中国科学: 数学 2020 年 第 50 卷 第 12 期: 1923～1938
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

Banach 空间的线性嵌入理论及算子分解

献给吴从炘教授 85 华诞

郑本拓
Department of Mathematical Sciences, University of Memphis, Memphis, TN 38152, USA
E-mail: bzheng@memphis.edu

收稿日期: 2020-05-19; 接受日期: 2020-07-11; 网络出版日期: 2020-12-11
Simons 基金会 (批准号: 585081) 资助项目

摘要 线性嵌入理论是 Banach 空间几何学研究的核心领域之一, 而算子分解理论是同胚理论的一个自然扩展和延伸. 本文首先详细介绍关于线性同胚理论的主要结果, 然后阐述该领域近期取得的一些重要进展, 之后对算子分解的相关定理进行讨论, 最后提出一些本领域尚未解决的遗留问题.

关键词 线性嵌入 线性同胚 算子分解 Schauder 基 无条件基

MSC (2010) 主题分类 46B03, 46B20

1 引言

线性嵌入在 Banach 空间几何理论诞生之时就是最基本和最重要的概念之一. 如果 Banach 空间 X 和 Banach 空间 Y 的某个子空间线性同胚, 那么称 Banach 空间 X 线性嵌入到 Banach 空间 Y. 如果一个线性嵌入是等距的, 那么称其为线性等距嵌入. 因为两个线性同胚的 Banach 空间具有非常相似的几何结构性质, 所以线性嵌入理论就自然成为 Banach 空间理论最经典、最核心的研究方向之一. 线性嵌入理论的第一个最具标志性的成果在 20 世纪 30 年代由 Banach 和 Mazur 共同完成.

定理 1.1 (Banach-Mazur 定理) 任意一个可分的 Banach 空间都可以线性嵌入到 $C[0,1]$ 空间, 其中 $C[0,1]$ 是 $[0,1]$ 区间上的连续函数空间.

事实上, 他们证明了一个更强的结论: 任意一个可分的 Banach 空间都与 $C[0,1]$ 空间的一个子空间线性等距. 通过选取对偶空间的单位球作为指标集 Γ, 我们不难证明下面的定理.

定理 1.2 任意一个 Banach 空间都可以线性等距嵌入到 $\ell_\infty(\Gamma)$.

与线性嵌入理论密切相关的另一个概念是 Banach 空间的 Schauder 基. Banach 空间 X 中的一列向量 (e_i) 被称为 Schauder 基当且仅当空间 X 中的任一元素 x 都能够被唯一地表示为 $x=\sum a_ie_i$, 其中序列 $(a_i)\subset\mathbb{R}$. $C[0,1]$ 空间具有 Schauder 基, 因此, Banach-Mazur 定理告诉我们, 任意一个可分的 Banach 空间都可以线性嵌入到某个具有 Schauder 基的 Banach 空间. 当然, 这里有一个基本的问题: 是否每一个可分的 Banach 空间本身就具有 Schauder 基? 这个问题在 1973 年被 Enflo[1] 解决.

英文引用格式: Zheng B T. Linear embedding and factorizations of operators on Banach spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1923–1938, doi: 10.1360/SSM-2020-0152

© 2020《中国科学》杂志社

定理 1.3 [1] 存在不具有 Schauder 基 (不具有逼近性质) 的可分 Banach 空间.

收缩基和有界完备基是两类特殊的 Schauder 基. Banach 空间 X 中的一组 Schauder 基 (e_i) 是收缩的当且仅当其对偶泛函列 (e_i^*) 构成 X^* 的一组 Schauder 基. (e_i) 被称为有界完备基当且仅当 (e_i^*) 构成其线性闭包的一组收缩基. 对这两类基重要性的最好诠释就是著名的 James [2] 定理.

定理 1.4 [2] 一个自反空间的任意 Schauder 基 (如果具有) 都是收缩和有界完备的.

1974 年, Davis 等 [3] 证明了如下定理.

定理 1.5 [3] 任意一个可分对偶空间都可以线性嵌入到某个具有有界完备基的 Banach 空间.

1988 年, Zippin [4] 证明了上述定理的对偶定理.

定理 1.6 [4] 如果一个 Banach 空间 X 的对偶空间 X^* 是可分的, 那么 X 可以线性嵌入到某个具有收缩基的 Banach 空间.

在文献 [4] 中, Zippin 进一步证明了任意一个可分自反空间都可以线性嵌入到某个具有 Schauder 基的自反空间. 另一类性质非常特殊的 Schauder 基是无条件基. 一组 Schauder 基 (e_i) 被称为无条件基当且仅当存在 $C \geqslant 1$ 使得对于所有的自然数 n、符号序列 $(\delta_i)_{i=1}^n \in \{-1,1\}^n$ 以及所有的实数列 $(a_i)_{i=1}^n$, 有

$$C^{-1}\Big\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^n \delta_ia_ie_i\Big\| \leqslant C\Big\|\sum_{i=1}^n a_ie_i\Big\|.$$

经典的序列空间 ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ 以及 c_0 的标准单位基就是无条件基. 经典的函数空间 L_p $(1 < p < \infty)$ 的 Haar 基也是无条件基. 但是 L_1 空间不具有无条件基. 非无条件的 Schauder 基被称为条件 Schauder 基. 具有无条件基的 Banach 空间不仅拥有非常丰富的结构, 而且这类空间上也有着大量的非平凡投影算子. James [2] 在 1950 年给出了具有无条件基的 Banach 空间自反性的一个刻画.

定理 1.7 [2] 假定 Banach 空间 X 具有无条件基. 如果 c_0 和 ℓ_1 不能线性嵌入到 X, 那么 X 是自反的.

假定 $\mathcal{A}$ 是一族 Banach 空间构成的集合. 如果 $\mathcal{A}$ 中的任意元素都能够线性嵌入到 Banach 空间 Y, 那么称 Y 为 $\mathcal{A}$ 的万有空间. 前面提到的 Banach-Mazur 定理告诉我们 $C[0,1]$ 是所有可分 Banach 空间的万有空间. 那么对于所有的可分自反空间, 是否存在一个可分自反的万有空间? Szlenk [5] 在 1968 年对这个问题给出了否定的答案.

定理 1.8 [5] 任意可分自反空间都不是全体可分自反空间的万有空间.

Szlenk 在证明中引入了著名的 Szlenk 指标. 1980 年, Bourgain [6] 证明了一个更强的结论.

定理 1.9 [6] 如果一个 Banach 空间 Y 是全体可分自反空间的万有空间, 那么 $C[0,1]$ 线性嵌入到 Y.

如果任意在 Banach 空间 X 中能够有限表示的空间都是自反的, 那么称 X 是一个超自反空间. 是否存在一个可分自反空间是全体可分超自反空间的万有空间? 2006 年, Odell 和 Schlumprecht [7] 对这个问题给出了肯定的回答.

定理 1.10 [7] 存在一个可分自反空间 Y 是全体可分超自反空间的万有空间.

在很长一段时间里, 泛函分析学家们所知道的无穷维 Banach 空间都包含某个与 ℓ_p 或者 c_0 线性同胚的子空间. 对于任意的无穷维 Banach 空间 X, 是否一定存在某个 ℓ_p 或者 c_0 线性嵌入到 X? 这个问题在 1974 年被 Tsirel'son [8] 解决.

定理 1.11 [8] 存在一个无穷维 Banach 空间使得任意 ℓ_p 或者 c_0 都不能线性嵌入.

