

doi: 10.3969/j.issn.1002-0268.2018.12.004

基于塑性铰线理论及强度折减法计算 矩形钢筋混凝土板配筋率

魏 锋^{1,2}, 陈忠达¹, 张 震¹, 朱耀庭³, 吴福泉⁴

(1. 长安大学 特殊地区公路工程教育部重点实验室, 陕西 西安 710064; 2. 陕西省公路局, 陕西 西安 710068;
3. 江西省交通科学研究所, 江西 南昌 330052; 4. 江西省高速公路投资集团有限责任公司, 江西 南昌 341000)

摘要: 为分析矩形钢筋混凝土板在均布荷载作用下的配筋需求, 分别基于塑性铰线理论和强度折减法进行计算。在不同长宽比, 以及固支边、简支边、自由边等类型的支撑条件下, 分别计算得到塑性应变增量分布图, 并抽象出相应的破坏形式。针对四周固支矩形钢筋混凝土板, 根据其破坏形式, 采取塑性铰线理论计算极限弯矩和配筋率。基于莫尔圆和应变协调原理, 推导钢筋混凝土的等效抗剪强度、抗拉强度。根据抗剪极限平衡和抗拉极限平衡, 采取强度折减法计算满足结构承载能力的配筋率。以江西省昌栗高速公路岩溶路基为计算实例, 分别采取塑性铰线理论及强度折减法, 计算设置钢筋混凝土板跨越溶洞所需的配筋率, 并分析两种计算方法的差异。结果表明: 方板和矩形板之间的塑性铰线存在明显差异; 单向板的塑性铰线较之双向板更为狭长, 受力方式更接近于梁; 支撑条件对塑性铰线的影响较大, 固支边、简支边、自由边的存在均会显著影响塑性铰线的形状; 塑性铰线理论和强度折减法计算的配筋率均可表示为以荷载为自变量的线性函数, 且使用强度折减法计算得到的配筋率略小于使用塑性铰线理论的计算结果; 塑性应变增量分布图与塑性铰线假设、典型裂缝分布形式、变形曲线折点较为吻合, 可以有效描述塑性铰线的形状。

关键词: 道路工程; 配筋率; 强度折减; 钢筋混凝土矩形板; 塑性铰线

中图分类号: TU375

文献标识码: A

文章编号: 1002-0268 (2018) 12-0019-09

Calculation of Reinforcement Ratio of Rectangular RC Slabs Based on Plastic Hinge Line Theory and Strength Reduction Method

WEI Feng^{1,2}, CHEN Zhong-da¹, ZHANG Zhen¹, ZHU Yao-ting³, WU Hu-quan⁴

(1. Key Laboratory for Special Area Highway Engineering of Ministry of Education, Chang'an University, Xi'an Shaanxi 710064, China;
2. Shaanxi Provincial Highway Bureau, Xi'an Shaanxi 710068, China; 3. Jiangxi Provincial Transport Science Institute, Nanchang
Jiangxi 330052, China; 4. Jiangxi Provincial Expressway Investment Group Co., Ltd., Nanchang Jiangxi 341000, China)

Abstract: To analyze the reinforcement requirements of rectangular RC slabs under uniform load, the calculation is performed based on plastic hinge line theory and strength reduction method. Under the condition of different aspect ratios and the support conditions such as fixed edge, simple support edge and free edge, the plastic strain increment distribution diagram are calculated, and the failure modes are abstracted. According to the failure modes of fix-supported rectangular RC slabs, plastic hinge line theory is used to calculate the ultimate bending moment and the reinforcement ratio. Based on the Mohr circle and strain coordination principle, the equivalent shear strength and tensile strength of RC are derived. According to the shear limit equilibrium and tension limit equilibrium, strength reduction method is adopted to calculate the

收稿日期: 2018-10-09

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51508246); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (310821175026); 江西省交通运输厅科技项目 (2015C0022)

作者简介: 魏锋 (1982-), 男, 陕西西安人, 高级工程师, 博士研究生. (super1070@sina.cn)

reinforcement ratio that satisfies the structural bearing capacity. Taking the karst subgrade of Nanchang-Shangli expressway in Jiangxi Province for example, the reinforcement ratio for setting RC slabs across karst caves is calculated by using plastic hinge theory and strength reduction method respectively, and the difference between the 2 calculation methods is analyzed. The result shows that (1) the plastic hinge lines of the square slab and the rectangular slab is obviously different; (2) the plastic hinge line of one-way slab is more narrow than that of two-way slab, and the force form of the former is closer to that of beam; (3) the supporting condition has great effect on the plastic hinge line, the existence of fixed, simply supported and free edges will influence the shape of the plastic hinge line significantly; (4) the reinforcement ratios calculated by both plastic hinge line theory and strength reduction method can be expressed as the linear function with the load as independent variable, and the reinforcement ratio calculated by strength reduction method is slightly smaller than that calculated by plastic hinge line theory; (5) the plastic strain increment distribution diagram agrees well with the plastic hinge line hypothesis, typical fracture distribution and the deformation curve folding point, it can describe the shape of plastic hinge line effectively.

Key words: road engineering; reinforcement ratio; strength reduction; RC rectangular slab; plastic hinge line

0 引言

现行的钢筋混凝土结构设计方法以验算为主, 需要根据经验拟定配筋率, 经核算不满足截面抗弯和抗剪要求时, 通常凭经验增加配筋再行复核, 往往要经多次试算才能获得满意的结果。

为了寻求直接计算配筋率的方法, 文献 [1-7] 以塑性铰线理论为基础, 寻找配筋率的解析解, 取得了较好的效果, 缺点是需要假设塑性铰线, 且在求解复杂问题时难以找到解答。数值解法^[8-12]在求解复杂问题时具有优势, 且已被广泛应用于钢筋混凝土结构分析, 但大都侧重于分析应力分布和变形特点, 而鲜有应用于配筋率的计算。

