 2.2]) 假设

$$\sum_{i=1}^n\mu_{\nu_i,\Psi_i}=\sum_{i=1}^n\mu_{\nu_i,\Psi_i^{-1}},\tag{3.5}$$

则由 (3.4) 定义的算子 $\widetilde{L}$ 为无穷小生成元 L 的耦合算子.

为方便进一步讨论, 记 (3.4) 所定义的算子 $\widetilde{L}$ 对应 (非局部部分) 的跳系统为

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(x+z,y+\Psi_i(z)), & \mu_{\nu_i,\Psi_i}(dz),\quad 1\leqslant i<n+1,\\(x+z,y+z), & \left(\nu-\sum_{i=1}^n\mu_{\nu_i,\Psi_i}\right)(dz).\end{cases}\tag{3.6}$$

接下来说明选择适当的测度 ν_i 和函数 Ψ_i, 由 (3.6) 定义的耦合算子 $\widetilde{L}$ 可以包含现有文献中关于带跳 SDE (3.1) 常用的 3 种耦合: 齐步走耦合、反射耦合和修正基本耦合. 同时给出这 3 种耦合对应的耦合过程的随机微分方程表示形式.

例 3.1 (齐步走耦合)　设 $\Psi_i(z) = z$, 显然 (3.5) 成立. 这时, 对应耦合过程可表示为

$$\begin{cases} dX_t' = b(X_t')dt + dZ_t, \\ dX_t'' = b(X_t'')dt + dZ_t, \end{cases}$$

即齐步走耦合意味着两个边缘过程 $(X_t')_{t\geqslant 0}$ 和 $(X_t'')_{t\geqslant 0}$ 驱动的噪声是同一个 Lévy 过程 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$. 齐步走耦合常用于考虑方程 (3.1) 强解的唯一性或 Feller 性质.

例 3.2 (反射耦合 [55])　假设 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是旋转对称的纯跳 Lévy 过程, 其对应的 Lévy 测度 ν 可写成 $\nu(dz) = \rho(|z|)dz$. 对于任意 $x, y, z \in \mathbb{R}^d$, 定义

$$R_{x,y}(z) = \begin{cases} z - \dfrac{2\langle x-y, z\rangle}{|x-y|^2}(x-y), & x \neq y, \\ z, & x = y, \end{cases} \tag{3.7}$$

$R_{x,y}(z)$ 表示点 z 关于与向量 $x-y$ 垂直的超平面的反射. 特别地, 当 $d=1$ 和 $x \neq y$ 时, $R_{x,y}(z) = -z$. 在 (3.6) 中, 令 $n=1$, $\Psi_1(z) = R_{x,y}(z)$ 且 $\nu_1(dz) = \mathbb{1}_{\{|z|<\eta|x-y|\}}\nu(dz)$, 其中 $\eta \in (0,\infty]$. 从而 (3.6) 可写成

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x+z, y+R_{x,y}(z)), & \mathbb{1}_{\{|z|\leqslant\eta|x-y|\}}\,\nu(dz), \\ (x+z, y+z), & \mathbb{1}_{\{|z|>\eta|x-y|\}}\,\nu(dz). \end{cases} \tag{3.8}$$

因为 ν 是旋转对称的, $R_{x,y}(z) = R_{x,y}^{-1}(z)$ 且 $|R_{x,y}(z)| = |z|$, 所以 ν_1 关于变换 $R_{x,y}(z) \rightsquigarrow z$ 是不变的. 从而 $\nu_1 \circ \Psi_1 = \nu_1 \circ \Psi_1^{-1}$, (3.5) 成立. 根据命题 3.1 可知, 跳系统 (3.8) 确定一个耦合算子 $\widetilde{L}$.

下面简要说明 $\widetilde{L}$ 对应的 $\mathbb{R}^{2d}$ 上耦合过程的构造. 根据 Lévy-Itô 分解, 可知存在 Poisson 随机测度 $N(dt,dz)$, 使得

$$dZ_t = \int_{\{|z|\geqslant 1\}} z\,N(dt,dz) + \int_{\{|z|<1\}} z\,\widetilde{N}(dt,dz), \quad t>0,$$

其中 $\widetilde{N}(dt,dz) = N(dt,dz) - dt\,\nu(dz)$ 为 $N(dt,dz)$ 对应的补偿 Poisson 随机测度. 记

$$\breve{N}(dt,dz) = \mathbb{1}_{\{|z|\leqslant 1\}}\widetilde{N}(dt,dz) + \mathbb{1}_{\{|z|>1\}}N(dt,dz).$$

特别地,

$$dZ_t = \int_{\mathbb{R}^d} z\,\breve{N}(dt,dz), \quad t>0.$$

考虑下面 $\mathbb{R}^{2d}$ 上 SDE

$$\begin{cases} dX_t' = b(X_t')dt + \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} z\,\breve{N}(dt,dz), & t>0, \\ dX_t'' = b(X_t'')dt + \displaystyle\int_{\{|z|\leqslant\eta|X_t'-X_t''|\}} R_{X_{t-}',X_{t-}''}(z)\,\breve{N}(dt,dz) + \int_{\{|z|>\eta|X_t'-X_t''|\}} z\,\breve{N}(dt,dz), & t>0. \end{cases} \tag{3.9}$$

注意到, 对于固定的 $z \in \mathbb{R}^d$, $(x,y) \mapsto R_{x,y}(z)$ 在 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2d} : x \neq y\}$ 上局部 Lipschitz 连续. 若假设 SDE (3.1) 中漂移系数 b 是半 Lipschitz 连续的, 则可以验证给定 $\mathbb{R}^{2d}$ 上 SDE (3.9) 到 (随机) 时间 T 为止存在唯一强解 $(X_t', X_t'')_{0\leqslant t\leqslant T}$, 其中 T 表示过程 $(X_t')_{t\geqslant 0}$ 与 $(X_t'')_{t\geqslant 0}$ 的相遇 (耦合) 时间, 即

$$T := \inf\{t > 0 : X_t' = X_t''\}.$$

自然地, 可定义当 $t > T$ 时 $X_t'' = X_t'$. 容易验证, 过程 $(X_t', X_t'')_{t\geqslant 0}$ 生成元算子就是 (3.8) 确定的耦合算子 $\widetilde{L}$. 称耦合过程 (X_t', X_t'') 为 SDE (3.1) 的反射耦合过程.