这个空间是自反的并且具有无条件基. 1974 年, Figiel 和 Johnson[9] 构造出一个无穷维的一致凸 Banach 空间使得任意 ℓ_p 都不能线性嵌入. 在该文献里, Figiel 和 Johnson 用 T 来标记 Tsirelson 空间的对偶空间, 而原来的 Tsirelson 空间被记为 T^*. 因为 Figiel 和 Johnson 的构造方法更直观和方便, 所以现在大家通常使用的 T 实际上是 Tsirelson 空间的对偶空间. Tsirelson 空间构造方法给泛函分析学家们提供了一个非常强大的工具, 其中一个非常重要的延伸就是 Banach 空间 "任意扭曲" 问题的解决.

假定无穷维 Banach 空间 X 具有范数 $\|\cdot\|$, 如果存在 X 上的一个等价范数 $|\cdot|$ 及 $\lambda>1$, 满足对于 X 的任意无穷维子空间 Y,

$$\sup\left\{\frac{|y_1|}{|y_2|}: y_1, y_2 \in Y, \|y_1\|=\|y_2\|=1\right\} \geqslant \lambda,$$

那么称 X 是 λ- 可扭曲的. James[10] 证明了 c_0 和 ℓ_1 是不可扭曲的. Mil'man[11] 证明了, 如果 c_0 和 ℓ_p $(1 \leqslant p<\infty)$ 不能线性嵌入到 Banach 空间 X, 那么存在一个可扭曲的 Banach 空间线性嵌入到 X. 所以 Tsirelson 空间的性质告诉我们, 它包含一个可扭曲的 Banach 空间. 从以上的结论可知关于 Banach 空间可扭曲性问题的研究主要集中在 ℓ_p $(1<p<\infty)$. 如果对于每一个 $\lambda>1$, X 都是 λ- 可扭曲的, 则 X 被称为是可任意扭曲的. 那么, 是否存在一个可任意扭曲的 Banach 空间? 1991 年, Schlumprecht[12] 运用 Tsirelson 空间构造的思想对这个问题给出了肯定的回答.

定理 1.12[12] 存在一个可任意扭曲的 Banach 空间.

在 Schlumprecht 空间的基础上, 结合非线性泛函分析的方法, Odell 和 Schlumprecht[13] 完整地解决了 Banach 空间的任意扭曲问题.

定理 1.13[13] ℓ_p $(1<p<\infty)$ 是可任意扭曲的.

20 世纪 90 年代, 菲尔兹奖得主 Gowers 和著名泛函分析学家 Maurey[14] 的工作将嵌入理论和无条件基的研究推到了一个高峰. 通过运用博弈论的手段结合 Schlumprecht 空间的构造方法, 他们成功地构造出第一个 "遗传不可分解" 空间.

定理 1.14[14] 存在一个可分自反空间 X 使得它的任意无穷维子空间都不能被分解为两个无穷维子空间的直和.

一个重要的推论就是, 任意一个具有无条件基的 Banach 空间都不能够线性嵌入到这个空间. 满足这类性质的空间结构相对 "贫瘠", 因而空间上的算子相对 "较少". 这也为第一个具有不变子空间性质的 Banach 空间的构造奠定了基础.

2 线性嵌入与弱零树

与 Gowers-Maurey 空间相对应的一个基本问题是, 什么样的 Banach 空间能够线性嵌入到具有无条件基的 Banach 空间? 这样的空间具有丰富的结构和易于处理的性质. 显然, 这类空间不能够线性嵌入到遗传不可分解空间. 2008 年, Johnson 和 Zheng[15] 在自反空间的范畴内给出了这个问题的答案. 2011 年, Johnson 和 Zheng[16] 通过对 Markuchevich 基的进一步研究, 在对偶可分空间的范畴内给出了这个问题的答案. 在陈述这个问题的具体答案之前, 我们需要先了解一下相关的概念.

给定两组 Schauder 基序列 (x_i) 和 (y_i). 如果存在常数 $C \geqslant 1$ 使得对于任意的自然数 n 以及所有的实数列 $(a_i)_{i=1}^n$, 有

$$C^{-1}\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\right\| \leqslant C\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|,$$

那么就称 (x_i) 与 (y_i) C- 等价. 假定 (e_n) 是一组 Schauder 基, (k_n) 是一列严格递增的自然数序列. 如果对于任意的自然数 n, 存在实数列 (a_i) 使得

$$x_n = \sum_{i=k_n}^{k_{n+1}-1} a_i e_i,$$

那么 (x_n) 被称为 (e_n) 的一组块状基. 如果存在常数 $0 \leqslant C \leqslant 1$ 和 $1 \leqslant p < \infty$ 使得 (e_n) 的任意单位块状基 (x_n) 满足

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \geqslant C \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \Big)^{1/p},$$

则称 (e_n) 关于常数 C 满足块状下 ℓ_p 估计. 类似地, 如果存在常数 $C \geqslant 1$ 和 $1 \leqslant p < \infty$ 使得 (e_n) 的任意单位块状基 (x_n) 满足

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \leqslant C \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \Big)^{1/p},$$

则称 (e_n) 关于常数 C 满足块状上 ℓ_p 估计.

我们知道, 如果一个 Banach 空间 X 线性嵌入到某个具有无条件基的 Banach 空间, 那么 X 中的任意标准弱零列 (在弱拓扑下收敛到 0) 都有一个无条件的子序列. 这个重要的性质一直以来都被认为是刻画可线性嵌入到具有无条件基空间的候选条件. 直到 2008 年, Johnson 和 Zheng [15] 才给出了第一个自反空间的反例.

例 2.1 [15] 记 $[\mathbb{N}]^{\leqslant n}$ 为所有势不超过 n 的自然数子集构成的集合, 记 $c_{00}([\mathbb{N}]^{\leqslant n})$ 为以 $[\mathbb{N}]^{\leqslant n}$ 为指标的具有有限支撑的序列构成的空间. $(e_A)_{A\in[\mathbb{N}]^{\leqslant n}}$ 是 $c_{00}([\mathbb{N}]^{\leqslant n})$ 的标准单位基. 选取单位序列 (h_i) 满足如下两个条件:

(i) (h_i) 是条件 Schauder 基序列;

(ii) (h_i) 关于常数 1 满足块状下 ℓ_2 估计.

这样的序列实际上不难取到, 如著名的 James 空间的有界完备基. 假设 $(\beta_k)_{k=1}^m$ 是 $[\mathbb{N}]^{\leqslant n}$ 中不相交的片段. 在这里, 片段指的是一列集合 $(A_i)_{i=1}^k \subset [\mathbb{N}]^{\leqslant n}$ 满足 $A_1 = \{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$, $A_2 = \{m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}\}, \ldots, A_k = \{m_1, m_2, \ldots, m_l, \ldots, m_{l+k-1}\}$, 其中 $m_1 < m_2 < \cdots < m_{l+k-1}$. 假定 $\sum a_A e_A$ 是 $c_{00}([\mathbb{N}]^{\leqslant n})$ 中的一个元素. 我们将 X_n 定义为 $c_{00}([\mathbb{N}]^{\leqslant n})$ 在如下范数下的完备化空间:

$$\Big\| \sum a_A e_A \Big\|_{X_n} = \sup \Big\{ \Big(\sum_{k=1}^{m} \Big(\Big\| \sum_{A_{i,k}\in\beta_k} a_{A_{i,k}} h_i \Big\| \Big)^2 \Big)^{1/2} : (\beta_k)_{k=1}^m \text{ 是不相交的片段} \Big\}.$$

令 $X = (\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_2$, 即 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ 的 ℓ_2 直和. 我们可以证明 X 中的任意标准弱零列都包含一个等价于 ℓ_2 的单位标准基的子列. ℓ_2 的单位标准基是无条件基, 所以, X 中的任意标准弱零列都包含一个无条件子列. 后面将看到, X 不能线性嵌入到具有无条件基的 Banach 空间.