本研究根据塑性应变增量分布图, 抽象出相应的破坏形式, 并与经典塑性铰线假设进行对比, 总结长宽比和支撑条件对塑性铰线的影响。分别使用塑性铰线理论和强度折减法计算矩形钢筋混凝土板配筋率, 比较两者之间的类似点和不同点。

1 基于塑性铰线理论的解析解

塑性铰线理论求解板的配筋率时, 首先需假定一个几何可变的破坏机构图形, 并给破坏机构以虚位移, 然后分别计算内功和外功。按内功与外功相等的条件, 就可确定在假定破坏机构下的极限弯矩及配筋率需求。

1.1 破坏形式及其影响因素

塑性应变增量分布图^[13-16]是一种用来描述破坏形式的常用手段。对于四周固支矩形钢筋混凝土板,

取长宽比 λ 的变化范围为 1~4, 使用数值分析软件 FLAC^{3D} 计算得到塑性应变增量分布图, 并抽象出相应的破坏形式, 结果如图 1 所示。

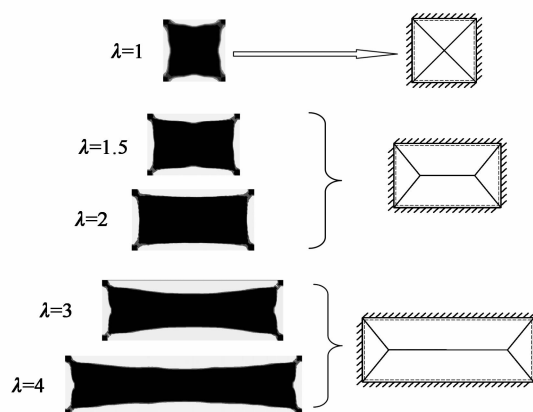


图1 四周固支矩形钢筋混凝土板在各长宽比条件下的破坏形式

Fig. 1 Failure modes of fix-supported rectangular RC slab with different aspect ratios

当 $\lambda = 1$ (方形板) 时, 产生沿对角线的 4 条塑性铰线和沿固支边的 4 条负塑性铰线, 分割成 4 个三角形刚性块体。

当 $1.5 \leq \lambda \leq 2$ (双向板) 时, 共产生 5 条塑性铰线和沿固支边的 4 条负塑性铰线, 分割成沿短边的 2 个三角形刚性块体和沿长边的 2 个梯形刚性块体。

当 $3 \leq \lambda \leq 4$ (单向板) 时, 塑性铰线较之双向板更为狭长, 短跨弯矩 m_{yy} 远大于长跨弯矩 m_{xx} , 受力方式更接近于梁。

分别按固支边、简支边、自由边等类型的支撑条件计算, 得到塑性应变增量分布图, 并抽象出相应的破坏形式, 结果如图 2 所示。

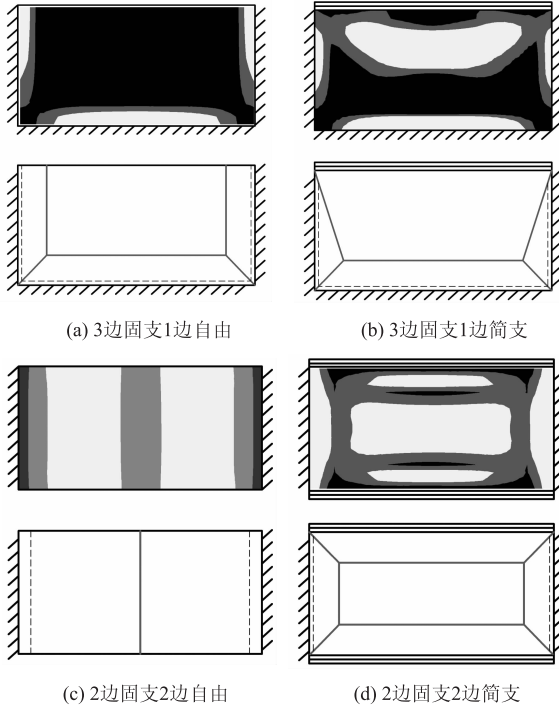


图 2 矩形钢筋混凝土板在各支撑条件下的破坏形式
Fig. 2 Failure modes of rectangular RC slab with different support conditions

在 3 边固支 1 边自由和 3 边固支 1 边简支的情况下, 共产生 5 条塑性铰线和沿固支边的 3 条负塑性铰线, 分割成 4 个刚性块体。

在 2 边固支 2 边自由的情况下, 共产生 1 条沿板中的塑性铰线和 1 条沿固支边的负塑性铰线, 分割成 2 个矩形刚性块体。

在 2 边固支 2 边简支的情况下, 破坏形式较为复杂, 共产生 8 条塑性铰线和 2 条沿固支边的负塑性铰线, 分割成 5 个刚性块体。

1.2 极限弯矩

对于四周固支矩形钢筋混凝土板 ($\lambda > 1$), 在任意配筋条件下的破坏机构如图 3。图中: 矩形板的长、短边跨度分别为 l_x, l_y ; m_{ux}, m_{uy} 分别表示跨中塑性铰线上两个方向单位长度内的极限弯矩; m_1, m'_1, m_2, m'_2 分别表示两个方向支座塑性铰线上单位长度内的极限弯矩; η 为塑性铰线的位置参数。

如果板上作用有均布荷载 q , 在板的微单元面积 $d_x d_y$ 上引起的虚位移为 δ , 则总的外功为:

$$W = \iint q \delta d_x d_y = q \iint \delta d_x d_y = q\Omega, \quad (1)$$

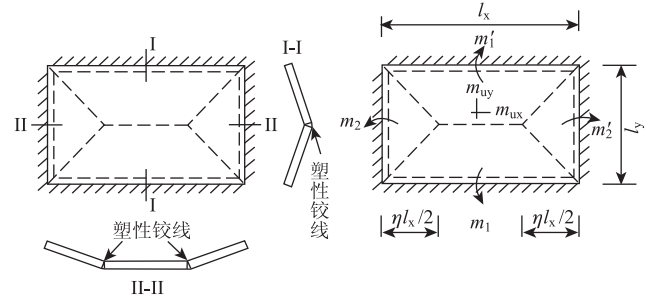


图 3 四周固支矩形钢筋混凝土板的塑性铰线假设
Fig. 3 Plastic hinge line hypothesis of fix-supported rectangular RC slab

