三阶协变伽利略引力理论下的线性与非线性物质增长函数的计算

宋艳玲*, 胡彬

北京师范大学天文系, 北京 100875

*联系人, E-mail: phoebe12251@163.com

收稿日期: 2021-01-27; 接受日期: 2021-03-02; 网络出版日期: 2021-06-11

国家自然科学基金(编号: 11973016)资助项目

摘要 本文介绍了 Λ CDM标准宇宙学模型下的拉格朗日微扰论, 并将其扩展到三阶协变伽利略引力模型(G3)下. 利用二阶拉格朗日微扰论的方法计算了G3模型下宇宙物质密度的非线性增长模式. 研究发现在G3模型下其有效引力常数具有标度不依赖性, 并且其数值比传统的牛顿引力系数大. 特别是在晚期暗能量为主时期, 该理论下的有效引力常数是前者数值的2倍左右. 基于该特性, G3模型下的线性以及非线性物质增长函数相对 Λ CDM模型而言有较大幅度提升. 这意味着该理论下的星系成团性比标准宇宙学模型所预言的结果要高. 除此之外, 研究还发现该模型中的二阶物质密度增长函数可以对动量依赖以及时间依赖部分进行变量分离. 这使得仅需要在初始时刻对动量的角度依赖部分进行卷积计算, 而在后面演化部分仅需进行时间积分. 这一特性极大地提升了该模型的二阶增长函数的数值计算效率.

关键词 宇宙学, 引力理论, 暗能量

PACS: 98.80.-k, 95.36.+x, 98.65.Dx

1 引言

自从爱因斯坦提出广义相对论以来, 直到现在, 它已经成功地通过了很多的检验. 从实验室到太阳系, 近年引力波的探测^[1], 以及从M87拍到的黑洞图像^[2]等, 都证实了广义相对论的正确性. 由于宇宙加速膨胀的发现^[3,4], 研究者在爱因斯坦场方程里引入了宇宙学常数 Λ , 即暗能量, 形成了标准的 Λ CDM宇宙学模型. Λ CDM宇宙学模型与现有的天文观测数据拟合得很

好, 但是暗能量的本质仍然是一个悬而未决的问题. 一个自然的解释是暗能量就是真空能, 但是由量子场论所预言的真空能与天文观测所得到的宇宙学常数的值相差很多个数量级, 由此产生了精细调节问题^[5,6]. 除了在爱因斯坦引力场方程里引入宇宙学常数, 另一个想法是, 广义相对论的引力场方程在宇宙学尺度上并不正确, 它需要被修改, 即修改引力^[7,8]. 但是由于广义相对论已经通过了一系列严格的检验, 任何的修改引力模型也都必须满足非常严格的限制条件, 同时也

引用格式: 宋艳玲, 胡彬. 三阶协变伽利略引力理论下的线性与非线性物质增长函数的计算. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2021, 51: 079511
Song Y L, Hu B. The linear and nonlinear growth functions in Cubic Galileon (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2021, 51: 079511, doi: 10.1360/SSPMA-2021-0025

要能够解释宇宙的加速膨胀. 在大尺度上, 为了解释宇宙的加速膨胀, 修改引力在不引入宇宙学常数的情况下必须趋近于 Λ CDM标准宇宙学模型, 在星系这样的小尺度上, 修改引力必须恢复到广义相对论的情形. 在中间尺度上, 很可能仍然存在修改引力相对于广义相对论的偏离, 天文观测数据所带有的特定的特征, 可以帮助我们区别不同的修改引力模型. 需要指出的是: 在宇宙学研究领域内所讨论的修改引力理论, 要求该引力理论在星系这样的空间尺寸(十几或几十kpc的尺度)上, 由于屏蔽机制的作用, 第五力在该空间尺度上已经得到极大的压低, 恢复到标准的广义相对论. 因此, 这类引力理论天然地满足各种太阳系尺度上的引力检验.

通过星系的成团性来检验不同的引力理论是一个很好的方法, 由于精确宇宙学时代的到来, 我们期待未来的星系巡天项目能够提供足够精确的数据对不同的修改引力模型进行检验, 比如Euclid, DESI, LSST, WFIRST, CSST等. 因此, 需要先从理论上来预测宇宙在大的线性尺度以及更小一点的非线性尺度上的结构增长模式, 或者说它的物质密度的演化. 本文采用三阶协变伽利略引力模型, 在这个理论框架下用拉格朗日微扰论的方法来计算宇宙物质密度扰动的增长函数.

2 Λ CDM下的拉格朗日微扰论

欧拉微扰论是传统的微扰论, 在欧拉坐标系下, 将宇宙的密度扰动场一阶一阶地进行展开^[9], 即

$$\delta = \varepsilon \delta^{(1)} + \varepsilon^2 \delta^{(2)} + \dots, \quad (1)$$

其中, $\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$ 是物质密度扰动比, ρ 是宇宙中某一点的密度, $\bar{\rho}$ 是宇宙的平均密度, ε 是小量.