需要指出的是, 我们的例子是受到 Odell 和 Schlumprecht [17] 的启发. 在文献 [17] 中, 他们发现 "弱零树" 的概念与线性嵌入紧密相关.

定义 2.1 令 $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ 为所有自然数的有限子集构成的集合. 假定 X 是一个 Banach 空间. 如果 X 单位球面的子集 $(x_A)_{A\in[\mathbb{N}]^{<\omega}} \subset S_X$ 满足对于任意的 $A \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$, $(x_{A\cup\{n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ 都是弱零列, 那么 $(x_A)_{A\in[\mathbb{N}]^{<\omega}}$ 被称为标准弱零树. 令 $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ 为严格递增的自然数列. 对于任意的自然数 n, 记 $A_n = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$, 则 $(x_{A_n})_{n=1}^{\infty}$ 被称为弱零树的一根枝条. 令 $C > 1$ 为给定常数. 称 X 具有 C-

无条件树性质, 如果 X 中的任意标准弱零列树都拥有一根枝条构成一组关于常数 C 的无条件基序列. X 被称为具有无条件树性质当且仅当存在 $C>1$ 使得 X 具有 C- 无条件树性质.

Kalton [18] 在 2001 年证明了如下定理:

定理 2.1 [18] 假定 X 是一个 Banach 空间, 其对偶空间 X^* 是可分的. 如果 X 中的任意标准弱零树都有一根枝条与 c_0 的标准单位基等价, 那么 X 线性嵌入到 c_0.

Odell 和 Schlumprecht [17] 在 2002 年将博弈论的方法与 Banach 空间理论相结合, 得到了下面的结果:

定理 2.2 [17] 假定 X 是一个可分自反的 Banach 空间. 如果 X 中的任意标准弱零树都有一根枝条与 ℓ_p 的标准单位基等价, 那么存在一列有限维空间 (E_n) 使得 X 线性嵌入到 $(\sum E_n)_{\ell_p}$.

现在给出本节最开始提出的基本问题的答案.

定理 2.3 [15] 假定 X 是一个可分自反的 Banach 空间, 则 X 线性嵌入到某个具有无条件基的 Banach 空间当且仅当 X 具有无条件树性质.

我们可以验证例 2.1 中的空间 X 不具有无条件树性质, 因此, 它不能线性嵌入到具有无条件基的 Banach 空间. 结合空间理论的一些其他经典的结论, 我们得到一系列的等价条件.

推论 2.1 [15] 假定 X 是一个可分自反的 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 线性嵌入到某个具有无条件基的 Banach 空间;

(ii) X 线性嵌入到某个具有无条件基的自反空间;

(iii) X 与某个具有无条件收缩基空间的商空间线性同胚;

(iv) X 与某个具有无条件基自反空间的商空间线性同胚;

(v) X 线性嵌入到某个具有无条件基自反空间的商空间;

(vi) X 线性嵌入到某个具有无条件收缩基空间的自反商空间.

Odell 在文献 [19] 中指出, Rosenthal 首先提出了具有无条件基空间的商空间和子空间的等价性问题, 即具有收缩无条件基空间的任意商空间是否和另一个具有无条件基空间的子空间线性同胚? 这里无条件基的收缩性是必要的, 因为任意可分 Banach 空间都与 ℓ_1 的某个商空间线性同胚, 而 ℓ_1 很显然具有无条件基. 在非自反的范畴内, 我们之前用到的无条件树性质已经无法保证线性嵌入到具有无条件基的 Banach 空间. 事实上, James 空间的任意标准弱零树都有一根枝条与 ℓ_2 的标准单位基等价. 而我们知道 James 空间不能线性嵌入到具有无条件基的 Banach 空间. 为了回答上述由 Rosenthal 提出的问题, 我们需要下面更强的性质.

定义 2.2 假定 X 是一个 Banach 空间. 如果 X^* 单位球面的子集 $(x_A^*)_{A\in[\mathbf{N}]^{<\omega}}$ 满足对于任意的 $A\in[\mathbf{N}]^{<\omega}$, $(x_{A\cup\{n\}})_{n\in\mathbf{N}}$ 都是弱 $*$ 零列 (在弱 $*$ 拓扑下收敛到零), 那么 $(x_A)_{A\in[\mathbf{N}]^{<\omega}}$ 被称为标准弱 $*$ 零树. 称 X 具有 C- 弱 $*$ 无条件树性质, 如果 X^* 中的任意标准弱零列树都拥有一根枝条构成一组关于常数 C 的无条件基序列. X 被称为具有弱 $*$ 无条件树性质当且仅当存在 $C>1$ 使得 X 具有 C- 弱 $*$ 无条件树性质.

2011 年, Johnson 和 Zheng [16] 通过对 Markuchevich 基的研究, 肯定地回答了 Rosenthal 提出的关于具有无条件基空间的商空间和子空间的等价性问题.

定理 2.4 [16] 假定 X 是一个可分的 Banach 空间, 则以下条件等价:

(i) X 具有弱 $*$ 无条件树性质;

(ii) X 线性嵌入到某个具有收缩无条件基的 Banach 空间;

(iii) X 与某个具有无条件收缩基空间的商空间线性同胚.

L_p 作为最常见最经典的函数空间, 一直受到最广泛的关注. 而如何对其子空间在线性同胚意义下进行分类就成为空间理论研究的一个热点问题. 1962 年, Kadec 和 Pełczyński [20] 证明了如下定理:

定理 2.5 [20] 设 $2 < p < \infty$, 则 L_p 的任意无穷维子空间要么与 ℓ_2 线性同胚, 要么包含一个与 ℓ_p 线性同胚的子空间.

Johnson 和 Odell [21] 在 1974 年证明了与其相对称的结果:

定理 2.6 [21] 设 $2 < p < \infty$, 则 L_p 的任意无穷维子空间要么包含一个与 ℓ_2 线性同胚的子空间, 要么线性嵌入到 ℓ_p.

当 $1 < p < 2$ 时, Johnson [22] 在 1977 年给出了可线性嵌入到 ℓ_p 的 L_p 子空间的刻画.

定理 2.7 [22] 设 $1 < p < 2$, 则 L_p 的子空间 X 线性嵌入到 ℓ_p 当且仅当存在常数 $1 \leqslant K < \infty$ 使得 X 中任意标准弱零列都包含一个子列与 ℓ_p 的标准单位基 K- 等价.

而 Alspach 和 Odell [23] 运用弱零树的方法, 得到了如下统一的结论:

定理 2.8 [23] 设 $1 < p < \infty$, 则 L_p 的子空间 X 线性嵌入到 ℓ_p 当且仅当 X 中任意标准弱零树都包含一根枝条与 ℓ_p 的标准单位基等价.

ℓ_p 和 ℓ_2 是 L_p 中最基本的可补子空间. 当 $2 < p < \infty$ 时, L_p 的子空间 X 如果不能线性嵌入到 ℓ_p 或者 ℓ_2, 那么 X 必定包含一个与 $\ell_p \oplus \ell_2$ 线性同胚的子空间. L_p 的另一个除了本身之外的相对明显的可补子空间是 $(\sum \ell_2)_{\ell_p}$. 直到 1970 年, Rosenthal [24] 才发现了 L_p 的第一个非平凡的可补子空间 X_p. Schechtman [25] 1975 年在 X_p 空间的基础上构造出了无穷多的互不线性同胚的 L_p 可补子空间. 1981 年, Bourgain 等 [26] 进一步证明了存在不可数多的互不线性同胚的 L_p 可补子空间. 这个结果告诉我们完全地刻画 L_p 的可补子空间是不实际的. 那么是否能够对某类特定的 L_p 可补子空间进行完整的刻画? 1972 年, Johnson 和 Zippin [27] 证明了如下定理:

定理 2.9 [27] 设 $1 < p < \infty$, 如果 L_p 的可补子空间 X 线性嵌入到 ℓ_p, 则 X 与 ℓ_p 线性同胚.