式中, Ω 为板下垂位置与原平面之间的体积。

设板中点的虚位移 δ 为 1, 则可计算得到 $\Omega = (3\lambda - \eta) l_y^2 / 6$, 并将式 (1) 写为:

$$W = \frac{1}{6} q l_y^2 (3\lambda - \eta). \quad (2)$$

板中塑性铰线所做的内功^[6]为:

$$D = 4m_{uy} (1 + i) \left(\frac{k}{\eta} + \lambda \right), \quad (3)$$

式中, $i = m_1 / m_{uy}$; $k = m_{ux} / m_{uy}$ 。

利用虚功原理, 令 $W = D$, 得:

$$q = \frac{12m_{uy} (1 + i)}{l_y^2 (3\lambda - \eta)} \left(\frac{k}{\eta} + \lambda \right). \quad (4)$$

令 $\partial q / \partial \eta = 0$, 得到极值条件下的极限荷载:

$$q = \frac{12m_{uy} (1 + i)}{L_y^2 (3\lambda - \eta)} \left(\frac{k}{\eta} + \lambda \right). \quad (5)$$

以极限荷载 q 作为自变量, 求解矩形钢筋混凝土板承受的极限弯矩 m_{uy} :

$$m_{uy} = \frac{q k l_y^2 [\sqrt{1 + 3\lambda^2 / k} - 1]^2}{24(1 + i)\lambda^2}. \quad (6)$$

1.3 配筋率

板内沿 x, y 方向单位长度内的极限弯矩分别为 m_{ux}, m_{uy} , 所需的配筋面积 A_{sx}, A_{sy} 可由式 (7)^[7] 计算:

$$A_{sx} = \frac{m_{ux}}{z f_{ts}}; A_{sy} = \frac{m_{uy}}{z f_{ts}}. \quad (7)$$

式中, z 为内力臂, 即钢筋中心到受压区中心的距离, 可以表示^[17]为 $\gamma_s h_0$ 。 γ_s 为内力臂系数, 范围一般为 0.85 ~ 0.97, h_0 为截面有效高度。

板内钢筋总用量为:

$$V = A_{sx} l_x l_y + A_{sy} l_x l_y = \frac{1}{z f_{ts}} l_x l_y (m_{ux} + m_{uy}), \quad (8)$$

将 $m_{ux} = k m_{uy}$, 及式 (6) 代入式 (8) 中, 可得:

$$V = \frac{l_x l_y q l_y^2}{24 z f_{ts}} (1 + k) \frac{k}{\lambda^2} \left[\sqrt{1 + 3 \frac{\lambda^2}{k}} - 1 \right]^2. \quad (9)$$

令 $\partial V / \partial k = 0$ 可求得钢筋用量为最少时的 $k = 1 / (3\lambda^2 - 2)$, 代入式 (9) 中经化简后可得:

$$V_{\min} = \frac{ql_y^4}{24zf_{ts}} \left(3\lambda - \frac{1}{\lambda} \right). \quad (10)$$

钢筋总用量 $V_{\min}$ 与矩形板总体积 $l_x l_y h$ 之比即为配筋率:

$$v_s = \frac{V_{\min}}{l_x l_y h} = \frac{ql_y^2}{24zhf_{ts}} \left(3 - \frac{1}{\lambda^2} \right). \quad (11)$$

2 基于强度折减法的计算流程

在有限元程序中建立钢筋混凝土整体式模型, 并引入强度折减法进行计算。整体式模型是有限元程序中用于模拟钢筋混凝土结构的一种主要模型类型。采用整体式模型, 需要将钢筋弥散于整个单元中, 视单元为连续均匀材料, 并求解其等效材料参数。首先基于莫尔圆和应变协调原理, 推导钢筋混凝土数值模型的等效抗剪强度、抗拉强度。最后引入强度折减法, 并将其应用于配筋率的计算。

2.1 素混凝土的抗剪强度

直接测试素混凝土的抗剪强度较为困难, 但可以通过抗拉强度、抗压强度进行转换。采用莫尔圆表示轴心抗拉强度和轴心抗压强度试验结果 (图4), 可以看出素混凝土的 c_c 、 φ_c 值与抗拉强度 f_{tc} 、抗压强度 f_{cc} 存在如下关系:

$$\sin \varphi_c = \frac{0.5f_{tc}}{c_c / \tan \varphi_c - 0.5f_{tc}} = \frac{0.5f_{cc}}{c_c / \tan \varphi_c + 0.5f_{cc}}. \quad (12)$$

解之得素混凝土的抗剪强度:

$$\begin{cases} c_c = 0.5\sqrt{f_{tc}f_{cc}} \\ \tan \varphi_c = 0.5\sqrt{f_{tc}f_{cc}} \left(\frac{1}{f_{tc}} - \frac{1}{f_{cc}} \right) \end{cases} \quad (13)$$

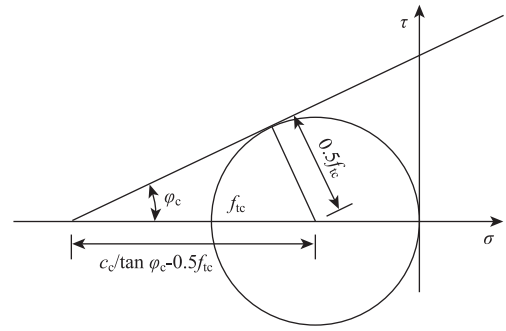
2.2 钢筋混凝土的等效抗剪强度

按混凝土剪切破坏后钢筋混凝土失效计算, 极限平衡状态下混凝土的剪应变 γ_c 为:

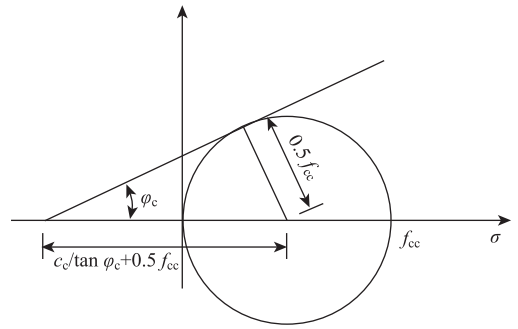
$$\gamma_c = \frac{\tau_c}{G_c} = \frac{c_c + \sigma \tan \varphi_c}{G_c}. \quad (14)$$

式中, σ 为剪切面上的正应力; τ_c 为素混凝土的剪应力; G_c 为素混凝土的剪切模量, 根据 GB 50010—2010《混凝土结构设计规范》, 可按相应弹性模量 E_c 的 40% 采用。

假设钢筋与混凝土变形协调不产生相对滑移, 钢筋的剪应变 γ_s 与混凝土的剪应变 γ_c 相等, 则钢筋所承受的剪应力 τ_s 为:



(a) 轴心抗拉强度



(b) 轴心抗压强度

图4 素混凝土材料参数转换原理

Fig. 4 Parameter conversion principle of plain concrete

$$\tau_s = \gamma_s \cdot G_s = \gamma_c \cdot G_s = \frac{c_c + \sigma \tan \varphi_c}{G_c} \cdot G_s, \quad (15)$$

式中 G_s 为钢筋的剪切模量。

钢筋混凝土承受的剪应力 τ 为:

$$\tau = \tau_c (1 - v_s) + \tau_s v_s, \quad (16)$$

式中 v_s 为配筋率。

代入 $\tau = c + \sigma \tan \varphi$ 及式 (14)、(15), 得钢筋混凝土的等效抗剪强度^[18]:

$$\begin{cases} c = \left[1 + \left(\frac{G_s}{G_c} - 1 \right) \cdot v_s \right] \cdot c_c \\ \tan \varphi = \left[1 + \left(\frac{G_s}{G_c} - 1 \right) \cdot v_s \right] \cdot \tan \varphi_c \end{cases}. \quad (17)$$

2.3 钢筋混凝土的等效抗拉强度

按钢筋屈服后钢筋混凝土失效考虑, 此时钢筋混凝土的拉应力全部由钢筋承担, 则等效抗拉强度^[18]为:

$$f_t = v_s f_{ts}, \quad (18)$$

式中 f_{ts} 为钢筋的抗拉强度。

2.4 配筋率计算流程

强度折减法最早由 Zienkiewicz 提出^[19], 其原理是将材料强度不断折减直至达到极限状态, 从而得到满足稳定性要求的最小材料强度以及相应的配筋

率。本研究所计算的配筋率,是指结构在最不利作用效应组合下,为满足承载力要求所需的最小配筋百分率。当配筋率降低至该最小配筋百分率以下时,结构变成几何可变机构,变形将无限制地增长,从而丧失承载能力达到破坏,这种状态称为结构承载能力的极限状态。

在计算满足抗剪性能要求的配筋率时,需要将抗剪强度 c , $\tan \varphi$ 分别折减 w_s :

$$\begin{cases} c' = \frac{c}{w_s} \\ \tan \varphi' = \frac{\tan \varphi}{w_s} \end{cases} \quad (19)$$

使钢筋混凝土板达到抗剪极限平衡状态,此时抗剪强度 c' , $\tan \varphi'$ 对应的配筋率 v_{s1} 即为满足抗剪性能要求的配筋率。将折减后的抗剪强度 c' , $\tan \varphi'$ 代入式 (17) 即可求得:

$$v_{s1} = \begin{cases} \frac{\frac{c_c}{G_s} - 1}{G_c - 1} & \frac{c_c}{G_s} \geq \frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi_c} \\ \frac{\frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi_c} - 1}{\frac{G_s}{G_c} - 1} & \frac{c_c}{G_s} < \frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi_c} \end{cases} \quad (20)$$

由式 (20) 可知,配筋率 v_{s1} 与 c' , $\tan \varphi'$ 正相关;由式 (19) 可知, c' , $\tan \varphi'$ 与折减系数 w_s 负相关。由此可见,抗剪强度折减就是不断提高折减系数 w_s ,使抗剪强度 c' , $\tan \varphi'$ 和配筋率 v_{s1} 减小,直至钢筋混凝土板达到抗剪极限平衡状态的过程。

在计算满足抗拉性能要求的配筋率时,需要将抗拉强度 f_t 折减 w_t :

$$f_t' = \frac{f_t}{w_t} \quad (21)$$

使钢筋混凝土板达到抗拉极限平衡状态,此时抗拉强度 f_t' 对应的配筋率 v_{s2} 即为满足抗拉性能要求的配筋率。将折减后的抗剪强度 f_t' 代入式 (18) 即可求得:

$$v_{s2} = \frac{f_t'}{f_{ts}} \quad (22)$$

由式 (22) 可知,配筋率 v_{s2} 与 f_t' 正相关;由式 (21) 可知, f_t' 与折减系数 w_t 负相关。由此可见,抗剪强度折减就是不断提高折减系数 w_t ,使抗拉强度 f_t' 和配筋率 v_{s2} 减小,直至钢筋混凝土板达到抗拉极限平衡状态的过程。

取配筋率 v_{s1} 和配筋率 v_{s2} 中较大的值,即为满足

钢筋混凝土板稳定性的配筋率。

3 计算实例

研究背景为江西省昌栗高速公路岩溶处治工程。岩溶区的地基塌陷通常是局部性的,且规模不大。如桂林市岩溶塌陷统计数据^[20]显示:直径 1~5 m 的占总塌陷的 85%。对于规模不大的塌陷,采用钢筋混凝土板是一种经济、有效的处理方法。

岩溶塌陷多为漏斗状,将钢筋混凝土板设置于路基底部较为有利。因此,需考虑路基自重 (15 m 高路基自重约 300 kN/m²)、交通安全设施重量、施工过程中的压实机械荷载、使用过程中的车辆荷载等作用,最大合计约 400 kN/m²,再考虑一定的安全系数,最终取为 500 kN/m²。