拉格朗日微扰论是在拉格朗日坐标系下(类似于粒子的自然坐标系), 研究粒子的轨迹.

$$\vec{x}(a, \vec{q}) = \vec{q} + \vec{\Psi}(a, \vec{q}), \quad (2)$$

$\vec{q}$ 是粒子的初始位置, 同时也是粒子的拉格朗日坐标, $\vec{\Psi}(a, \vec{q})$ 是位移场, $\vec{x}(a, \vec{q})$ 是末位置, 也即在欧拉空间的位置, a 是宇宙尺度因子. 由于质量是守恒的, 有 $\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q$, 可以得到

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = 1 + \delta = \frac{1}{J(a, \vec{q})}, \quad (3)$$

$J(a, \vec{q})$ 是雅可比矩阵 J_{ij} 的行列式:

$$J_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial \Psi^i}{\partial q^j} = \delta_{ij} + \Psi_{ij}, \quad (4)$$

这里的 Ψ_{ij} 是位移场 i 分量对拉格朗日坐标的 j 分量 q^j 求导(下同). 将位移场进行一阶一阶的展开,

$$\Psi = \varepsilon \Psi^{(1)} + \varepsilon^2 \Psi^{(2)} + \dots, \quad (5)$$

有密度场的各阶展开与位移场之间的关系^[10], 即

$$\delta^{(1)} = -\Psi_{i,i}^{(1)}, \quad (6)$$

$$\delta^{(2)} = -\Psi_{i,i}^{(2)} + \frac{1}{2} \left((\Psi_{i,i}^{(1)})^2 + \Psi_{i,j}^{(1)} \Psi_{j,i}^{(1)} \right). \quad (7)$$

在Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) 度规下, 取牛顿规范, 根据测地线方程可以得到粒子的轨迹方程:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + 2H \frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{1}{a^2} \nabla_x \Phi, \quad (8)$$

其中, H 是哈勃参数, ∇_x 代表对欧拉空间的求导, Φ 是牛顿引力势, 可以由泊松方程 $\frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta$ 得到.

将泊松方程与方程(2)代入方程(8)中, 可以得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dt^2} + 2H \frac{d}{dt} \right) \nabla_x \Psi &= -\frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \Phi \\ &= -4\pi G \bar{\rho} \delta = 4\pi G \bar{\rho} \frac{J-1}{J}. \end{aligned} \quad (9)$$

将方程(5)代入, 得到位移场的各阶展开:

$$\Psi_{i,i}^{(1)} = D_1(t) \Psi_{i,i}^{(1)}(t_{\text{ini}}, \vec{q}), \quad (10)$$

$$\Psi_{i,i}^{(2)} = D_2(t) \Psi_{i,i}^{(2)}(t_{\text{ini}}, \vec{q}). \quad (11)$$

t_{ini} 的下标ini代表这是某一初始时刻. 其中增长函数 $D_1(t)$, $D_2(t)$ 满足方程^[11]:

$$\frac{d^2 D_1(t)}{dt^2} + 2H \frac{dD_1(t)}{dt} = 4\pi G \bar{\rho} D_1(t), \quad (12)$$

$$\frac{d^2 D_2(t)}{dt^2} + 2H \frac{dD_2(t)}{dt} = 4\pi G \bar{\rho} D_2(t) - 4\pi G \bar{\rho} D_1^2(t). \quad (13)$$

3 三阶协变伽利略引力模型下的背景演化

要将拉格朗日微扰论扩展到三阶协变伽利略引力

模型下, 需要知道此种模型下的宇宙背景演化, 才能解它的增长函数的微分方程.

3.1 三阶协变伽利略引力模型

在协变伽利略引力模型下, 其作用量为^[12]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} c_2 X + \frac{c_3}{M^3} X \square \phi + \frac{c_4}{4M^6} X^2 R \right. \\ \left. - \frac{c_4}{M^6} X \left[(\square \phi)^2 - \phi^{;\mu\nu} \phi_{;\mu\nu} \right] + \frac{3c_5}{4M^9} X^2 G_{\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{c_5}{2M^9} X \left[(\square \phi)^3 - 3 \square \phi \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} + 2 \phi^{;\mu\nu} \phi_{;\mu\sigma} \phi_{;\nu}^{\sigma} \right] \right\}, \quad (14)$$

其中, M_{pl} 是普朗克质量, g 是度规的行列式, R 是里奇标量, $G_{\mu\nu}$ 是爱因斯坦张量, c_2, c_3, c_4, c_5 是无量纲的常数, $M^3 = M_{\text{pl}} H_0^2$, H_0 是现今的哈勃常数, $X = \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}$ 是关于标量场 ϕ 的动能项, 分号代表求协变导数, 并且这里遵守爱因斯坦求和约定, $\square$ 代表四维拉普拉斯算符. 值得指出的是, G3模型的张量线性扰动模式跟广义相对论的预言一致. 因此, 该理论不会受到来自引力波观测数据的限制^[13,14].