Johnson 和 Odell [28] 在 1981 年得到了下面的一系列结果:

定理 2.10 [28] 假定 X 是 L_p 的无穷维子空间.

(i) 设 $1 < p < 2$, 如果 X 在 L_p 中可补, 具有无条件基并且线性嵌入到 $\ell_p \oplus \ell_2$, 则 X 只能与 ℓ_p、ℓ_2 或者 $\ell_p \oplus \ell_2$ 其中之一线性同胚;

(ii) 设 $2 < p < \infty$, 如果 X 在 L_p 中可补, 具有无条件基并且线性嵌入到 $\ell_p \oplus \ell_2$, 则 X 只能与 ℓ_p、ℓ_2、$\ell_p \oplus \ell_2$ 或者 X_p 其中之一线性同胚;

(iii) 设 $2 < p < \infty$, 如果 X 与 $\ell_p \oplus \ell_2$ 某个子空间的商空间线性同胚, 则 X 与线性嵌入到 $\ell_p \oplus \ell_2$ 的某个 Banach 空间线性同胚.

线性嵌入理论在近十几年间被 Odell、Schlumprecht 以及 Argyros 和 Haydon 等推向了一个新的高潮. Haydon 等 [29] 在 2011 年对 L_p 空间的 "微小" 子空间进行了更深入的研究. 具体来说, 他们在 L_p 子空间的范畴内给出了可线性嵌入到 $\ell_p \oplus \ell_2$ 空间的刻画, 从而确定了 L_p 的下一个 "微小" 子空间, 即 $(\sum \ell_2)_{\ell_p}$.

定理 2.11 [29] 设 $2 < p < \infty$. 如果 L_p 的子空间 X 不能线性嵌入到 $\ell_p \oplus \ell_2$, 那么 X 必定包含一个与 $(\sum \ell_2)_{\ell_p}$ 线性同胚的子空间.

不变子空间问题是泛函分析领域的一个著名的公开问题. Lindenstrauss [30] 指出, 如果 Banach 空间上的一个算子可以被分解为一个紧算子与恒等算子的某个倍数之和, 那么这个算子就具有非平凡的不变子空间. 假定存在一个无穷维的 Banach 空间使得其上所有的有界线性算子都能够被分解为一个紧算子与恒等算子的某个倍数之和, 则这个 Banach 空间就具有不变子空间性质, 即空间上的每个有界线性算子都具有非平凡不变子空间. 在前面提到的 Gowers-Maurey 遗传不可分解空间上, 每

个有界线性算子都能够被分解为一个严格奇异算子与恒等算子的某个倍数之和. 一段时间内, 空间理论学家们猜测 Gowers-Maurey 空间本身就具有不变子空间性质. 然而, Gowers [31] 在 1996 年构造出一个从 Gowers-Maurey 空间的某个子空间到 Gowers-Maurey 空间上的非紧严格奇异算子. 2001 年, Androulakis 和 Schlumprecht [32] 进一步证明了这个算子可以线性延拓到整个 Gowers-Maurey 空间并保持性质不变. 虽然到目前为止, 在 Hilbert 空间上不变子空间问题依然没有解决, 但是 Argyros 和 Haydon [33] 在 2011 年通过将 Gowers-Maurey 空间的构造方法与 Bourgain 和 Delbaen 构造 $\mathcal{L}_\infty$ 的手段相结合, 成功地构造出第一个具有不变子空间性质的无穷维 Banach 空间. 这个空间同时也是一个遗传不可分解的 $\mathcal{L}_\infty$ 空间.

定理 2.12 [33] 存在一个无穷维 Banach 空间 X 使得 X 上的任意有界线性算子都能够被分解为一个紧算子与恒等算子的某个倍数之和.

Argyros-Haydon 空间不仅是第一个无穷维 Banach 空间使得其上所有有界线性算子都具有非平凡不变子空间, 还是第一个无穷维 Banach 空间使得其上全体有界线性算子构成的空间是可分的.

Banach 空间中弱零列的子列的性质通常都与空间本身的性质密切相关. 一个 Banach 空间 X 被称为具有无条件子序列性质, 如果 X 中的任意标准弱零列都包含一个无条件子序列. 在相当长的时间里, 人们无法证实是否任意无穷维 Banach 空间都具有无条件子序列性质. 第一个被证实不具有无条件子序列性质的 Banach 空间在 1977 年被 Maurey 和 Rosenthal [34] 发现. 那么是否存在经典的 Banach 空间不具有无条件子序列性质? 我们知道 L_1 不能线性嵌入到具有无条件基的 Banach 空间, 因此, L_1 是否具有无条件子序列性质就成为一个自然的问题. 而这个问题的答案直到 2007 年才由 Johnson 等 [35] 给出. 他们证明了 L_1 不具有无条件子序列性质.

定理 2.13 [35] 存在 L_1 中的标准弱零列 (f_i) 使得对于任意的 $\epsilon > 0$, L_1 的 Haar 基与 (f_i) 的任意子列的某个块状基 $(1+\epsilon)$- 等价. 因此, (f_i) 没有无条件子序列.

如果存在常数 $1 \leqslant K < \infty$ 使得 X 中的任意标准弱零列都包含一个 K- 无条件子序列, 则 Banach 空间 X 被称为具有 K- 无条件子序列性质. 2010 年, Odell 和 Zheng [36] 运用 Johnson、Maurey 和 Schechtman 的构造方法得到了如下结果:

定理 2.14 [36] 存在自反空间中的标准弱零列 (f_i) 使得对于任意的 $\epsilon > 0$ 和任意的 $1 < p \leqslant 2$, L_p 的 Haar 基与 (f_i) 的任意子列的某个块状基 $(1+\epsilon)$- 等价. 存在一个具有无条件子序列性质的自反空间 X 使得对于任意的 $1 \leqslant K < \infty$, X 都不具有 K- 无条件子序列性质.

3 算子分解理论

算子分解理论是研究如何将一个有界线性算子写成两个或者多个算子的复合, 它也是线性嵌入的一个自然延伸和推广. 实际上, 一个 Banach 空间 X 上的恒等算子可以通过空间 Y 的某个子空间进行分解等价于空间 X 线性嵌入到空间 Y; 而 X 上的恒等算子可以通过整个空间 Y 进行分解等价于空间 X 与 Y 的一个可补子空间线性同胚. 另一方面, 算子分解理论的重要性还在于将给定算子分解成为性质更好或者更加容易处理的几个算子的复合, 从而方便研究算子本身的特征. 可和算子、积分算子和核算子研究的基础都是算子分解理论. 其中非常著名的就有 Pietsch 分解定理、Grothendieck-Pietsch 算子分解定理和 Maurey 外插定理.

首先了解绝对可和算子. 设 T 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的一个有界线性算子. 如果对于 X 中任意无条件收敛的级数 $\sum x_i$, 级数 $\sum Tx_i$ 在 Y 中都绝对收敛, 则 T 被称为绝对可和的. 闭

图像定理告诉我们, T 是绝对可和的当且仅当存在一个常数 C, 使得对于 X 中的任意序列 $(x_i)_{i=1}^n$, 有

$$\sum_{i=1}^n \|Tx_i\| \leqslant C \sup\left\{\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)| : \|x^*\| \leqslant 1, x^* \in X^*\right\}.$$

更一般地, 对于 $1 \leqslant p < \infty$, 如果存在常数 C 使得对于 X 中的任意序列 $(x_i)_{i=1}^n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^p\right)^{1/p} \leqslant C \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p} : \|x^*\| \leqslant 1, x^* \in X^*\right\},$$

则 T 被称为 p- 可和的. 很显然, 1- 可和就是绝对可和.