拟定算例参数如下:四周固支矩形板长边跨度 $l_x = 6$ m、短边跨度 $l_y = 3$ m,板边长比 $\lambda = l_x/l_y = 2$;板厚 $h = 0.5$ m;保护层厚度 $h_s = 0.04$ m;混凝土强度等级为 C30,轴心抗压强度 $f_{cc} = 13.8$ MPa,轴心抗拉强度 $f_{tc} = 1.39$ MPa,弹性模量 $E_c = 30$ GPa,剪切模量 $G_c = 12$ GPa,密度 $\rho_c = 2\,600$ kg/m³,泊松比 $\mu_c = 0.2$;主拉钢筋等级为 HRB335,抗拉强度 $f_{ts} = 280$ MPa,抗压强度 $f_{cs} = 280$ MPa,直径为 0.01 m,弹性模量 $E_s = 200$ GPa,密度 $\rho_s = 7\,850$ kg/m³,泊松比 $\mu_s = 0.3$;板的均布荷载 $q = 500$ kN/m²,求该板满足稳定性要求的配筋率。

3.1 基于塑性铰线理论的配筋率计算

本例中钢筋距离配筋板下缘 0.04 m,而钢筋直径为 0.01 m,因此截面有效高度 $h_0 = h - 0.04 - 0.01/2 = 0.5 - 0.04 - 0.01/2 = 0.455$ m。故 0.387 m $\leq z = \gamma_s h_0 \leq 0.441$ m。根据式 (11) 得到:

$$0.83\% \leq v_s = \frac{ql_y^2}{24zhf_y} \left(3 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \leq 0.95\% \quad (23)$$

3.2 基于强度折减法的配筋率计算

再使用强度折减法进行计算。将模型剖分为负弯矩钢筋混凝土层、正弯矩钢筋混凝土层和素混凝土层等部分,如图 5 所示。负弯矩钢筋混凝土层、正弯矩钢筋混凝土层的厚度均为 0.09 m,中间素混凝土层的厚度为 0.32 m。边界条件为四周固支,上下临空,并于顶部施加均布荷载。其中,负钢筋混凝土层和正弯矩钢筋混凝土层均采用整体式模型,将钢筋弥散于整个单元当中,视单元为连续均匀材料,且认为钢筋与混凝土之间无相对滑移。素混凝土的抗剪强度,钢筋混凝土的等效抗剪强度和抗拉

强度分别按式(13)、(17)和(18)计算,并假设钢筋混凝土的等效泊松比、密度、弹性模量和抗压强度满足式(24),结果如表1所示。

$$\begin{cases} \mu = \mu_c \\ \rho = (1 - v_s)\rho_c + v_s\rho_s \\ E = (1 - v_s)E_c + v_sE_s \\ f_c = (1 - v_s)f_{cc} + v_sf_{cs} \end{cases} \quad (24)$$

表1 强度折减法初始模型参数

Tab.1 Initial model parameters for strength reduction method

模型名称	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	E/GPa	G/GPa	μ	c/MPa	$\tan \varphi$	f_c/MPa	f_t/MPa	$v_s/\%$
正弯矩钢筋混凝土	2 892	39	—	0.2	2.85	1.84	28.59	15.56	1.00
负弯矩钢筋混凝土	6 538	44	—	0.2	3.18	2.06	35.98	23.33	1.50
素混凝土	2 600	30	12.0	0.2	2.19	1.42	13.80	1.39	—
钢筋	7 850	200	76.9	0.3	—	—	280.00	280.00	—

由式(19)和(21)可知,只需分别求得抗剪强度折减系数 w_s 和抗拉强度折减系数 w_t 即可求得极限平衡状态下的强度参数,进而根据式(20)和(21)找到配筋率的解答。此处详细介绍负弯矩钢筋混凝土抗拉性能的计算过程,并简要介绍抗剪性能的计算思路。

采用二分法求解折减系数,以缩短求解时间。根据表1中钢筋混凝土强度参数和素混凝土强度参数之间的比例关系,分别将折减系数 w_t 求解范围的下限值 w_{t1} 定义为1(不进行折减),上限值 w_{t2} 定义为17(负弯矩钢筋混凝土的抗拉强度水平降低至素混凝土的水平),将求解精度 k_s 定义为0.1。根据二分法计算原理,定义初始折减系数 w_{t0} 为求解范围的均值,即 $(1+17)/2=9$ 。将 w_{t0} 代入式(24),得到折减后的抗拉强度 f'_t ,并按式(22)计算折减后的配筋率 v'_s 。将 v'_s 代入式(24),得到折减后的材料参数。

按此材料参数进行计算负弯矩钢筋混凝土的最大拉应力 $\sigma_{t,\max}$ 和素混凝土的最大拉应力 $\sigma_{tc,\max}$ (遍历所有节点的 σ_3 主应力即可得到)。若满足抗拉性能要求($\sigma_{t,\max} < f'_t$ 且 $\sigma_{tc,\max} < f'_c$),表明在当前折减系数 w_t 的条件下,配筋板将处于平衡状态,故将求解范围的下限值 w_{t1} 提高至9,并更新折减系数 w_t 为 $(9+17)/2=13$,从而加强对材料参数的折减;若不满足抗拉性能要求($\sigma_{t,\max} \geq f'_t$ 或 $\sigma_{tc,\max} \geq f'_c$),则将求解范围的上限值 w_{t2} 缩小至10.5,并更新折减系数 w_t 为 $(1+9)/2=5$ 。若此反复计算,直至求解范围的下限值 w_{t1} 和上限值 w_{t2} 逼近一个稳定的数值,即 $(w_{t2}-w_{t1}) < k_s$ 。