关于可加 Brown 运动驱动的 SDE 的反射耦合可写成

$$\begin{cases} dX_t' = b(X_t')dt + dB_t, & t > 0, \\ dX_t'' = b(X_t'')dt + (\mathbb{1}_{d\times d} - 2e_t e_t^\top \mathbb{1}_{\{t<T\}})dB_t, & t > 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^d$, $x^\top$ 表示 x 的转置,

$$e_t := |X_t' - X_t''|^{-1}(X_t' - X_t'').$$

对于任意 $0 < t < T$, $A_t = \mathbb{1}_{d\times d} - 2e_t e_t^\top$ 是正交矩阵. 从而由 Brown 运动的 Lévy 特征可知, $(B_t^{\#})_{t\geqslant 0}$ $:= (A_t B_t)_{t\geqslant 0}$ 仍是 Brown 运动. 正如前面指出的, 扩散过程反射耦合在随机分析中有着非常重要的作用. 应用上述思想到 Lévy 过程的情形, 若 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 为旋转对称纯跳 Lévy 过程, 则 $(Z_t^{\#})_{t\geqslant 0} := (A_t Z_t)_{t\geqslant 0}$ 仍是纯跳 Lévy 过程, 且与 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 具有相同的有限维分布. 注意到,

$$R_{X_t', X_t''}(z) = (\mathbb{1}_{d\times d} - 2e_t e_t^\top)z.$$

比较 (3.10) 和 (3.9) 可知, 通过 $(Z_t^{\#})_{t\geqslant 0}$ 构造出的耦合过程对应于 (3.9) 中 $\eta = \infty$ 的情形. 这正是称 (3.8) 为反射耦合的原因. 但是在很多应用过程中, $\eta = \infty$ 通常不是最优的. 例如, 文献 [55] 选择 $\eta = 1/2$ 用于考虑对称 α 平稳 Lévy (α-stable-Lévy) 过程驱动的 SDE (3.1) 生成半群的指数压缩性; 文献 [26] 指出, 选择 $\eta = 1/2$ 对一大类旋转对称 Lévy 过程而言, 其对应的耦合过程是成功的, 而且具有很好的性质. 最后, 强调反射耦合的构造要求 Lévy 过程是旋转对称的, 它可以适合 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是从属 Brown 运动 (包括我们熟悉的对称平稳 Lévy 过程) 的情形.

例 3.3 (修正基本耦合[54]) 对于任意 $k > 0$ 和 $x, y \in \mathbb{R}^d$, 定义

$$(x-y)_\kappa := \left(1 \wedge \frac{\kappa}{|x-y|}\right)(x-y) \ \left(\frac{1}{\infty} := 0\right).$$

对于任意 $x \in \mathbb{R}^d$, 定义 $\mu_x(dz) := [\nu \wedge (\delta_x * \nu)](dz)$. 取 $n = 2$, $\Psi_1(z) = z + (x-y)_\kappa$, $\Psi_2(z) = z + (y-x)_\kappa$, $\nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{2}\nu$. 由于 $\Psi_1^{-1}(z) = \Psi_2(z)$, 所以 (3.5) 成立. 从而跳系统 (3.6) 为

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} (x+z, y+z+(x-y)_\kappa), & \dfrac{1}{2}\mu_{(y-x)_\kappa}(dz), \\ (x+z, y+z+(y-x)_\kappa), & \dfrac{1}{2}\mu_{(x-y)_\kappa}(dz), \\ (x+z, y+z), & \left(\nu - \dfrac{1}{2}\mu_{(y-x)_\kappa} - \dfrac{1}{2}\mu_{(x-y)_\kappa}\right)(dz), \end{cases} \tag{3.11}$$

可以确定一个耦合算子.

特别地, 当 $|x-y|\leqslant\kappa$ 时, (3.11) 变成

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(x+z,y+z+(x-y)), & \dfrac{1}{2}\mu_{y-x}(dz),\\ (x+z,y+z+(y-x)), & \dfrac{1}{2}\mu_{x-y}(dz),\\ (x+z,y+z), & \left(\nu-\dfrac{1}{2}\mu_{y-x}-\dfrac{1}{2}\mu_{x-y}\right)(dz).\end{cases}$$