定理 3.1 (Pietsch 分解定理) 设 Banach 空间 X 是 $C(K)$ 空间的一个子空间, 其中 K 是紧 Hausdorff 空间. 从 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子 T 是 p- 可和的 $(1 \leqslant p < \infty)$ 当且仅当存在 K 上的正则概率测度 μ 和常数 C 使得对于 X 中的所有元素 x, 有

$$\|Tx\| \leqslant C\left(\int_K |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{1/p}.$$

Pietsch 分解定理也可以用交换图的语言进行表述. 设 T 是从 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子, 则 T 是 p- 可和算子 $(1 \leqslant p < \infty)$ 当且仅当存在正则概率测度 μ 和有界线性算子 S 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{T} & Y \\
{\scriptstyle i_X}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle S} \\
i_X(X) & \xrightarrow{j_p|_{i_X(X)}} & Y_p \\
\cap & & \cap \\
C(K) & \xrightarrow{j_p} & L_p(\mu),
\end{array}$$

其中 $Y_p = j_p(i_X(X))$, $i_X : X \to C(K)$ 是从 X 到 $C(K)$ 的一个线性等距嵌入, j_p 是从 $C(K)$ 到 $L_p(\mu)$ 的包含映射.

从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子 T 被称为 p- 可积算子 $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 当且仅当存在有界线性算子 A 和 B 及正则概率测度 μ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{T} & Y & \xrightarrow{J_Y} & Y^{**} \\
{\scriptstyle B}\downarrow & & & & \uparrow{\scriptstyle A} \\
L_\infty(\mu) & & \xrightarrow{\quad i_p \quad} & & L_p(\mu),
\end{array}$$

其中 i_p 是从 $L_\infty(\mu)$ 到 $L_p(\mu)$ 的包含映射, 而 J_Y 是空间 Y 到 Y^{**} 的经典等距嵌入.

从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子 T 被称为 p- 核算子 $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 当且仅当 T 能够被表示为 $T = \sum_j x_j^* \otimes y_j$, 其中 $(x_j^*)_j \in X^*$ 和 $(y_j)_j \in Y$ 满足 $N_p((x_j^*)_j, (y_j)_j) < \infty$, 这里

$$N_p((x_j^*)_j, (y_j)_j) = \left(\sum_j \|x_j^*\|\right)\left(\sup_j \|y_j\|\right), \quad p = 1,$$

$$N_p((x_j^*)_j, (y_j)_j) = \left(\sum_j \|x_j^*\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y^* \in B_{Y^*}} \left(\sum_j |\langle y^*, y_j\rangle|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1,$$

$$N_p((x_j^*)_j,(y_j)_j)=\Big(\sup_j\|x_j^*\|\Big)\sup_{y^*\in B_{Y^*}}\sum_j|\langle y^*,y_j\rangle|,\quad p=\infty.$$

同样, T 是 p- 核算子等价于存在 $a:\ell_p\to Y$ 和 $b:X\to\ell_\infty$ 及 $\lambda\in\ell_p$ 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & Y \\ {\scriptstyle b}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle a} \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & \ell_p, \end{array}$$

其中 $M_\lambda:\ell_\infty\to\ell_p$ 是一个对角线算子. 从以上的结论我们不难看出, 经典的算子分解理论都是将给定的算子分解为 L_p 甚至是 ℓ_p 上定义的算子, 因为在这些空间上, 我们拥有的工具较多, 处理起来相对容易. 更广泛地, 自反空间的性质比一般的 Banach 空间好得多, 尤其是需要考虑弱 $*$ 拓扑及共轭算子的时候. 所以在什么情形下能够将给定算子通过自反空间进行分解就成为一个自然的问题. 1974 年, Davis 等 [3] 证明了任意一个弱紧算子都能够通过一个自反空间进行分解. 这个定理成为算子分解理论的一个现代经典, 自发表起就被广泛引用.

定理 3.2 [3] 设 T 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的有界线性算子, 则 T 是弱紧算子当且仅当 T 可通过某个自反空间分解, 即存在自反空间 Z 以及有界线性算子 A 和 B 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \searrow B & & \nearrow A \\ & Z\ . & \end{array}$$

1976 年, Johnson [37] 证明了如下定理:

定理 3.3 [37] 设 T 是从 Banach 空间 X 到 L_p $(2<p<\infty)$ 的有界线性算子, $i_{p,2}$ 是从 L_p 到 L_2 的包含映射, 则 $i_{p,2}T$ 是紧算子当且仅当 T 可通过 ℓ_p 分解, 即存在有界线性算子 A 和 B 使得下图交换:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & L_p \\ \searrow B & & \nearrow A \\ & \ell_p\ . & \end{array}$$

L_p 空间上算子的分解理论是算子分解理论中最基本的, 其中一个重要的问题就是 L_p 空间上的算子在什么情形下可以通过 ℓ_p 空间进行分解. 定理 3.3 可以看作是此问题在 $1<p<2$ 范围内的一个答案. Johnson 猜测: 如果 $2<p<\infty$, 定义在 L_p 空间上的有界线性算子 T 可通过 ℓ_p 分解当且仅当 T 具有 p 型 Banach-Saks 性质. 空间 X 上的有界线性算子 T 具有 p 型 Banach-Saks 性质当且仅当存在常数 λ 使得任意 X 中的标准弱零列都有一个子列 (x_i) 满足对于任意的自然数 n, 有

$$\Big\|\sum_{i=1}^n Tx_i\Big\|\leqslant\lambda n^{1/p}.$$

1977 年, Johnson [22] 对上面的猜测给出了部分答案.

定理 3.4 [22] 设 T 是定义在 L_p $(2<p<\infty)$ 上的有界线性算子, 并且 T 的值域是闭的, 则 T 可通过 ℓ_p 分解当且仅当 T 具有 p 型 Banach-Saks 性质.

1980 年, Johnson [38] 找到了一个反例. 他通过加强条件给出了如下的猜测:

猜想 3.1 [38] 设 T 是定义在 L_p $(2<p<\infty)$ 上的有界线性算子, 则 T 可通过 ℓ_p 分解当且仅当存在常数 C 使得 L_p 中的任意标准弱零列 (x_n) 包含一个子列 (x_{n_k}) 满足

$$\left\|T\left(\sum a_k x_{n_k}\right)\right\| \leqslant C\left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\,(a_k)\subset\mathbb{R}.$$

这个猜测直到 2006 年才由 Zheng [39] 给出了反例. 在文献 [39] 中, Zheng 给出了可通过 ℓ_p 分解的定义在 L_p $(2<p<\infty)$ 上的有界线性算子的特征.

定理 3.5 [39] 设 T 是定义在 L_p $(2<p<\infty)$ 上的有界线性算子, 则 T 可通过 ℓ_p 分解当且仅当存在常数 C 使得 L_p 中的任意标准弱零树都包含一根枝条 (x_k) 满足

$$\left\|T\left(\sum a_k x_k\right)\right\| \leqslant C\left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\,(a_k)\subset\mathbb{R}.$$

这个定理同时也告诉我们, 对于 L_p 上的算子, 弱零树的条件要严格强于弱零列的条件. 通过对 L_p 子空间结构的进一步研究, Zheng [39] 得到了定义在 L_p 子空间上的算子分解的相关结论.