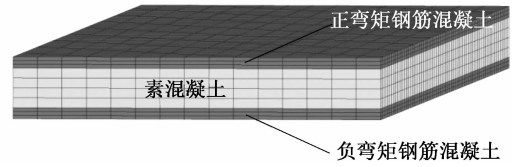


图5 数值模型

Fig.5 Numerical model

在进行抗剪强度折减时,与上述步骤基本相同。但摩尔库伦剪切破坏准则与正应力挂钩,判别过程较复杂,故提出一种容易在数值模拟中实现的判别方法。如图6所示,采用莫尔圆表示任一受力状态,其第一主应力为 σ_1 ,第三主应力为 σ_3 。根据图中的几何关系,定义莫尔圆的半径为潜在破裂面的剪应力 τ_r ,定义圆心到抗剪强度包络线的距离为潜在破裂面的抗剪强度 τ_l ,并定义为 $RATIO = \tau_l/\tau_r$ 为抗剪比例,若 $RATIO \leq 1$ 则发生剪切破坏,反之则仍具备抗剪潜力:

$$\begin{cases} \tau_r = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) \\ \tau_l = c \cos \varphi + 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi \\ RATIO = \tau_l/\tau_r \end{cases} \quad (25)$$

根据式(25),计算负弯矩钢筋混凝土的最大抗剪比例 $RATIO_{\max}$ 和素混凝土的最大抗剪比例 $RATIO_{c,\max}$ 。若满足抗剪性能要求($RATIO_{\max} > 1$ 且 $RATIO_{c,\max} > 1$),则应增大折减系数;若不满足抗剪性能要求($RATIO_{\max} \leq 1$ 或 $RATIO_{c,\max} \leq 1$),则应减小折减系数,直至折减系数趋于稳定。

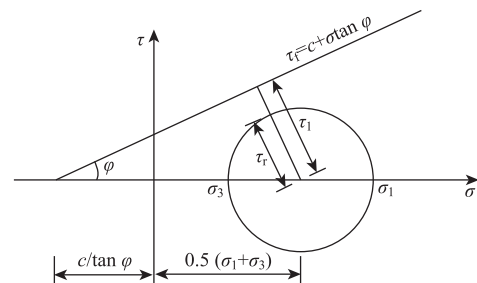


图6 抗剪比例计算图示

Fig.6 Illustration of shear ratio calculation

按上述方法, 通过反复迭代最终求解得到极限平衡状态下正弯矩钢筋混凝土、负弯矩钢筋混凝土的折减系数及强度参数, 并依据式 (20) 和式 (22) 计算其配筋率, 计算结果如表 2 所示。表 2 中 v_s 表示正弯矩钢筋混凝土、负弯矩钢筋混凝土的总配筋率 ($0.35\% + 0.43\% = 0.78\%$)。由表 2 可知, 满足钢筋混凝土抗剪稳定性和抗拉稳定性所需的配筋率有所不同, 且满足抗拉稳定性所需的配筋率更大。

表 2 强度折减法计算结果

Tab. 2 Calculation result of strength reduction method						
模型	c'/MPa	$\tan \varphi'$	f_t'/MPa	$v_{s1}/\%$	$v_{s2}/\%$	$v_s/\%$
正弯矩钢筋混凝土	1.28	0.56	4.59	0.32	0.35	0.78
负弯矩钢筋混凝土	1.32	0.57	5.68	0.39	0.43	

由此可见, 使用强度折减法计算得到的配筋率 (0.78%) 略小于使用塑性铰线理论的计算结果 ($0.83\% \sim 0.95\%$)。

3.3 两种计算方法的比较

若定义塑性铰线函数 $\psi = l_y^2 (3 - 1/\lambda^2) / (24zhf_y)$, 则式 (11) 可简化为 $v_s = q\psi$, 即将配筋率 v_s 表示为荷载 q 与塑性铰线函数 ψ 的乘积。其中, 塑性铰线函数 ψ 主要与板的长宽、厚度、有效截面高度、钢筋强度等参数有关。

取均布荷载的变化范围为 $300 \sim 700 \text{ kN/m}^2$, 分

别按强度折减法和塑性铰线理论进行计算, 结果如图 7 所示。两种方法的计算结果均表明, 配筋率与荷载大小呈线性关系, 故可将强度折减法的结果近似拟合为 $v_s = q\psi'$ 。强度折减法的配筋率计算结果 v_s 略小于按塑性铰线的极限平衡理论求得的上限解, 同时回归得到的斜率 ψ' 略大于塑性铰线函数 ψ , 但总体差异不大, 这表明强度折减法的计算结果较为合理。由于塑性铰线函数 ψ 是在塑性铰线假设的基础上经由虚功方程计算得到的, 因此, 二者的差异很可能与塑性铰线假设有关, 如图 8 所示。