上式第一行表明两个边缘的距离从 $|x-y|$ 下降为 $|(x+z)-(y+z+(x-y))|=0$, 这就是跳过程基本耦合 (basic coupling) 的思想 (参见文献 [11, 例 2.10]), 不同的是, 这里仅使用从 x 到 $x+z$ 以及 y 到 $y+z+(x-y)$ 最大强度 $\mu_{y-x}(dz)$ 的一半. 因此, 称 (3.11) 为修正基本耦合. 第二行表明两个边缘过程的距离从 $|x-y|$ 增大到 $|(x+z)-(y+z-(y-x))|=2|x-y|$, 显然这一项对耦合成功性质不利, 但是它还是可控的. 第三行就是熟知的齐步走耦合. 需要强调的是, 第一行与第二行的同时出现是必须的, 它使得其对应的算子满足耦合算子的边缘性质, 该验证用到如下性质: 对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 都有 $\mu_x(\mathbb{R}^d)=\mu_{-x}(\mathbb{R}^d)$. 事实上, 修正基本耦合的创新点不仅只是第一行仅仅用了 1/2 的强度, 还有参数 κ 的引入. 具体而言, 当 $|x-y|>\kappa$ 时, 可以发现 (3.11) 中第一行两个边缘的距离从 $|x-y|$ 下降为 $|x-y|-\kappa$. 因此, 参数 κ 是体现两个边缘过程何时碰到一起、何时未必碰到一起但靠近了 κ 的距离. 直观上讲, 当 x 和 y 离得比较远时, 如果强制要求它们通过一次跳碰到一起是比较苛刻的条件, 引入参数 κ 是必要的, 这一修正对有限层 Lévy 测度对应的 Lévy 过程耦合的研究有至关重要的作用.

为阐述修正基本耦合生成过程的构造, 将 Poisson 随机测度 N 从 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d$ 延拓到 $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d\times[0,1]$:

$$N(ds,dz,du)=\sum_{0<r\leqslant s:\Delta Z_r\neq0}\delta_{(r,\Delta Z_r)}(ds,dz)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(u)du.$$

记

$$\breve{N}(ds,dz,du)=\mathbb{1}_{[1,\infty)\times[0,1]}(|z|,u)N(ds,dz,du)+\mathbb{1}_{(0,1)\times[0,1]}(|z|,u)\,\widetilde{N}(ds,dz,du),$$

其中

$$\widetilde{N}(ds,dz,du)=N(ds,dz,du)-ds\,\nu(dz)du.$$

从而,

$$Z_t=Z_0+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d\times[0,1]}z\,\breve{N}(ds,dz,du),\quad t\geqslant0.$$

进一步定义控制函数

$$\rho(x,z)=\frac{[\nu\wedge(\delta_x*\nu)](dz)}{\nu(dz)}\in[0,1],\quad x,z\in\mathbb{R}^d.$$

则修正基本耦合算子对应的过程可由下列 SDE 确定:

$$\begin{cases}dX_t'=b(X_t')dt+dZ_t, & t>0,\\ dX_t''=b(X_t'')dt+dZ_t+dL_t^{\#}, & t>0,\end{cases}\tag{3.12}$$

这里

$$dL_t^{\#}=\int_{\mathbb{R}^d\times[0,1]}V_{t-}(z,u)N(dt,dz,du),$$

其中, $V_t(z,u) = (U_t)_\kappa(\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}\rho((-U_t)_\kappa,z)]}(u) - \mathbb{1}_{(\frac{1}{2}\rho((-U_t)_\kappa,z),\,\frac{1}{2}[\rho((-U_t)_\kappa,z)+\rho((U_t)_\kappa,z)])}(u))$, $U_t = X_t' - X_t''$, $(x)_\kappa = (1\wedge(\kappa|x|^{-1}))x$.

事实上, 对于任意 $x\neq 0$, 都有

$$\mu_x(\mathbb{R}^d) \leqslant \int_{\{|z|\leqslant|x|/2\}} (\delta_x * \nu)(dz) + \int_{\{|z|>|x|/2\}} \nu(dz) \leqslant 2\int_{\{|z|\geqslant|x|/2\}} \nu(dz) < \infty. \tag{3.13}$$

可以从 SDE (3.1) 的强解出发, 利用交错 (interlacing) 技巧证明 SDE (3.12) 解的存在性, 具体可参见文献 [28,33]. 修正基本耦合并不要求 Lévy 过程是旋转不变的, 因此它比反射耦合适用范围广. 修正基本耦合的思想最早源于文献 [29,54], 用于讨论 SDE (3.1) 的成功耦合性质, 进一步在文献 [33] 中用于讨论 SDE (3.1) 的指数遍历性, 文献 [26] 也利用修正基本耦合证明 Lévy 过程具有耦合性质 (即定理 2.1). 另外, 从最优耦合算子的观点来看, 如果 Lévy 过程是旋转不变的, 则在很多情形下使用反射耦合更加有效, 更多细节讨论可参见文献 [26].

事实上, 当 $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ 是旋转对称时, 可以结合反射耦合与基本耦合的思想得到下面例子.

例 3.4 (反射 - 基本耦合 [35])　设 $(Z_t)_{t\geqslant0}$ 是纯跳对称旋转不变的 Lévy 过程, 其对应的 Lévy 测度为 $\nu(dz)=\rho(|z|)\,dz$. 考虑跳系统

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(x+z, y+z+(x-y)), & [\rho(|z|)\wedge\rho(|x-y+z|)]\,dz,\\ (x+z, y+R_{x,y}(z)), & (\rho(|z|)-[\rho(|z|)\wedge\rho(|x-y+z|)])\,dz.\end{cases} \tag{3.14}$$

取 $n=2$, $\Phi_1(z)=z+(x-y)$, $\Phi_2(z)=R_{x,y}(z)$, $\nu_1(dz)=[\rho(|z|)\wedge\rho(|x-y+z|)]\,dz$, $\nu_2(dz)=(\rho(|z|)-[\rho(|z|)\wedge\rho(|x-y+z|)])\,dz$, (3.14) 可由 (3.6) 推导出. 当 $x\neq y$ 时, $R_{x,y}(z)=y-x$, 由此可知 (3.5) 成立, 故 (3.14) 确定一耦合算子. 结合例子 3.2 和 3.3 的证明, 可以构造该耦合算子相应的 Markov 耦合过程, 具体可参见文献 [26, 第 3.3 小节]. 上述耦合过程最早在文献 [35] 中提出, 它主要基于 McCann [37] 关于一维最优运输问题解的工作. 不同于文献 [35], 采用 Markov 耦合算子的优点在于, 可以明确用随机微分方程强解的方式构造对应的耦合过程, 这在实际应用中更有效.