定理 3.6 [39] 设 X 是 L_p $(2<p<\infty)$ 的子空间, T 是定义在 X 上的有界线性算子, 则 T 可通过 ℓ_p 的某个子空间进行分解当且仅当存在常数 C 使得 X 中的任意标准弱零树都包含一根枝条 (x_k) 满足

$$\left\|T\left(\sum a_k x_k\right)\right\| \leqslant C\left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\,(a_k)\subset\mathbb{R}.$$

在定理 3.6 中, 如果令 T 为 X 到 L_p 的恒等嵌入, 则得到 L_p 的子空间线性嵌入到 ℓ_p 的另一个刻画, 即 L_p $(2<p<\infty)$ 的子空间 X 线性嵌入到 ℓ_p 当且仅当存在常数 C 使得 X 中的任意标准弱零树都包含一根枝条 (x_k) 满足

$$\left\|\sum a_k x_k\right\| \leqslant C\left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}, \quad \forall\,(a_k)\subset\mathbb{R}.$$

在 $p=\infty$ 的情形下, 有下面相应的结果.

定理 3.7 [39] 设 X 是一个 Banach 空间满足 X^* 可分, T 是定义在 X 上的有界线性算子, 则 T 可通过 c_0 的某个子空间进行分解当且仅当存在常数 C 使得 X 中的任意标准弱零树都包含一根枝条 (x_k) 满足

$$\left\|T\left(\sum a_k x_k\right)\right\| \leqslant C\sup\{|a_k|\}, \quad \forall\,(a_k)\subset\mathbb{R}.$$

同样地, 如果在定理 3.7 中令 T 为 X 上的恒等算子, 则得到可线性嵌入到 c_0 的 Banach 空间的特征: 设 X 是一个 Banach 空间满足 X^* 可分, X 线性嵌入到 c_0 当且仅当存在常数 C 使得 X 中的任意标准弱零树都包含一根枝条 (x_k) 满足

$$\left\|\sum a_k x_k\right\| \leqslant C\sup\{|a_k|\}, \quad \forall\,(a_k)\subset\mathbb{R}.$$

定义 3.1 Banach 空间 X 的一列有限维子空间 (E_n) 被称为 X 的有限维分解, 如果 X 中的任意元素 x 都能够被唯一地表示为如下的收敛级数:

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \quad x_n\in E_n, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

当所有的 E_n 都是一维空间时, 我们得到的实际上就是一组 Schauder 基. 如果存在常数 $1 \leqslant C < \infty$ 和 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 使得对于任意的自然数 m 和 $(E_n)_{n>m}$ 的所有块状基 (x_n), 有

$$C^{-1}\Big(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{m}x_n\Big\| \leqslant C\Big(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^p\Big)^{1/p},$$

则 (E_n) 被称为渐进 ℓ_p 有限维分解. 更一般地, 如果存在常数 $1 \leqslant C < \infty$ 和 $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ 使得对于任意的自然数 m 和 $(E_n)_{n>m}$ 的所有块状基 (x_n), 有

$$C^{-1}\Big(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{m}x_n\Big\| \leqslant C\Big(\sum_{n=1}^{m}\|x_n\|^q\Big)^{1/q},$$

则 (E_n) 被称为渐进 (ℓ_p, ℓ_q) 有限维分解. Banach 空间 X 被称为渐进 ℓ_p 空间当且仅当存在常数 $1 \leqslant C < \infty$ 使得对于所有的自然数 n, $\exists\, Y_1 \in \mathrm{cof}(X), \forall\, y_1 \in S_{Y_1}, \ldots, \exists\, Y_n \in \mathrm{cof}(X), \forall\, y_n \in S_{Y_n}$ 满足 $(y_i)_{i=1}^n$ 与 ℓ_p 的标准单位基 C- 等价, 其中 $\mathrm{cof}(X)$ 是 X 的全体有限余维空间. 很明显, 如果 X 具有一组渐进 ℓ_p 有限维分解, 则 X 就是一个渐进 ℓ_p 空间.

定义 3.2 设 $[\mathbb{N}]^{\leqslant k}$ 是由所有势不超过 k 的自然数子集所构成的集合. 假定 X 是一个 Banach 空间. 如果 X 单位球面的子集 $(x_A)_{A\in[\mathbb{N}]^{\leqslant k}} \subset S_X$ 满足对于任意的 $A \in [\mathbb{N}]^{<k}$, $(x_{A\cup\{n\}})_{n\in\mathbb{N}}$ 都是弱零列, 那么 $(x_A)_{A\in[\mathbb{N}]^{<\omega}}$ 被称为高度 k 的标准弱零树. 令 $(m_n)_{n=1}^k$ 为严格递增的自然数列. 对于任意的自然数 $n \leqslant k$, 记 $A_n = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, 则 $(x_{A_n})_{n=1}^k$ 被称为弱零树的一根枝条.

定义 3.3 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 如果存在常数 $1 \leqslant C < \infty$ 使得对于任意的自然数 k, X 中所有高度 k 的标准弱零树都包含一根枝条 $(x_i)_{i=1}^k$ 满足

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k}a_ix_i\Big\| \geqslant C^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^p\Big)^{1/p},$$

则 Banach 空间 X 具有渐进下 ℓ_p 树估计.

定义 3.4 设 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, T 是定义在 Banach 空间 X 上的有界线性算子. 如果存在常数 $1 \leqslant C < \infty$ 使得对于任意的自然数 k, X 中所有高度 k 的标准弱零树都包含一根枝条 $(x_i)_{i=1}^k$ 满足

$$\Big\|\sum_{i=1}^{k}T(a_ix_i)\Big\| \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{k}|a_i|^q\Big)^{1/q},$$

则 T 具有渐进上 ℓ_q 树估计.

2008 年, Zheng [40] 证明了如下的算子分解定理:

定理 3.8 [40] 令 $1 < q < r < p < \infty$. 设 X 是一个具有下 ℓ_q 树估计的可分自反空间. 如果定义在 X 上的有界线性算子 T 满足渐进上 ℓ_p 树估计, 则存在一列有限维空间 (F_n) 使得 T 可通过 $(\sum F_n)_{\ell_r}$ 的某个子空间进行分解.

这个定理的意义在于将渐进 ℓ_p 估计转化为 ℓ_r 估计, 而 ℓ_r 估计相对容易处理. 同时, 定理 3.8 的一个重要推论如下:

定理 3.9 [40] 令 $1 < q < p < \infty$. 设 X 是一个具有下 ℓ_q 树估计的可分自反空间. 如果定义在 X 上的有界线性算子 T 满足渐进上 ℓ_p 树估计, 则 T 可通过某个具有 (ℓ_p, ℓ_q) 有限维分解的空间的子空间进行分解.

上述定理无法告诉我们当 $p = q$ 时的情形. 通过结合 Johnson [37] 和 Odell 等 [41] 的相关结论, Zheng 进一步得到如下定理:

定理 3.10 [40] 令 $2<p<\infty$. 设 X 是一个可分自反的渐进 ℓ_p 空间. 如果从 X 到 L_p 的有界线性算子 T 满足渐进上 ℓ_p 树估计, 则 T 可通过 ℓ_p 进行分解.

非常有意思的是, 如果在定理 3.10 中令 X 为 L_p 的子空间, 令 T 为 X 上的恒等算子, 则得到 X 与 ℓ_p 线性同胚. 也就是说, 当 $2<p<\infty$ 时, L_p 的渐进 ℓ_p 子空间必定与 ℓ_p 线性同胚.

前面曾经提到, Rosenthal 空间 X_p 是 L_p 的第一个非平凡的可补子空间. 因此, 找出定义在 L_p 上的算子可通过 X_p 或者 X_p 的子空间进行分解的特征就成为算子分解理论一个重要的问题. 因为 X_p 是 $\ell_p\oplus\ell_2$ 的子空间, 所以更好地了解 $\ell_p\oplus\ell_2$ 的性质将对问题的解决有着很大的帮助. 而从上面一系列 L_p 上算子的分解定理来看, 某种弱零树的条件应该是比较自然的选择.