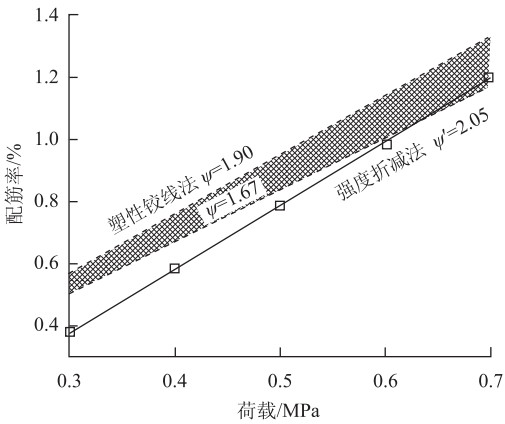


图 7 两种计算方法的比较
Fig. 7 Comparison of 2 calculation methods

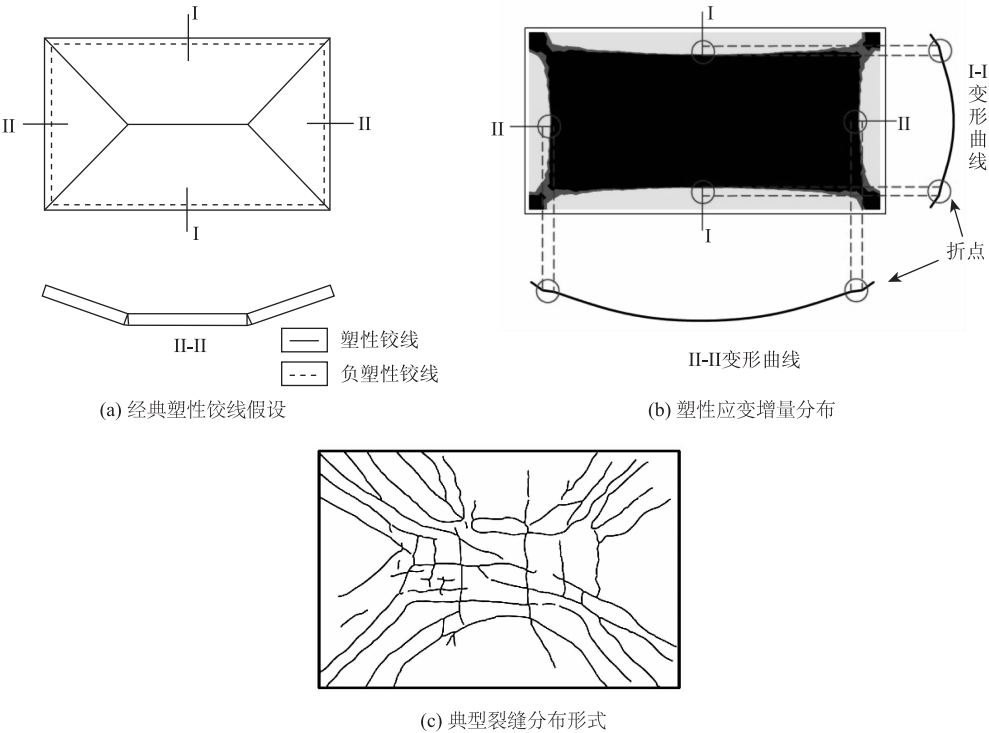


图 8 塑性应变增量分布图与塑性铰线假设的对比
Fig. 8 Comparison of plastic strain increment distribution diagram and plastic hinge line hypothesis

图8表明,塑性应变增量分布图与典型裂缝分布形式^[21]、塑性铰线的形状较为吻合。选取I-I截面和II-II截面绘制相应的变形曲线,发现变形曲线的折点与塑性应变增量的分布较为吻合。这进一步表明,使用塑性应变增量分布图可以有效描述塑性铰线的形状。由此可见,塑性铰线假设将较宽的破损带(图8(b)中的塑性应变增量分布带和图8(c)中的裂缝带)简化为直线(图8(a)中的塑性铰线),可以简化钢筋混凝土板的分析。

4 结论

(1) 方板和矩形板之间的塑性铰线存在明显差异;单向板的塑性铰线较之双向板更为狭长,短跨弯矩 m_y 远大于长跨弯矩 m_x ,受力方式更接近于梁;支撑条件对塑性铰线的影响较大,固支边、简支边、自由边的存在均会显著影响塑性铰线的形状。

(2) 根据塑性铰线理论,可将配筋率 v_s 表示为荷载 q 与塑性铰线函数 ψ 的乘积;强度折减法的计算结果亦可近似拟合为荷载 q 与拟合斜率 ψ' 的乘积。强度折减法的计算结果略小于塑性铰线理论,同时 ψ' 虽略大于 ψ ,但总体差异不大。

(3) 使用强度折减法计算得到的配筋率(0.78%)略小于使用塑性铰线理论的计算结果(0.83%~0.95%)。二者的差异主要是因为塑性铰线理论所做出的塑性铰线假设将较宽的破损带简化为直线。

参考文献:

References:

- [1] 张大山,董毓利,房圆圆.考虑受拉薄膜效应的板块平衡法修正及在混凝土双向板中的应用[J].工程力学,2017,34(3):204-210,240.
ZHANG Da-shan, DONG Yu-li, FANG Yuan-yuan. Modification of Segment Equilibrium Method through Considering Tensile Membrane Effects and Its Application in Two-way Concrete Slabs [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34 (3): 204-210, 240.
- [2] 张大山,董毓利,吴亚平.混凝土单向板的受拉薄膜效应计算[J].吉林大学学报:工学版,2013,43(5):1253-1257.
ZHANG Da-shan, DONG Yu-li, WU Ya-ping. Calculation of Tensile Membrane Effect of One-way Concrete Slabs [J]. Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition, 2013, 43 (5): 1253-1257.
- [3] 王勇,董毓利,邹超英.钢筋混凝土板极限承载力对比分析[J].哈尔滨工业大学学报,2013,45(8):1-7.
WANG Yong, DONG Yu-li, ZOU Chao-ying. Comparative Analysis of Limit Carrying Capacity of Reinforced Concrete Slabs [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2013, 45 (8): 1-7.
- [4] 蒋秀根,剧锦三,庄金钊.矩形钢筋混凝土双向板板底塑性弯矩比设计取值研究[J].工程力学,2007,24(8):77-80.
JIANG Xiu-gen, JU Jin-san, ZHUANG Jin-zhao. Study on Design Value of Plastic Bending Moment Ratio at the Bottom of Rectangular Reinforced Concrete Slabs [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24 (8): 77-80.
- [5] 李贵乾,唐光武,郑罡.圆形钢筋混凝土桥墩等效塑性铰长度[J].土木工程学报,2016,49(2):87-97.
LI Gui-qian, TANG Guang-wu, ZHENG Gang. Equivalent Plastic Hinge Length of Circular Reinforced Concrete Bridge Columns [J]. China Civil Engineering Journal, 2016, 49 (2): 87-97.
- [6] 沈聚敏.钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M].北京:清华大学出版社,1993.
SHEN Ju-min. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete and Limit Analysis of Plate and Shell [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993.
- [7] 刘正保,胡晓楠.矩形板配筋的优化设计[J].中州建筑,1996(3):29-31.
LIU Zheng-bao, HU Xiao-nan. Optimum Design of Reinforced Concrete Rectangular Plate Reinforcement [J]. Zhongzhou Architecture, 1996 (3): 29-31.
- [8] 赵纪飞,叶建龙,王骁帆,等.连续配筋混凝土路面横向裂缝传荷作用的数值模拟和敏感性分析[J].公路交通科技,2018,35(6):1-7.
ZHAO Ji-fei, YE Jian-long, WANG Xiao-fan, et al. Numerical Simulation and Sensitivity Analysis on Load Transfer of Transverse Crack in Continuously Reinforced Concrete Pavement [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2018, 35 (6): 1-7.
- [9] 王骁帆,应正兵,刘朝晖,等.温度场对连续配筋混凝土路面纵向配筋的影响[J].公路交通科技,2017,34(4):16-24.
WANG Xiao-fan, YING Zheng-bing, LIU Zhao-hui, et al. Effect of Temperature Field on Longitudinal Reinforcement of Continuously Reinforced Concrete Pavement [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2017, 34 (4): 16-24.
- [10] SYROKA E, BOBIŃSKI J, TEJCHMAN J. FE Analysis of Reinforced Concrete Corbels with Enhanced Continuum Models [J]. Finite Elements in Analysis & Design,