协变伽利略引力模型有不同的分支, 即

G3分支: $c_3 \neq 0, c_4, c_5 = 0$;

G4分支: $c_3, c_4 \neq 0, c_5 = 0$;

G5分支: $c_3, c_4, c_5 \neq 0$.

本文采用的是G3分支.

3.2 背景演化

将G3分支的作用量对度规取变分, 得到爱因斯坦引力场方程, 再代入FLRW度规, 即可得到Friedmann方程, 即宇宙的背景演化. 本文采用De Felice和Tsujikawa^[15]的关于标量场的跟踪解:

$$\ddot{\phi} = \xi H_0^2 / H, \quad (15)$$

其中, ϕ 表示背景阶的标量场, ξ 是无量纲的常数, H 是哈勃参数. 参考Barreira等人^[16]的研究, 取 $c_2 = -1$, 由该研究论文中的方程(22)和(23)可以得出方程(29)^[16], 即

$$c_3 = \frac{1}{6\sqrt{6\Omega_{\Lambda 0}}}, \quad \xi = \sqrt{6\Omega_{\Lambda 0}}. \quad (16)$$

利用De Felice和Tsujikawa^[15]论文里的Friedmann

方程(3)–(6)即可计算出在G3模型下宇宙的背景演化方程, 需注意, 该论文的作用量与本文有细微的不同. 也可以参考De Felice等人^[17]和Nesseris等人^[18]的论文, 不过计算过程中要保持度规号差的一致性, 本文采用的号差是 $(-, +, +, +)$, 作用量和号差与Peirone等人^[12]的研究一致. 最终得出的背景演化方程:

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4} + \sqrt{(\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{r0} a^{-4})^2 + 4\Omega_{\Lambda 0}}}{2}}, \quad (17)$$

$$\dot{H} = \frac{\frac{H_0^4}{H^2} \Omega_{\Lambda 0} - H^2 - \frac{1}{2} H_0^2 (\Omega_{m0} a^{-3} + 2\Omega_{r0} a^{-4})}{1 + \frac{H_0^4}{H^4} \Omega_{\Lambda 0}}, \quad (18)$$

其中, 字母上面的点代表对时间求导, $\Omega_{m0}, \Omega_{r0}, \Omega_{\Lambda 0}$ 分别是当今的物质组分、辐射组分和宇宙学常数组分的能量密度参数. 如图1是关于G3模型下的哈勃参数 H 与 Λ CDM模型下的比值.

Bloomfield^[19]的论文将Horndeski的作用量(方程(1)和(2)^[19])与有效场论框架下的作用量(方程(16)^[19])的系数对应起来, 其对应关系为方程(25)–(43)^[19], 因为G3是Horndeski引力的一种, 因此有效场论的作用量可以与G3的作用量对应起来. 同时参考Pogosian和Silvestri^[20]的论文里关于有效场论的泊松方程, 可以得到有效引力耦合常数的表达式:

图 1 (网络版彩图) G3模型下的哈勃参数 H 与 Λ CDM模型下的比值. 横坐标表示宇宙尺度因子 a , 纵坐标表示比值 $H_{\text{G3}}/H_{\Lambda\text{CDM}}$

Figure 1 (Color online) The ratio of Hubble parameter between G3 model and Λ CDM model. The horizontal axis represents the scale factor a , and the vertical axis represents the ratio of $H_{\text{G3}}/H_{\Lambda\text{CDM}}$.

$$4\pi G_{\text{eff}} = 4\pi G\mu = \frac{\mu}{2m_0^2} = \frac{f_1 + f_2 a^2/k^2}{f_3 + f_4 a^2/k^2}, \quad (19)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1 &= B_2 C_3 - C_1 B_3, \\ f_2 &= B_2 C_\pi, \\ f_3 &= A_1(B_3 C_2 - B_1 C_3) + A_2(B_1 C_1 - B_2 C_2) \\ &\quad + A_3(B_2 C_3 - B_3 C_1), \\ f_4 &= (A_3 B_2 - A_1 B_1) C_\pi, \\ f_5 &= B_3 C_2 - B_1 C_3, \\ f_6 &= -B_1 C_\pi, \end{aligned} \quad (20)$$

其中, A_1 至 C_π 的表达式可以参见附录A1. 这里的物理量来自有效场论的作用量^[20]. 因此将G3模型下的背景演化嵌入进去, 再通过两种作用量之间的系数对应, 可以得到G3模型下的泊松方程, 得到其有效引力常数 G_{eff} . 如图2所示, 可以看到, 尺度在亚哈勃视界以下, G_{eff}/G 只依赖于时间, 几乎不依赖于尺度 k ^[21,22]. 需要指出的是, G3模型由于属于高阶导数的引力理论, 其第五力的屏蔽机制属于Vainshtein屏蔽机制, 即通过高阶导数项的非线性相互作用来压低第五力. 其所对应的Vainshtein半径对应于星系尺寸, 该尺寸远在拉格朗日微扰论适用的空间尺度之下. 因此, 这里看不出有效牛顿系数对于空间标度的依赖.