定义 3.5 [40] 设 T 是定义在 L_p $(2<p<\infty)$ 上的有界线性算子. 如果存在常数 $1\leqslant C<\infty$ 使得 X 中所有的标准弱零树都包含一根枝条 $(x_i)_{i=1}^k$ 满足

$$\left\|\sum_{i=1}^k T(a_ix_i)\right\|\leqslant C\max\left\{\left(\sum_{i=1}^k|a_i|^p\right)^{1/p},\left\|\sum a_ix_i\right\|_2\right\},$$

其中 $\|\cdot\|_2$ 代表函数的 L_2 范数, 则称 T 具有上 $\ell_q\oplus\ell_2$ 树估计.

运用 Banach 空间的经典手段和上述定理中成熟的方法, Zheng [42] 证明了下面的结果:

定理 3.11 [42] 设 $T:L_p\to L_p$ $(2<p<\infty)$ 是一个有界线性算子. 如果 T 满足上 $\ell_q\oplus\ell_2$ 树估计, 则 T 可通过 $\ell_q\oplus\ell_2$ 的某个子空间进行分解.

反过来, 定理 3.11 的逆定理是否成立? 在相当长的时间里, 作者一直都认为答案是肯定的, 因为之前所有的可通过 ℓ_p 子空间分解的定理都是在类似的条件之下, 而且定理 3.11 也告诉我们上 $\ell_q\oplus\ell_2$ 树估计是必要条件. 这个问题的答案直到 2017 年才由 Zheng [42] 给出了第一个反例. 这个反例的构造需要下面的定理:

定理 3.12 [42] 记 $(e_{n,i})_{i=1}^\infty$ 为 $Z_p=(\sum_{n=1}^\infty\ell_2)_{\ell_p}$ $(2<p<\infty)$ 中第 n 个 ℓ_2 空间的标准单位基. 令 $T:Z_p\to Z_p$ 满足 $T(e_{n,i})=\lambda_ne_{n,i}$, 其中 (λ_n) 是一列递减趋于零的正数, 则 T 可通过 $\ell_p\oplus\ell_2$ 的某个子空间进行分解当且仅当 $\sum_{n=1}^\infty\lambda_n^{\frac{2p}{p-2}}<\infty$.

Johnson 和 Odell [28] 在 1981 年证明了任意从 L_p $(2<p<\infty)$ 到 $\ell_p\oplus\ell_2$ 的有界线性算子都可以通过 X_p 空间分解. 因此, 定理 3.12 中的算子实际上可以通过 X_p 进行分解. 通过将 Z_p 适当地可补嵌入到 L_p, 我们可以构造出 L_p 上的诱导算子 $\tilde{T}$, 使得 $\tilde{T}$ 可通过 X_p 进行分解但是不满足上 $\ell_p\oplus\ell_2$ 树估计. 那么什么条件才能保证 L_p $(2<p<\infty)$ 上的算子可通过 X_p 进行分解? 这里需要另外一个概念—L_p 空间的密度变换.

定义 3.6 L_p 空间的密度变换是一个正值函数 $g\in L_1(dm)$, 满足 $\int gdm=1$. 这样的函数 g 诱导出从 $L_p(dm)$ 到 $L_p(gdm)$ 的一个自然等距 ϕ 使得

$$\phi(f)=g^{-1/p}f.$$

设 T 是 $L_p(dm)$ 上的有界线性算子. 定义 T 的诱导算子如下:

$$\tilde{T}=\phi T\phi^{-1}:L_p(gdm)\to L_p(gdm).$$

定理 3.13 [42] 设 T 是 L_p $(2<p<\infty)$ 空间上的有界线性算子, 则 T 可通过 $\ell_p\oplus\ell_2$ 空间的某个子空间进行分解当且仅当存在 L_p 的一个密度变换使得其诱导算子 $\tilde{T}$ 具有上 $\ell_p\oplus\ell_2$ 树估计.

接下来提供另一类保证 L_p $(2<p<\infty)$ 上的算子可通过 X_p 进行分解的充分条件. 这里要用到严格奇异算子的概念. 我们知道空间 X 上的一个有界线性算子 T 是严格奇异的当且仅当 T 限制在

X 的任意无穷维子空间上都不是线性同胚. 设 Z 是一个 Banach 空间. 如果 T 限制在任意与 Z 线性同胚的 X 的子空间上都不是线性同胚, 则称 T 是 Z- 严格奇异算子. Z- 严格奇异算子可以被用来刻画经典 Banach 空间上算子空间中的极大理想. 例如, Gohberg 等 [43] 在 1960 年证明了当 X 等于 ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ 或者 c_0 时, 严格奇异算子构成 $\mathcal{L}(X)$ 中的唯一极大理想. Chen 等 [44] 在 2011 年证明了 Z_p- 严格奇异算子构成 $\mathcal{L}(Z_p)$ 中的唯一极大理想, Dosev 等 [45] 在 2013 年证明了 L_p $(1 \leqslant p < \infty)$- 严格奇异算子构成了 $\mathcal{L}(L_p)$ 中的唯一极大理想. 对这类问题感兴趣的读者可参见文献 [46–50].

我们不难看出, 任意可通过 X_p $(2 < p < \infty)$ 空间进行分解的有界线性算子都是 Z_p- 严格奇异的. Zheng [42] 在 2017 年得到的定理告诉我们 L_p 上的闭 Z_p- 严格奇异算子可通过 $\ell_p \oplus \ell_2$ 的某个子空间进行分解.

定理 3.14 [42] 设 T 是从 L_p $(2 < p < \infty)$ 空间的子空间 X 到 L_p 的有界线性算子. 如果 T 是闭 Z_p- 严格奇异算子, 则 T 可通过 $\ell_p \oplus \ell_2$ 空间的某个子空间进行分解.

在定理 3.14 中令 T 为 X 上的恒等算子, 我们在 L_p 子空间的范畴内得到了可嵌入到 $\ell_p \oplus \ell_2$ 的特征 (定理 2.11). 当 $X = L_p$ 时, T 可通过 X_p 进行分解. 如果 T 是 L_p 到 L_p 的可补子空间的投影, 则定理 3.14 给出了可线性嵌入到 X_p 的 L_p 可补子空间的刻画. 值得注意的是, 定理中要求 T 是闭算子, 这个条件不能够被简单地去掉, 因为存在 L_p $(2 < p < \infty)$ 上的 Z_p- 严格奇异算子不能通过 X_p 进行分解. 事实上, 根据定理 3.12, 可以得到下面的结果:

定理 3.15 [42] 设 T 是 Z_p $(2 < p < \infty)$ 上的有界线性算子满足 $T(e_{n,i}) = \lambda_n e_{n,i}$, 其中 (λ_n) 是一列递减趋于零的正数. 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{2p}{p-2}} = \infty$, 则 T 是 ℓ_p- 严格奇异的, 但不能通过 X_p 分解.

注意到一个简单的事实, ℓ_p- 严格奇异算子是 Z_p- 严格奇异的. 定理 3.15 给出一类不能通过 X_p 进行分解的 Z_p- 严格奇异算子. 因为 Z_p 是 L_p 的可补子空间, 所以, 这类算子的定义域可以被延拓到整个 L_p 空间.

4 尚未解决的问题

在定理 2.4 中, 我们得到了可线性嵌入到具有收缩无条件基的 Banach 空间的特征. 在更一般的情形下, 下面的问题仍然没有解决:

问题 4.1 满足什么条件的 Banach 空间可以线性嵌入到具有无条件基的空间?