本节仅讨论可加 Lévy 噪声驱动的 SDE 的耦合, 上述思想可以被进一步改进, 用于研究可乘 Lévy 噪声驱动 SDE 与 Lévy 型过程的相关性质, 具体可参见文献 [28]. 这里不再叙述.

4　耦合方法在 Lévy 随机系统中的应用

Chen [11] 和 Wang [50] 明确指出, 耦合方法不仅可以用于研究 Markov 半群的正则性 (这属于过程短时间性质的研究范畴), 也可用于刻画 Markov 过程的遍历性 (这将涉及过程的长时间行为). 耦合思想在这两方面工作中的实现主要基于两个要点: (i) 耦合的构造; (ii) (广义) 度量函数的选择. 下面分别介绍用反射耦合研究变指标平稳 (stable) 型算子生成半群的正则性和用修正基本耦合研究带跳随机 Hamilton 系统的指数遍历性的相关工作. 本文着重强调耦合的构造, 简单说明度量函数的选择. 事实上, 由于 Lévy 随机系统均涉及非局部算子, 具体的证明比扩散过程复杂很多, 可分别参见文献 [1,34].

4.1　变指标平稳型算子生成半群的正则性

考虑 $\mathbb{R}^d$ 上 Lévy 型过程 $(X_t)_{t\geqslant0}$, 其对应的无穷小生成元算子为

$$Lf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+z)-f(x)-\langle\nabla f(x),z\rangle\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant1\}})\frac{k(x,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}}dz,\quad f\in C_b^2(\mathbb{R}^d), \tag{4.1}$$

其中系数 $\alpha(x)$ 和 $\kappa(x,z)$ 满足以下条件:

(i) 存在常数 $0<\alpha_1\leqslant\alpha_2<2$, 使得对于任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 都有 $\alpha(x)\in[\alpha_1,\alpha_2]$;

(ii) 存在常数 $0<k_1\leqslant k_2<\infty$, 使得对于任意 $x,z\in\mathbb{R}^d$, 都有 $k_1\leqslant k(\alpha,x)\leqslant k_2$ 且 $k(x,z)=k(x,-z)$.

特别地, 当 $\alpha(x)$ 和 $k(x,z)$ 都是常值函数时, 由 (4.1) 定义的算子 L 对应于旋转不变对称平稳 Lévy 过程. 因此, 称算子 L 确定的 Lévy 型过程为变指标平稳型过程. 我们试图给出 $\alpha(x)$ 和 $k(x,z)$ 适当的连续性, 建立 L 对应 Markov 半群的 Hölder 连续性. 需要指出的是, 根据 Lévy 过程的特征, 可利用 Fourier 变换等技巧, 得到对称平稳 Lévy 过程半群的正则性, 但是这一系列传统的方法对变指标平稳型过程相应性质的研究失效, 因此该问题的研究具有挑战性, 并且显式的 Hölder 连续性至今未知.

另外, 已有文献深入研究了变指数非局部算子 L 对应的有界调和函数的 Hölder 连续性与 Harnack 不等式 (参见文献 [5,6]), 而且文献 [5,6] 不要求 Lévy 型算子对应的 Lévy 型测度核关于 Lebesgue 测度绝对连续. 但是从调和函数的连续性推导出半群的 Hölder 连续性通常需要假定算子是 L^2 对称的[7], 而 (4.1) 定义的算子 L 对应的 Markov 半群通常是非对称的. 因此上述的证明方法也不再适用.

利用反射耦合, 可得到如下的结论. 设 $(P_t)_{t\geqslant0}$ 为 Lévy 型过程 $(X_t)_{t\geqslant0}$ 生成的半群.

定理 4.1 (参见文献 [34, 定理 1.2])　假设如下两个条件成立:

(i) $\lim_{|x-y|\to0}|\alpha(x)-\alpha(y)|\log\frac{1}{|x-y|}=0$;

(ii) $\lim_{r\to0}[\sup_{x\in\mathbb{R}^d,|z_1-z_2|\leqslant r}|k(x,z_1)-k(x,z_2)|+\sup_{|z|\leqslant1,|x-y|\leqslant r}|k(x,z)-k(y,z)|]=0$.

则对于任意 $\beta\in(0,\alpha_1\wedge1)$, 存在常数 $C>0$, 使得对于任意 $f\in B_b(\mathbb{R}^d)$, $t>0$, 都有

$$\sup_{x\neq y}\frac{|P_tf(x)-P_t(y)|}{|x-y|^\beta}\leqslant\frac{C\|f\|_\infty}{(t\wedge1)^{\beta/\alpha_1}}.$$

特别地, P_tf 是 β-Hölder 连续的.

注 4.1　(1) 文献 [34] 并没有假定 (4.1) 中系数 $k(x,z)$ 满足 $k(x,z)=k(x,-z)$.

(2) 若对 $\alpha(x)$ 和 $k(x,z)$ 假设更强的连续性条件, 可以推导出半群 $(P_t)_{t\geqslant0}$ 是 Lipschitz 连续的, 具体可参见文献 [34, 定理 1.5 和例 1.6].