4 G3模型下物质密度的增长函数

采用Frusciante和Pace^[23]论文里的泊松方程(17):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{a^2} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + 24\pi G a_3 X \frac{\partial^2 \delta \phi}{a^2} \quad (21)$$

和标量场方程(19):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta \phi}{a^2} + \lambda^2(a) \left[\left(\frac{\partial^2 \delta \phi}{a^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial_i \partial_j \delta \phi}{a^2} \right)^2 \right] \\ = -4\pi G \bar{\rho} \zeta(a) \delta, \end{aligned} \quad (22)$$

并将它们代入方程(9) (进一步的推导过程见附录A2, 也可参考文献[24,25]), 得到位移场的一阶项和二阶项:

$$\Psi^{(1)}(\vec{k}, a) = \frac{ik^i}{k^2} D_1(a) \delta^{(1)}(\vec{k}, a_{\text{ini}}), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{i,i}^{(2)}(\vec{k}, a) &= \int \frac{d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) \\ &\quad \times D_1^2(a) \delta^{(1)}(\vec{k}_1, a_{\text{ini}}) \delta^{(1)}(\vec{k}_2, a_{\text{ini}}), \end{aligned} \quad (24)$$

这里的狄拉克符号 $\delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)$ 要求 $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. 其中, $D_1(a)$, $\tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a)$ 分别满足方程

$$[\dot{T} - A(a)] D_1(a) = 0, \quad (25)$$

$$[\dot{T} - A(a)] \tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) = -B(a) \left[1 - \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \quad (26)$$

图 2 (网络版彩图) G3模型下的有效引力常数比 G_{eff}/G . (a) 横坐标表示宇宙尺度因子, 纵坐标表示波矢 k , k 的单位是 h/Mpc , 色彩棒表示图中各种颜色所对应的 G_{eff}/G 值. (b) 展示了 $k=1, 0.1, 0.01, 0.001 h/\text{Mpc}$ 四种波数下的有效引力常数. 可以看到, 它们重合得很好, 基本看不出有效引力常数的空间标度依赖性

Figure 2 (Color online) The effective Newtonian constant ratio for Cubic Galileon. (a) The horizontal axis represents the scale factor, and the vertical axis represents the wavenumber k , whose unit is h/Mpc , the colorbar indicates the value for different color. (b) We plot the effective Newtonian constant for four different wavenumbers, namely $k=1, 0.1, 0.01, 0.001 h/\text{Mpc}$. We can see that they coincide well with each other, and they are almost independent of the space scales.

其中,

$$D_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) = \tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) D_1^2(a), \quad (27)$$

$$\dot{T} = \frac{d^2}{dt^2} + 2H \frac{d}{dt} = a^2 H^2 \left[\frac{d^2}{da^2} + \left(\frac{H'}{H} + \frac{3}{a} \right) \frac{d}{da} \right], \quad (28)$$

$$A(a) = 4\pi G \bar{\rho} \left(1 + 24\pi G a_3 \bar{\phi}^2 \zeta(a) \right), \quad (29)$$

$$B(a) = \frac{1}{2} A(a) + 24\pi G a_3 \bar{\phi}^2 (4\pi G \bar{\rho} \zeta(a))^2 \lambda^2(a), \quad (30)$$

其中, H 上的“ $\cdot$ ”代表对 a 求导.

从方程(25)可以发现, D_1 只依赖于时间而不依赖于具体的 k 模式, 是尺度不依赖的. 这是不同于其他修改引力模型的地方, 因为在 G3 模型下, 在亚哈勃视界以内有效引力常数不依赖于尺度 k , 这里 $A(a)$ 相当于 $4\pi G_{\text{eff}} \bar{\rho}$, 而在其他的修改引力模型里, 这一部分依赖于尺度 k , 所以导致了 D_1 的尺度依赖性. 我们用四阶龙格库塔法解方程(25)的常微分方程, 初始条件设为 $D_1 = a$, $\frac{dD_1}{da} = 1$. 图3具体展示了 G3 模型下的 $D_1(a)$ 和 Λ CDM 模型下的 $D_1(a)$, 两者在比较早期基本重合, 在晚期有明显的差别, 并且 G3 模型下的 $D_1(a)$ 比 Λ CDM 模型下的大.