- 2011, 47 (9): 1066 – 1078.
- [11] STRAMANDINOLI R S B, ROVERE H L L. FE Model for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Beams Considering Shear Deformation [J]. Engineering Structures, 2012, 35: 244 – 253.
- [12] MOHAMED O A, KHATTAB R. Numerical Analysis of Reinforced Concrete Beam Strengthened with CFRP or GFRP Laminates [J]. Key Engineering Materials, 2016, 707: 51 – 59.
- [13] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23 (19): 3381 – 3388.
- ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi. Application of Strength Reduction FEM in Soil and Rock Slope [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23 (19): 3381 – 3388.
- [14] 赵尚毅, 郑颖人, 时卫民, 等. 用有限元强度折减法求边坡稳定安全系数 [J]. 岩土工程学报, 2002, 24 (3): 343 – 346.
- ZHAO Shang-yi, ZHENG Ying-ren, SHI Wei-min, et al. Analysis on Safety Factor of Slope by Strength Reduction FEM [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24 (3): 343 – 346.
- [15] 路德春, 曹胜涛, 杜修力, 等. 平面应变条件下的土拱效应 [J]. 岩土工程学报, 2011, 33 (增1): 461 – 465.
- LU De-chun, CAO Sheng-tao, DU Xiu-li, et al. Soil Arching Effect under Plane Strain Condition [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33 (S1): 461 – 465.
- [16] 汪洋, 曾雄辉, 尹健民, 等. 考虑卸荷效应的深埋隧洞围岩分区破坏数值模拟 [J]. 岩土力学, 2012, 33 (4): 1233 – 1239.
- WANG Yang, ZENG Xiong-hui, YIN Jian-min, et al. Numerical Simulation of Zonal Cracking of Deep Tunnel Surrounding Rock Considering Unloading Effect [J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, 33 (4): 1233 – 1239.
- [17] 付占明, 栗增欣. 混凝土楼板受弯承载力的简化计算 [J]. 工程建设, 2012, 44 (6): 14 – 16.
- FU Zhan-ming, LI Zeng-xin. Simplified Calculation on the Capacity of Concrete Bending Slabs [J]. Engineering Construction, 2012, 44 (6): 14 – 16.
- [18] 李秀地, 郑颖人, 袁勇, 等. 沉管海底隧道强度折减法分析探讨 [J]. 岩土工程学报, 2013, 35 (10): 1876 – 1882.
- LI Xiu-di, ZHENG Ying-ren, YUAN Yong, et al. Strength Reduction Method for Submarine Immersed Tunnels [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35 (10): 1876 – 1882.
- [19] ZIENKIEWICZ O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and Non-associated Visco-plasticity and Plasticity in Soil Mechanics [J]. Géotechnique, 1977, 25 (4): 671 – 689.
- [20] 刘之葵. 桂林岩溶区岩土工程理论与实践 [M]. 武汉: 地质出版社, 2009.
- LIU Zhi-kui. Theory and Practice of Geotechnical Engineering in Guilin Karst Area [M]. Wuhan: Geological Publishing House, 2009.
- [21] 戴自强, 赵彤, 谢剑. 钢筋混凝土房屋结构 [M]. 天津: 天津大学出版社, 2002.
- DAI Zi-qiang, ZHAO Tong, XIE Jian. Reinforced Concrete Housing Structure [M]. Tianjin: Tianjin University Press, 2002.

(上接第 18 页)

- [13] YOU Z P, ADHIKARI S, DAI Q L. Three-dimensional Discrete Element Models for Asphalt Mixtures [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2008, 134 (12): 1053 – 1062.
- [14] 裴建中. 沥青路面细观结构特性与衰变行为 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- PEI Jian-zhong. Mesostructure Characteristics and Decaying Behavior of Asphalt Pavement [M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [15] YOU Z P. Development of a Micromechanical Modeling Approach to Predict Asphalt Mixture Stiffness Using the Discrete Element Method [D]. Urbana-Champaign, US: University of Illinois at Urbana-Champaign, 2003.
- [16] ABBAS R A. Simulation of the Micromechanical Behavior of Asphalt Mixtures Using the Discrete Element Method [D]. Pullman: Washington State University, 2004.
- [17] LIU Y, DAI Q L, YOU Z. Viscoelastic Model for Discrete Element Simulation of Asphalt Mixture [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2009, 135 (4): 324 – 333.
- [18] 冯师蓉, 胡霞光, 刘玉. 粘弹性材料的离散元数值分析 [J]. 公路交通科技, 2008, 25 (2): 12 – 15.
- FENG Shi-rong, HU Xia-guang, LIU Yu. Numerical Analysis of Viscoelastic Materials Based on Discrete Element Method [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development, 2008, 25 (2): 12 – 15.
- [19] TANG Y, ZHANG K. Analysis on the Fatigue Properties of Semi-rigid Base Asphalt Pavement Structures with Horizontal Interfacial Cracks [J]. Journal of Testing and Evaluation, 2017, 45 (6): 2020 – 2028.