定理 4.1 的证明基于反射耦合的技巧. 具体地, 该耦合算子对应的跳系统可以表示成

$$(x,y)\mapsto\begin{cases}(x+z,y+R_{x,y}(z)), & \dfrac{\widetilde{k}(x,y,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}\vee|z|^{d+\alpha(y)}}\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant\frac{|x-y|}{2}\}}dz,\\ (x+z,y), & \left(\dfrac{k(x,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}}-\dfrac{\widetilde{k}(x,y,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}\vee|z|^{d+\alpha(y)}}\right)\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant\frac{|x-y|}{2}\}}dz,\\ (x,y+z), & \left(\dfrac{k(y,z)}{|z|^{d+\alpha(y)}}-\dfrac{\widetilde{k}(x,y,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}\vee|z|^{d+\alpha(y)}}\right)\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant\frac{|x-y|}{2}\}}dz,\\ (x+z,y+z), & \dfrac{k(x,y)\wedge k(y,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}\vee|z|^{d+\alpha(y)}}\mathbb{1}_{\{|z|>\frac{|x-y|}{2}\}}dz,\\ (x+z,y), & \left(\dfrac{k(x,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}}-\dfrac{k(x,z)\wedge k(y,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}\vee|z|^{d+\alpha(y)}}\right)\mathbb{1}_{\{|z|>\frac{|x-y|}{2}\}}dz,\\ (x,y+z), & \left(\dfrac{k(y,z)}{|z|^{d+\alpha(y)}}-\dfrac{k(x,z)\wedge k(y,z)}{|z|^{d+\alpha(x)}\vee|z|^{d+\alpha(y)}}\right)\mathbb{1}_{\{|z|>\frac{|x-y|}{2}\}}dz,\end{cases}$$

这里 $\widetilde{k}(x,y,z)=k(x,z)\wedge k(x,R_{x,y}(z))\wedge k(y,R_{x,y}(z))$, 其中 $R_{x,y}(z)$ 由 (3.7) 给出. 上述跳系统的前 3 行代表小跳的耦合, 其中第 1 行表示我们使用反射耦合, 后 3 行代表大跳的耦合, 第 4 行表示我们使

用齐步走耦合. 第 2、3、5 和 6 行的出现是由于算子 L 是变系数造成的, 这也使得定理 4.1 的证明复杂许多.

下面举例说明定理 4.1 的应用.

例 4.1 ($\alpha(x)$ 平稳型算子) 考虑算子 $L=-(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$, 即对于任意 $f\in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, 都有

$$Lf(x)=w(x)\int_{\mathbb{R}^d}(f(x+z)-f(x)-\langle\nabla f(x),z\rangle\mathbb{1}_{\{|z|\leqslant1\}})|z|^{-d-\alpha(x)}dz, \tag{4.2}$$

其中

$$w(x)=\alpha(x)2^{\alpha(x)-1}\frac{\Gamma((d+\alpha(x))/2)}{\pi^{d/2}\Gamma((2-\alpha(x))/2)}.$$

假设

(i) $0<\alpha_1=\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\alpha(x)\leqslant\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\alpha(x)\leqslant\alpha_2<2$;

(ii) $\lim_{r\to0}\frac{\rho(r)}{|\log r|}=0$, $\int_0^1\frac{\rho(r)}{r}dr<\infty$, 其中 $\rho(r)=\sup_{|x-y|\leqslant r}|\alpha(x)-\alpha(y)|$.

则根据文献 [4] 可知, 关于 (4.2) 定义的算子 $-(-\Delta)^{\alpha(x)/2}$ 的鞅问题解存在且唯一. 进一步地, 由定理 4.1 可知其对应的 Markov 半群是 β-Hölder 连续的, 其中 $\beta\in(0,\alpha_1\wedge1)$.

4.2 带跳随机 Hamilton 系统的遍历性

在统计物理中, 下面取值于 $\mathbb{R}^{2d}:=\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上的动理学 Langevin 过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant0}$ 可用以描绘粒子的位置 X_t 和速率 V_t:

$$\begin{cases}dX_t=V_tdt,\\ dV_t=-V_tdt-\nabla U(X_t)dt+dZ_t,\end{cases} \tag{4.3}$$

其中, $U\in C^1(\mathbb{R}^d)$, $(Z_t)_{t\geqslant0}$ 为 d 维驱动噪声. 由于噪声项 $(Z_t)_{t\geqslant0}$ 仅出现在第二分量过程 $(V_t)_{t\geqslant0}$ 上, 所以 (4.3) 是典型的退化 SDE. 在文献 [21] 中, 称 (4.3) 为带阻尼随机 Hamilton 系统, 其对应的 Hamilton 函数为

$$H(x,v)=U(x)+\frac{|v|^2}{2}.$$

当 $(Z_t)_{t\geqslant0}$ 为 Brown 运动并且 U 是光滑函数时, 著名的 Hörmander 亚椭圆理论指出, 过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant0}$ 存在光滑的分布密度函数 $p(t,x,v)$, 且满足下列动理学 Fokker-Planck 方程 (参见文献 [45]):

$$\partial_tp+v\cdot\nabla_xp-\nabla U(x)\cdot\nabla_vp=\frac{1}{2}\Delta_vp-\mathrm{div}_v(vp).$$

同时, 不难证明 $\mu_*(dx,dv):=\mathrm{e}^{-H(x,v)}dxdv$ 是过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant0}$ 的不变测度. 文献 [36,49,56] 研究了过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant0}$ 关于该不变测度的收敛速度. 在应用方面, SDE (4.3) 收敛于不变测度 $\mu_*(dx,dv)$ 的速度估计在 Hamilton Monte Carlo 算法、深度学习中的随机梯度下降算法等理论中起重要作用 [15,38].

然而在神经网络等研究领域, 随机梯度噪声通常呈重尾现象, 使得方程 (4.3) 中驱动的噪声用 Lévy 过程来描绘更加贴切. 例如, 当 $(Z_t)_{t\geqslant0}$ 为对称 α 平稳 Lévy 过程时, 出现了随机分数 Hamilton Monte Carlo 算法和分数阶带阻尼 Langevin 过程等名词 [44,57]. 尽管如此, 关于带跳随机 Hamilton 系统遍历性的研究仍是空白.