对于二阶的量, 关于 D_2 从方程(26)可以看出, 方程左边的 $[T - A(a)]$ 是一个纯粹时间算符, 方程右边的时间部分和尺度依赖的部分互相分离, 即 $B(a)$ 和

$$\left[1 - \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \text{ 因此假设}$$

$$\tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) = \tilde{d}_2(a) \tilde{\mathfrak{D}}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a_{\text{ini}}), \quad (31)$$

$$\text{其中, } \tilde{\mathfrak{D}}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a_{\text{ini}}) = \left[1 - \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \text{ 则 } \tilde{d}_2(a) \text{ 满足方程}$$

$$[T - A(a)] \tilde{d}_2(a) = -B(a). \quad (32)$$

由此, 二阶位移场变成

$$\begin{aligned} \Psi_{i,i}^{(2)}(\vec{k}, a) &= \tilde{d}_2(a) D_1^2(a) \times \int \frac{d^3 \vec{k}_1 d^3 \vec{k}_2}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ &\times \left[1 - \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right] \delta^{(1)}(\vec{k}_1, a_{\text{ini}}) \delta^{(1)}(\vec{k}_2, a_{\text{ini}}). \end{aligned} \quad (33)$$

定义 $D_2(a) = \tilde{d}_2(a) D_1^2(a)$, 因此计算二阶位移场只需要在初始时刻做一次卷积, 然后在每个不同的时刻解常微分方程(32)即可.

设初始条件为 $D_2 = \frac{3}{7} a^2$, $\frac{dD_2}{da} = \frac{6}{7} a$, 用四阶龙格库塔法解方程(32)的常微分方程, 画出图4, 图中 Λ CDM 模型下的 $D_2(a)$ 用来做对比, 两者在比较早期基本重合, 在晚期有明显的差别, 并且 G3 模型下的 $D_2(a)$ 比 Λ CDM 模型下的大, 这与 $D_1(a)$ 的结论相似. 图5显示

图3 (网络版彩图) (a) 增长函数 $D_1(a)$, 红实线表示 G3 模型, 蓝虚线表示 Λ CDM 模型. (b) 两种模型下 $D_1(a)$ 的比值

Figure 3 (Color online) (a) The linear growth function $D_1(a)$ for G3 model and Λ CDM model, represented by the red solid curve and the blue dashed curve, respectively. (b) The ratio of $D_1(a)$ for the two models.

图4 (网络版彩图) (a) 增长函数 $D_2(a)$, 红实线表示 G3 模型, 蓝虚线表示 Λ CDM 模型. (b) 两种模型下 $D_2(a)$ 的比值

Figure 4 (Color online) (a) The second order growth function $D_2(a)$ for G3 model and Λ CDM model, represented by the red solid curve and the blue dashed curve, respectively. (b) The ratio of $D_2(a)$ for the two models.

图 5 (网络版彩图) G3模型与 Λ CDM模型下 D_2/D_1^2 的比值. 红实线表示G3模型, 蓝虚线表示 Λ CDM模型, 黑色点虚线表示常数 $3/7$

Figure 5 (Color online) The ratio of D_2/D_1^2 for G3 model and Λ CDM model, represented by the red solid curve and the blue dashed curve, respectively. The black dotted-dashed curve represents the constant $3/7$.

了 D_2/D_1^2 的比值, 可以看到, 在比较早期大约为 $\frac{3}{7}$, 在晚期偏离 $\frac{3}{7}$.

5 结论

不同于传统的欧拉微扰论, 本文用拉格朗日微扰论的方法研究了三阶协变伽利略引力理论下的物质密度增长模式. 随着当前以及未来星系大尺度结构巡天项目的进行, 我们有希望利用星系的成团性数据来探

究暗能量的属性. 具体地, 本文计算了G3模型下的线性和非线性增长函数. 我们发现, 其都比 Λ CDM模型所预言的值要高. 并且在亚哈勃尺度以下, D_1 具有标度不依赖性. 此外, D_2 的时间部分和尺度依赖部分是可以分离的, 将它们分离之后把单纯的时间依赖部分重定义为 $D_2(a)$, 把尺度依赖部分放进二阶位移场的初始卷积里, 并且与 Λ CDM模型下的 $D_1(a)$ 进行了比较, 发现它们在早期是重合的, 只在宇宙晚期有较大偏离. 这使得我们可以方便快速地计算出G3模型下的线性和非线性增长函数, 在不同的宇宙学尺度上对星系的成团性给出快速而准确的估计. 本文也给出了G3模型下的有效引力常数 G_{eff} 的计算. 我们发现, 其同样是尺度不依赖的, 并且在宇宙晚期明显地大于1, 偏离了广义相对论的预言. 正是由于该原因, G3引力理论跟当前的如宇宙微波背景辐射、重子声学振荡、积分Sachs-Wolfe效应^[16,26,27]、弱引力透镜巡天观测^[12]等数据相符的程度要远差于 Λ CDM模型. 但是, 本文的目的并不在于研究G3理论本身的非线性成团性, 而是以G3理论为例探究利用高阶拉格朗日微扰论的方法来计算超出标准宇宙学模型的非线性物质功率谱的准确性. 正如前文所述, G3理论的二阶微扰理论具有空间和时间部分可分离的良好特性, 因此其计算简便, 适宜当作一个简单的例子来讨论. 这样会使得物理图像清晰易懂. 另外, 选择该理论的另一个理由是文献中存在关于该理论的 N 体模拟仿真, 因此可以进行与我们研究结果的定量比较. 但是, 由于这部分超出本文的范畴, 我们在未来会进行研究.