最近, 利用修正基本耦合得到如下结论. 对于 $\mathbb{R}^d$ 上任意概率测度 μ_1 和 μ_2, $W_\Psi(\mu_1,\mu_2)$ 是以 $\Psi(x,y)$ 为费用函数的 Wasserstein 型距离, 其定义为

$$W_\Psi(\mu_1,\mu_2)=\inf_{\Pi\in\mathscr{C}(\mu_1,\mu_2)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}\Psi(x,y)\Pi(dx,dy),$$

其中 $\mathscr{C}(\mu_1,\mu_2)$ 表示 μ_1 和 μ_2 的耦合概率全体. $P_t((x,v),\cdot)$ 为过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 的转移概率.

定理 4.2 (参见文献 [1, 定理 1.1])　(i) 假设 $(Z_t)_{\geqslant 0}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上纯跳 Lévy 过程, 且其对应的 Lévy 测度 ν 满足

$$\int_{\mathbb{R}^d}(|z|^2\wedge|z|^\theta)\nu(dz)<\infty,\quad \nu(dz)\geqslant\frac{c}{|z|^{d+\theta_0}}\mathbb{1}_{\{0<z_1\leqslant 1\}}dz,$$

其中, $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $0<\theta<1$, $\theta_0\in(0,\theta/2)$;

(ii) 假设 $x\mapsto\nabla U(x)$ 满足全局 Lipschitz 连续, 且存在常数 $\lambda_1,\lambda_2>0$, 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^d$, 都有

$$\langle x,\nabla U(x)\rangle\geqslant\lambda_1|x|^2-\lambda_2.$$

则 SDE (4.3) 确定的过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 是指数遍历的. 更精确地, 存在唯一的不变概率测度 μ 和常数 $\lambda>0$, 使得对于任意 $(x,v)\in\mathbb{R}^{2d}$, 都有

$$W_\Psi(P_t((x,v),\cdot),\mu)\leqslant C(x,v)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

其中, $C(x,v)$ 是正函数,

$$\Psi(x,v,x',v')=[1\wedge(|x-x'|+|v-v'|)][(1+|x|^2+|v|^2)^{\theta/2}+(1+|x'|^2+|v'|^2)^{\theta/2}].$$

下面简要说明定理 4.2 的证明思路. 首先, 考虑变换过程 $(X_t,V_t')_{t\geqslant 0}$, 其中 $V_t'=X_t+V_t$. 它满足

$$\begin{cases}dX_t=(V_t'-X_t)dt,\\ dV_t'=-(V_t'-X_t)dt-\nabla U(X_t)dt+dZ_t,\end{cases}\tag{4.4}$$

这个变换的好处在于, 不同于 (4.3), 当 V_t' 充分小时, 方程 (4.4) 中第一个退化的分量过程 $(X_t)_{t\geqslant 0}$ 出现了 "耗散" 现象. 之后, 引入过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 适当地修正基本耦合. 具体地, 对于任意 $k>0$ 和 $x\in\mathbb{R}^d$, 记 $(x)_\kappa:=(1\wedge(\kappa|x|^{-1}))x$. 基于方程 (4.4), 考虑如下耦合系统:

$$(x+v,x'+v')\to\begin{cases}(x+(v+u),x'+(v'+u)+(q)_\kappa), & \frac{1}{2}\mu_{-(q)_\kappa}(du),\\ (x+(v+u),x'+(v'+u)-(q)_\kappa), & \frac{1}{2}\mu_{(q)_\kappa}(du),\\ (x+(v+u),x'+(v'+u)), & \left(\mu-\frac{1}{2}\mu_{-(q)_\kappa}-\frac{1}{2}\mu_{(q)_\kappa}\right)(du),\end{cases}$$

其中, $\mu_x(du)=[(\nu\wedge\delta_x*\nu)](du)$, $q=x-x'+(v-v')$, 即对原 SDE (4.3) 速度分量过程 $(V_t)_{t\geqslant 0}$ 采用如下耦合:

$$(v,v')\to\begin{cases}(v+u,v'+u+(q)_\kappa), & \frac{1}{2}\mu_{-(q)_\kappa}(du),\\ (v+u,v'+u-(q)_\kappa), & \frac{1}{2}\mu_{(q)_\kappa}(du),\\ (v+u,v'+u), & \left(\nu-\frac{1}{2}\mu_{-(q)_\kappa}-\frac{1}{2}\mu_{(q)_\kappa}\right)(du).\end{cases}$$

由此容易写出 $(X_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 对应的耦合算子. 从而根据例 3.2, 也可以构造相应的耦合过程.

进一步地, 为利用耦合思想考虑过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 的指数遍历性, 需要选择好的拟度量函数 $\widetilde{\Psi}(x,v)$, 使得存在常数 $\lambda>0$, 对于任意 $(x,v)\in\mathbb{R}^{2d}$, 都有

$$\widetilde{L}\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')\leqslant -\lambda\widetilde{\Psi}(x,v,x',v'), \tag{4.5}$$

这里 $\widetilde{L}$ 为上面构造的 Markov 耦合算子, $\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')$ 具有如下形式:

$$\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')=f(|x-v|\wedge R_0)[1+\varepsilon W(x,v)+\varepsilon W(x',v')],$$

其中 $W(x,v)$ 是过程 $(X_t,V_t)_{t\geqslant 0}$ 对应算子 L 的 Lyapunov 函数, 函数 $f(r)$ 满足 $f(0)=0$ 且与线性函数可比, 常数 ε 与 R_0 待定. 显然, $\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')$ 与定理 4.2 的函数 $\Psi(x,v,x',v')$ 可比. 这样容易由 (4.5) 和 Grönwall 不等式得到定理 4.2. 这里需要指出的是, 类似于 $\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')$, 乘积形式的拟度量函数常用于研究退化系统的遍历性 (参见文献 [17,20]). 3 个待定量 f、ε 和 R_0 分 3 步来确定. (i) Lyapunov 函数 $W(x,v)$ 用于控制紧集外 $\widetilde{L}\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')$ 的估计, 紧集的选择确定了 R_0 的值. (ii) $f(r)$ 的选择用于控制紧集内两个边缘过程相对接近时 $\widetilde{L}\widetilde{\Psi}(x,v,x',v')$ 的估计, 这时将充分利用上述耦合的构造. (iii) 进一步调整参数 ε, 使得 (4.5) 成立.

上述仅举两个例子来说明耦合方法在 Lévy 过程驱动的随机系统中的应用. 事实上, 也可以利用修正基本耦合研究一般 Lévy 型过程生成半群的正则性 [27], 利用反射耦合考虑带阻尼状态依赖非局部扰动下随机 Hamilton 系统的遍历性 [2]. 不仅如此, 耦合方法也可以处理系数退化的随机微分方程 (如非线性分支过程 [24] 和带两因子随机交互过程 [3] 等) 的指数遍历性, 还可以用于考虑 Lévy 噪声驱动的分布依赖随机微分方程的遍历性 [25] 和 Lévy 噪声驱动的随机微分方程 Euler 算法的收敛性 [22] 等一系列不同但有趣的课题.

近十几年来耦合方法已得到了进一步的发展. 英国数学家 Hairer 等 [20] 提出了渐近耦合 (asymptotic coupling) 的概念, 并用它来考虑随机 (偏) 微分方程的遍历性问题. Wang [52] 为建立无穷维空间上半群的 Harnack 不等式引入了 Markov 过程的变测度耦合 (coupling by change of measure) 方法, 随后用其来研究随机 (偏) 微分方程的 Bismut 导数公式、Driver 分部积分公式和梯度估计等. 这些使得耦合方法适用的对象更加广泛并具有更加重大的理论意义及更加深远的应用价值. 关于上述理论在 Lévy 型过程的深入研究目前似乎还未见到, 希望本文能够起到抛砖引玉的作用, 让更多同行共同发展耦合这一经典的概率方法.

参考文献

1 Bao J, Wang J. Coupling approach for exponential ergodicity of stochastic Hamiltonian systems with Lévy noises. Stochastic Process Appl, 2022, 146: 114–142

2 Bao J, Wang J. Exponential ergodicity for damping Hamiltonian dynamics with state-dependent and non-local collisions. Bernoulli, 2023, 29: 2442–2465

3 Bao J, Wang J. Coupling methods and exponential ergodicity for two-factor affine processes. Math Nachr, 2023, 296: 1716–1736

4 Bass R F. Uniqueness in law for pure jump Markov processes. Probab Theory Related Fields, 1988, 79: 271–287

5 Bass R F, Kassmann M. Hölder continuity of harmonic functions with respect to operators of variable order. Comm Partial Differential Equations, 2005, 30: 1249–1259

6 Bass R F, Kassmann M. Harnack inequalities for non-local operators of variable order. Trans Amer Math Soc, 2005, 357: 837–850

7 Bass R F, Kassmann M, Kumagai T. Symmetric jump processes: Localization, heat kernels and convergence. Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat, 2010, 46: 59–71

8 Böttcher B, Schilling R L, Wang J. Constructions of coupling processes for Lévy processes. Stochastic Process Appl, 2011, 121: 1201–1216

9 Böttcher B, Schilling R L, Wang J. Lévy Matters III. Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2099. Berlin: Springer, 2014

10 Chen M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems, 2nd ed. Singapore: World Scientific, 2004

11 Chen M F. Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory. London: Springer, 2005

12 Chen M F, Li S F. Coupling methods for multidimensional diffusion processes. Ann Probab, 1989, 17: 151–177

13 Chen M F, Wang F Y. Application of the coupling method to the first eigenvalue on the manifold (in Chinese). Sci China Ser A, 1993, 23: 1130–1140 [陈木法, 王凤雨. 耦合方法在流形第一特征值问题上的应用. 中国科学 A 辑, 1993, 23: 1130–1140]

14 Chen Z Q, Song R, Zhang X. Stochastic flows for Lévy processes with Hölder drifts. Rev Mat Iberoam, 2018, 34: 1755–1788

15 Cheng X, Chatterji N S, Bartlett P L, et al. Underdamped Langevin MCMC: A non-asymptotic analysis. Proc Mach Learn Res, 2018, 75: 300–323

16 Cranston M, Wang F Y. A condition for the equivalence of coupling and shift coupling. Ann Probab, 2000, 28: 1666–1679

17 Eberle A, Guillin A, Zimmer R. Couplings and quantitative contraction rates for Langevin dynamics. Ann Probab, 2019, 47: 1982–2010

18 Eberle A, Zimmer R. Sticky couplings of multidimensional diffusions with different drifts. Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat, 2019, 55: 2370–2394

19 Griffeath D. A maximal coupling for Markov chains. Z Wahrscheinlichkeitstheorie verw Gebiete, 1975, 31: 95–106

20 Hairer M, Mattingly J C, Scheutzow M. Asymptotic coupling and a general form of Harris' theorem with applications to stochastic delay equations. Probab Theory Related Fields, 2011, 149: 223–259

21 Hong J, Sun L. Symplectic Integration of Stochastic Hamiltonian Systems. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2314. Singapore: Springer, 2022

22 Huang L J, Majka M B, Wang J. Strict Kantorovich contractions for Markov chains and Euler schemes with general noise. Stochastic Process Appl, 2022, 151: 307–341