参考文献

- Abbott B P, Abbott R, Abbott T D, et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys Rev Lett*, 2016, 116: 061102, arXiv: 1602.03837
- Akiyama K, Alberdi A, Alef W, et al. First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole. *Astrophys J*, 2019, 875: L1, arXiv: 1906.11238
- Riess A G, Filippenko A V, Challis P, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astrophys J*, 1998, 116: 1009–1038
- Perlmutter S, Aldering G, Goldhaber G, et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophys J*, 1999, 517: 565–586, arXiv: astro-ph/9812133
- Weinberg S. The cosmological constant problem. *Rev Mod Phys*, 1989, 61: 1–23
- Martin J. Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask). *C R Phys*, 2012, 13: 566–665, arXiv: 1205.3365
- Bull P, Akrami Y, Adamek J, et al. Beyond Λ CDM: Problems, solutions, and the road ahead. *Phys Dark Universe*, 2016, 12: 56–99, arXiv:

1512.05356

- 8 Ishak M. Testing general relativity in cosmology. *Living Rev Relativ*, 2019, 22: 1–204
- 9 Bernardeau F, Colombi S, Gaztañaga E, et al. Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory. *Phys Rep*, 2002, 367: 1–248
- 10 Chandrachani Devi N, Jaber-Bravo M, Aguilar-Argüello G, et al. Non-linear structure formation for dark energy models with a steep equation of state. *J Cosmol Astropart Phys*, 2020, 9: 050
- 11 Moretti C, Mozzon S, Monaco P, et al. Fast numerical method to generate halo catalogues in modified gravity (part I): Second-order Lagrangian perturbation theory. *Mon Not Roy Astron Soc*, 2020, 493: 1153–1164, arXiv: 1909.06282
- 12 Peirone S, Frusciante N, Hu B, et al. Do current cosmological observations rule out all Covariant Galileons? *Phys Rev D*, 2018, 97: 063518
- 13 Creminelli P, Vernizzi F. Dark energy after GW170817 and GRB170817A. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 251302, arXiv: 1710.05877
- 14 Ezquiaga J M, Zumalacárregui M. Dark energy after GW170817: Dead ends and the road ahead. *Phys Rev Lett*, 2017, 119: 251304, arXiv: 1710.05901
- 15 De Felice A, Tsujikawa S. Cosmology of a covariant Galileon field. *Phys Rev Lett*, 2010, 105: 111301, arXiv: 1007.2700
- 16 Barreira A, Li B, Baugh C M, et al. The observational status of Galileon gravity after Planck. *J Cosmol Astropart Phys*, 2014, 2014: 059, arXiv: 1406.0485
- 17 de Felice A, Kase R, Tsujikawa S. Matter perturbations in Galileon cosmology. *Phys Rev D*, 2011, 83: 043515, arXiv: 1011.6132
- 18 Nesseris S, de Felice A, Tsujikawa S. Observational constraints on Galileon cosmology. *Phys Rev D*, 2010, 82: 124054, arXiv: 1010.0407
- 19 Bloomfield J. A simplified approach to general scalar-tensor theories. *J Cosmol Astropart Phys*, 2013, 12: 044
- 20 Pogosian L, Silvestri A. What can cosmology tell us about gravity? Constraining Horndeski gravity with Σ and μ . *Phys Rev D*, 2016, 94: 104014, arXiv: 1606.05339
- 21 Appleby S, Linder E V. The paths of gravity in Galileon cosmology. *J Cosmol Astropart Phys*, 2012, 2012: 043, arXiv: 1112.1981
- 22 Neveu J, Ruhlmann-Kleider V, Conley A, et al. Experimental constraints on the uncoupled Galileon model from SNLS3 data and other cosmological probes. *Astron Astrophys*, 2013, 555: A53, arXiv: 1302.2786
- 23 Frusciante N, Pace F. Growth of non-linear structures and spherical collapse in the Galileon Ghost Condensate model. *Phys Dark Universe*, 2020, 30: 100686, arXiv: 2004.11881
- 24 Aviles A, Cervantes-Cota J L. Lagrangian perturbation theory for modified gravity. *Phys Rev D*, 2017, 96: 123526, arXiv: 1705.10719
- 25 Koyama K, Taruya A, Hiramatsu T. Nonlinear evolution of the matter power spectrum in modified theories of gravity. *Phys Rev D*, 2009, 79: 123512, arXiv: 0902.0618
- 26 Barreira A, Li B, Baugh C M, et al. Spherical collapse in Galileon gravity: Fifth force solutions, halo mass function and halo bias. *J Cosmol Astropart Phys*, 2013, 2013: 056, arXiv: 1308.3699
- 27 Renk J, Zumalacárregui M, Montanari F, et al. Galileon gravity in light of ISW, CMB, BAO and H_0 data. *J Cosmol Astropart Phys*, 2017, 2017: 020, arXiv: 1707.02263

附录A1

将式(20)中的各项系数列在这里. 这些量的原始推导参见文献[20]

$$A_1 = 2m_0^2 \Omega + 4\dot{M}^2,$$

$$A_2 = -m_0^2 \Omega - \bar{M}_1^3 + 2H\bar{M}_3^2 + 4H\dot{M}^2,$$

$$A_3 = -8m_2^2,$$

$$B_1 = -1 - \frac{2\dot{M}^2}{m_0^2 \Omega},$$

$$B_2 = 1,$$

$$B_3 = -\frac{\Omega}{\dot{\Omega}} + \frac{\bar{M}_3^2}{m_0^2 \Omega} \left(H + \frac{2\dot{\bar{M}}_3}{\bar{M}_3} \right),$$

$$C_1 = m_0^2 \Omega + 2H\dot{M}^2 + 4\dot{M}\dot{M}, \quad (a1)$$

$$C_2 = -\frac{m_0^2}{2} \Omega - \frac{1}{2} \bar{M}_1^3 - \frac{3}{2} H\bar{M}_2^2 - \frac{1}{2} H\bar{M}_3^2 + 2H\dot{M}^2,$$

$$C_3 = c - \frac{1}{2} (H + \partial_i) \bar{M}_1^3 + \left(\frac{k^2}{2a^2} - 3\dot{H} \right) \bar{M}_2^2 + \left(\frac{k^2}{2a^2} - \dot{H} \right) \bar{M}_3^2 + 2(H^2 + \dot{H} + H\partial_i) \dot{M}^2,$$

$$C_\pi = \frac{m_0^2}{4} \Omega \dot{R}^{(0)} - 3c\dot{H} + \frac{3}{2}(3H\dot{H} + \dot{H}\partial_i + \ddot{H})\overline{M}_1^3 \\ + \frac{9}{2}\dot{H}^2\overline{M}_2^2 + \frac{3}{2}\dot{H}^2\overline{M}_3^2.$$

附录A2

关于一阶和二阶位移场的推导, 需要三个方程, 位移场方程(文中方程(9))、泊松方程(文中方程(21))和标量场方程(文中方程(22)), 即

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2H\frac{d}{dt}\right)\nabla_x\Psi = -\frac{1}{a^2}\nabla_x^2\Phi, \quad (a2)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{a^2} = 4\pi G\overline{\rho}\delta + 24\pi G a_3 X \frac{\partial^2\delta\phi}{a^2}, \quad (a3)$$

$$\frac{\partial^2\delta\phi}{a^2} + \lambda^2(a)\left[\left(\frac{\partial^2\delta\phi}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial_i\partial_j\delta\phi}{a^2}\right)^2\right] \\ = -4\pi G\overline{\rho}\zeta(a)\delta, \quad (a4)$$

其中,

$$X = \phi_{;\mu}\phi^{;\mu} = -\vec{\phi}^2 + (\partial_i\phi)^2. \quad (a5)$$

这里用了准静态近似. 在(a2)–(a4)这三个方程里, 所有背景阶的量都有已知的解, 密度扰动 δ 可以通过文中的方程(6)和(7)用位移场表达出来, 因此只剩下三个待求的扰动量: 位移场 Ψ 、引力势 Φ 、标量扰动 $\delta\phi$, 将标量扰动 $\delta\phi$ 也进行微扰展开:

$$\delta\phi = \varepsilon(\delta\phi)^{(1)} + \varepsilon^2(\delta\phi)^{(2)} + \dots$$

将(a5)代入(a3), 并略掉 $(\partial_i\delta\phi)^2\partial^2\delta\phi$ 的三阶小量的项, 得到

$$\frac{\nabla_x^2\Phi}{a^2} = 4\pi G\overline{\rho}\delta - 24\pi G a_3 \vec{\phi}^2 \frac{\partial^2\delta\phi}{a^2}. \quad (a6)$$

将(a4)代入(a6), 得到

$$\frac{\nabla_x^2\Phi}{a^2} = 4\pi G\overline{\rho}\left(1 + 24\pi G a_3 \vec{\phi}^2 \zeta(a)\right)\delta \\ + 24\pi G a_3 \vec{\phi}^2 \lambda^2(a)\left[\left(\frac{\partial^2\delta\phi}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial_i\partial_j\delta\phi}{a^2}\right)^2\right] \\ = A(a)\delta + C(a)\left[\left(\frac{\partial^2\delta\phi}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial_i\partial_j\delta\phi}{a^2}\right)^2\right], \quad (a7)$$