23 Ideda N, Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, 2nd ed. Amsterdam: North Holland, 1989

24 Li P S, Wang J. Exponential ergodicity for general continuous-state nonlinear branching processes. Electron J Probab, 2020, 25: 125

25 Liang M, Majka M B, Wang J. Exponential ergodicity for SDEs and McKean-Vlasov processes with Lévy noise. Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat, 2021, 57: 1665–1701

26 Liang M, Schilling R L, Wang J. A unified approach to coupling SDEs driven by Lévy noise and some applications. Bernoulli, 2020, 26: 664–693

27 Liang M, Wang J. Spatial regularity of semigroups generated by Lévy type operators. Math Nachr, 2019, 292: 1551–1566

28 Liang M, Wang J. Gradient estimates and ergodicity for SDEs driven by multiplicative Lévy noises via coupling. Stochastic Process Appl, 2020, 130: 3053–3094

29 Lin H N, Wang J. Successful couplings for a class of stochastic differential equations driven by Lévy processes. Sci China Math, 2012, 55: 1735–1748

30 Lindvall T. Lectures on the Coupling Method. New York: John Wiley & Sons, 1992

31 Lindvall T, Rogers L C G. Coupling of multidimensional diffusions by reflection. Ann Probab, 1986, 14: 860–872

32 Lindvall T, Rogers L C G. On coupling of random walks and renewal processes. J Appl Probab, 1996, 33: 122–126

33 Luo D, Wang J. Refined basic couplings and Wasserstein-type distances for SDEs with Lévy noises. Stochastic Process Appl, 2019, 129: 3129–3173

34 Luo D, Wang J. Coupling by reflection and Hölder regularity for non-local operators of variable order. Trans Amer Math Soc, 2019, 371: 431–459

35 Majka M B. Coupling and exponential ergodicity for stochastic differential equations driven by Lévy processes. Stochastic Process Appl, 2017, 127: 4083–4125

36 Mattingly J C, Stuart A M, Higham D J. Ergodicity for SDEs and approximations: Locally Lipschitz vector fields and degenerate noise. Stochastic Process Appl, 2002, 101: 185–232

37 McCann R J. Exact solutions to the transportation problem on the line. Proc R Soc Lond Ser A Math Phys Eng Sci, 1999, 455: 1341–1380

38 Neal R M. MCMC using Hamiltonian dynamics. In: Handbook of Markov Chain Monte Carlo. Boca Raton: CRC Press, 2011, 113–162

39 Priola E, Wang F Y. Gradient estimates for diffusion semigroups with singular coefficients. J Funct Anal, 2006, 236: 244–264

40 Sato K. Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
41 Schilling R L, Sztonyk P, Wang J. Coupling property and gradient estimates of Lévy processes via the symbol. Bernoulli, 2012, 18: 1128–1149
42 Schilling R L, Wang J. On the coupling property of Lévy processes. Ann Inst Henri Poincaré Probab Stat, 2011, 47: 1147–1159
43 Schilling R L, Wang J. On the coupling property and the Liouville theorem for Ornstein-Uhlenbeck processes. J Evol Equ, 2012, 12: 119–140
44 Şimşekli U, Zhu L, Teh Y W, et al. Fractional underdamped Langevin dynamics: Retargeting SGD with momentum under heavy-tailed gradient noise. Proc Mach Learn Res, 2020, 119: 8970–8980
45 Soize C. The Fokker-Planck Equation for Stochastic Dynamical Systems and Its Explicit Steady State Solutions. Singapore: World Scientific, 1994
46 Thorisson H. Coupling, Stationarity, and Regeneration. New York: Springer, 2000
47 Villani C. Topics in Mass Transportation. Providence: Amer Math Soc, 2003
48 Villani C. Optimal Transport: Old and New. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2009
49 Villani C. Hypocoercivity. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 202. Providence: Amer Math Soc, 2009
50 Wang F Y. Functional Inequalities, Markov Semigroups and Spectral Theory. Beijing: Science Press, 2005
51 Wang F Y. Coupling for Ornstein-Uhlenbeck processes with jumps. Bernoulli, 2011, 17: 1136–1158
52 Wang F Y. Harnack Inequalities for Stochastic Partial Differential Equations. New York: Springer, 2013
53 Wang F Y, Wang J. Coupling and strong Feller for jump processes on Banach spaces. Stochastic Process Appl, 2013, 123: 1588–1615
54 Wang J. On the existence and explicit estimates for the coupling property of Lévy processes with drift. J Theoret Probab, 2014, 27: 1021–1044
55 Wang J. L^p-Wasserstein distance for stochastic differential equations driven by Lévy processes. Bernoulli, 2016, 22: 1598–1616
56 Wu L. Large and moderate deviations and exponential convergence for stochastic damping Hamiltonian systems. Stochastic Process Appl, 2001, 91: 205–238
57 Ye N, Zhu Z. Stochastic fractional Hamiltonian Monte Carlo. In: Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-18). Menlo Park: AAAI Press, 2018, 3019–3025

Couplings of Lévy-type processes and applications

Jian Wang

Abstract In this survey paper, we focus on couplings of Lévy-type processes and expand the paper along with the author's achievements on related topics. The paper consists of three parts: successful couplings for Lévy processes, constructions of couplings for stochastic differential equations driven by Lévy noises, and applications of couplings for stochastic systems with Lévy noises. In each part, we list the main related results, and emphatically state the inheritance and innovation of coupling methods.

Keywords **coupling, Lévy-type process, coupling by reflection, refined basic coupling, exponential ergodicity**

MSC(2020) **60G51, 60J25, 60H10, 60G53**

doi: 10.1360/SSM-2023-0029