其中 $A(a)$ 在文中方程(29)中已有表述,

$$C(a) = 24\pi G a_3 \vec{\phi}^2 \lambda^2(a). \quad (a8)$$

将(a7)代入(a2), 得到

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2H\frac{d}{dt}\right)\nabla_x\Psi = \nabla_x\hat{T}\Psi \\ = -A(a)\delta - C(a)\left[\left(\frac{\partial^2\delta\phi}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial_i\partial_j\delta\phi}{a^2}\right)^2\right]. \quad (a9)$$

将(a9)从欧拉坐标系转到拉格朗日坐标系, 参见文献[24], 有

$$\nabla_x\hat{T}\Psi = (J^{-1})_{ij}\hat{T}\Psi_{ij} = (\delta_{ij} - \Psi_{ij})\hat{T}\Psi_{ij} \\ = \hat{T}\Psi_{i,i} - \Psi_{ij}\hat{T}\Psi_{i,j}, \quad (a10)$$

这里及之后逗号的求导均是对于拉格朗日坐标的求导. 将(a10)代入(a9), 略掉三阶以上及三阶小量, 将 $\delta\phi$ 记作 ϕ , 得到

$$\hat{T}\Psi_{i,i} - \Psi_{ij}\hat{T}\Psi_{i,j} = -A(a)\delta - C(a)\left[\left(\frac{\phi_{,ii}}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\phi_{,ij}}{a^2}\right)^2\right]. \quad (a11)$$

将 Ψ , δ , ϕ 作微扰展开, 并利用文中的方程(6)和(7)将 δ 用 Ψ 表示出来, 利用(a4)将 ϕ 用 δ 表示出来, 将(a11)里所有的一阶展开收集起来, 得到

$$(\hat{T} - A(a))\Psi_{i,i}^{(1)} = 0. \quad (a12)$$

再将 $\Psi_{i,i}^{(1)}$ 的时间项和空间项分离, 如文中方程(10), 利用文中方程(6), 即可得到关于一阶位移场的解, 再将其变换到傅立叶空间, 即可得到文中的方程(24)和(26), 即

$$\Psi^{(1)}(\vec{k}, a) = \frac{ik^i}{k^2} D_1(a) \delta^{(1)}(\vec{k}, a_{\text{ini}}), \quad (a13)$$

$$[\hat{T} - A(a)]D_1(a) = 0. \quad (a14)$$

将(a11)里所有的二阶量收集起来, 得到

$$\hat{T}\Psi_{i,i}^{(2)} - \Psi_{ij}^{(1)}\hat{T}\Psi_{i,j}^{(1)} \\ = -A(a)\delta^{(2)} - C(a)\left[\left(\frac{\phi_{,ii}^{(1)}}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\phi_{,ij}^{(1)}}{a^2}\right)^2\right], \quad (a15)$$

用 Ψ 将 $\delta^{(2)}$ 和 $\phi^{(1)}$ 表示出来, 再转换到傅立叶空间, 得到

$$[\hat{T} - A(a)]\Psi_{i,i}^{(2)}(\vec{k}, a) \\ = -B(a) \int \frac{d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ \times \left[1 - \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2}\right] D_1^2(a) \delta^{(1)}(\vec{k}_1, a_{\text{ini}}) \delta^{(1)}(\vec{k}_2, a_{\text{ini}}). \quad (a16)$$

若记作

$$\begin{aligned} \psi_{i,i}^{(2)}(\vec{k}, a) = & \int \frac{d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3} \delta(\vec{k} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2) \tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) \\ & \times D_1^2(a) \delta^{(1)}(\vec{k}_1, a_{\text{ini}}) \delta^{(1)}(\vec{k}_2, a_{\text{ini}}), \end{aligned} \quad (\text{a17})$$

则 $\tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a)$ 满足

$$[T - A(a)] \tilde{D}_2(\vec{k}_1, \vec{k}_2, a) = -B(a) \left[1 - \frac{(\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2}{k_1^2 k_2^2} \right], \quad (\text{a18})$$

即文中方程(24)和(26). $B(a)$ 的表达式见文中方程(30).

The linear and nonlinear growth functions in Cubic Galileon

SONG YanLing^{*} & HU Bin

Department of Astronomy, Beijing Normal University, Beijing 100875, China

We introduce the Lagrangian perturbation theory under Λ CDM model, and extend it to the Cubic Galileon (G3) model. We present the second order growth function in G3 model based on the Lagrangian perturbation theory. We find that the effective Newtonian constant in G3 model is almost scale independent. Its value is bigger than that of the Λ CDM model. In the late time dark energy dominated epoch, its value is enhanced by a factor about 2. Based on this, the linear and nonlinear growth functions in the structure formation for G3 model are larger than that of the Λ CDM model. It means G3 model has stronger galaxy clustering effect than Λ CDM model. Besides of this, we find the second order growth function can be separated into spatial and temporal dependent parts. Hence, one only needs to convolve different momentum configurations at the initial stage. This will significantly accelerate the numerical calculation.

cosmology, gravity, dark energy

PACS: 98.80.-k, 95.36.+x, 98.65.Dx

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0025](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0025)