Banach 空间的无条件基如果不是收缩的, 那么这个空间必然包含一个与 ℓ_1 线性同胚的子空间. 而 ℓ_1 本身就具有无条件基, 因此解决问题 4.1 的一个重要步骤就是解决下面的问题:

问题 4.2 满足什么条件的 Banach 空间可以线性嵌入到 ℓ_1?

类似于对 L_p $(1 < p < \infty)$ 中可嵌入到 ℓ_p 空间的刻画, 问题 4.2 的一个重要子问题如下:

问题 4.3 满足什么条件的 L_1 子空间可以线性嵌入到 ℓ_1?

因为在 ℓ_1 空间里不存在标准弱零列, 所以不能考虑弱零树的条件. Rosendal [51] 在 2009 年系统地研究了无穷渐进博弈. 设 $\mathcal{A}$ 为 Banach 空间 X 中一族单位序列构成的集合. 博弈的规则如下: 玩家一选取 X 的一个有限余维空间 X_1, 玩家二选取空间 X_1 中的单位向量 x_1; 玩家一再次选取 X 的一个有限余维空间 X_2, 玩家二选取空间 X_2 中的单位向量 x_2; …; 游戏一直如此无限的重复下去. 我们说玩家一拥有关于 $\mathcal{A}$ 的制胜策略, 如果他能够迫使玩家二所选取的序列 (x_i) 永远落在集合 $\mathcal{A}$ 里. 如果 $\mathcal{A}$ 是由 Banach 空间 X 中所有等价于 ℓ_1 标准单位基的序列构成, 而玩家一拥有关于 $\mathcal{A}$ 的制胜策略, 则称空间 X 拥有关于 ℓ_1 的制胜策略. 让人失望的是, 存在 L_1 的子空间拥有关于 ℓ_1 的制胜策略, 但

却不能线性嵌入到 ℓ_1. 所以需要加上额外的条件.

问题 4.4 假设 L_1 的子空间 X 具有有界完备基并且拥有关于 ℓ_1 的制胜策略, 则 X 是否可以线性嵌入到 ℓ_1?

问题 4.5 假设 L_1 的子空间 X 具有可分对偶空间并且拥有关于 ℓ_1 的制胜策略, 则 X 是否可以线性嵌入到 ℓ_1?

Banach 空间的一组 Schauder 基 (e_n) 被称为是弥散基, 如果 (e_n) 与它的任意子列都是等价的. 2018 年, Freeman 等 [52] 对条件弥散基进行了系统的研究, 证明了具有条件弥散基的空间和 James 空间非常相似. 一个自然的问题如下:

问题 4.6 具有什么性质的 Banach 空间可以线性嵌入到具有条件弥散基的空间?

设 (e_n) 为 Banach 空间 X 的一组 Schauder 基. (x_k) 被称为关于 (e_n) 的跳跃块状基, 如果存在自然数列 (m_k) 满足 $m_k < m_{k+1} - 1$, 使得

$$x_k = \sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-2} a_n e_n, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

如果 (e_n) 的所有单位跳跃块状基都是无条件的, 那么 (e_n) 就称为跳跃无条件基. 在文献 [52] 中, 任意具有条件弥散基的空间都被证明具有一组跳跃无条件基.

问题 4.7 如果 Banach 空间 X 具有一组无条件跳跃基, 那么 X 是否可以线性嵌入到具有条件弥散基的空间?

因为所有具有条件弥散基的空间都是拟自反的 (参见文献 [52]), 所以有下面进一步的问题:

问题 4.8 如果拟自反的 Banach 空间 X 具有一组无条件跳跃基, 那么 X 是否可以线性嵌入到具有条件弥散基的空间?

前面提到 Zheng [42] 在 2017 年证明了 L_p $(2 < p < \infty)$ 上闭的 Z_p- 严格奇异算子可以通过 X_p 进行分解, 但是存在非闭的 Z_p- 严格奇异算子不能通过 X_p 进行分解. 那么, 是否可以用可通过 X_p 进行分解的算子来逼近 Z_p- 严格奇异算子?

问题 4.9 给定 $\epsilon > 0$ 及 L_p $(2 < p < \infty)$ 上的 Z_p- 严格奇异算子 T. 是否存在一个可通过 X_p 分解的有界线性算子 S 满足 $\|T - S\| < \epsilon$?

与问题 4.9 相关联的是关于 $\mathcal{L}(L_p)$ 中理想的结构问题:

问题 4.10 记 Γ_{X_p} $(2 < p < \infty)$ 为 L_p 上的可通过 X_p 分解的算子的全体, 那么 Γ_{X_p} 是否是 $\mathcal{L}(L_p)$ 中的一个闭理想?

Tylli 猜测: 是否 L_p $(1 < p \neq 2 < \infty)$ 上的 ℓ_p- 严格奇异算子可以用可通过 ℓ_2 分解的算子逼近? 2008 年, Johnson 和 Schechtman [53] 证明了 Tylli 猜测不成立. 相应地, 他们证明了弱化的 Tylli 猜测. 具体来说, 他们证明了, 如果 T 是 L_p $(1 < p \neq 2 < \infty)$ 上的 ℓ_p- 严格奇异算子以及 $J : L_p \to \ell_\infty$ 是一个线性等距嵌入, 则 JT 可以用可通过 ℓ_2 分解的算子逼近. 对于 Z_p- 严格奇异算子, 我们有如下相对应的问题:

问题 4.11 如果 T 是 L_p $(2 < p < \infty)$ 上的 Z_p- 严格奇异算子以及 $J : L_p \to \ell_\infty$ 是一个线性等距嵌入, 那么 JT 是否可以用可通过 X_p 分解的算子逼近?

一个形式上简单一点的问题是考虑 Z_p 空间上的算子.

问题 4.12 给定 $\epsilon > 0$ 及 Z_p $(2 < p < \infty)$ 上的 Z_p- 严格奇异算子 T. 是否存在一个可通过 X_p 分解的有界线性算子 S 满足 $\|T - S\| < \epsilon$?

参考文献

1 Enflo P. A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math, 1973, 130: 309–317
2 James R C. Bases and reflexivity of Banach spaces. Ann of Math (2), 1950, 52: 518–527
3 Davis W J, Figiel T, Johnson W B, et al. Factoring weakly compact operators. J Funct Anal, 1974, 17: 311–327
4 Zippin M. Banach spaces with separable duals. Trans Amer Math Soc, 1988, 310: 371–379
5 Szlenk W. The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces. Studia Math, 1968, 30: 53–61
6 Bourgain J. On separable Banach spaces, universal for all separable reflexive spaces. Proc Amer Math Soc, 1980, 79: 241–246
7 Odell E, Schlumprecht Th. A universal reflexive space for the class of uniformly convex Banach spaces. Math Ann, 2006, 335: 901–916
8 Tsirel'son B S. Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0. Funct Anal Appl, 1974, 8: 138–141
9 Figiel T, Johnson W B. A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p. Compos Math, 1974, 29: 179–190
10 James R C. Uniformly non-square Banach spaces. Ann of Math (2), 1964, 80: 542–550
11 Mil'man V D. Geometric theory of Banach spaces, part II. Geometry of the unit sphere. Russian Math Surveys, 1971, 26: 79–163
12 Schlumprecht T. An arbitrarily distortable Banach space. Israel J Math, 1991, 76: 81–95
13 Odell E, Schlumprecht T. The distortion problem. Acta Math, 1994, 173: 259–281
14 Gowers W T, Maurey B. The unconditional basic sequence problem. J Amer Math Soc, 1993, 6: 851–874
15 Johnson W B, Zheng B. A characterization of subspaces and quotients of reflexive Banach spaces with unconditional bases. Duke Math J, 2008, 141: 505–518
16 Johnson W B, Zheng B. Subspaces and quotients of Banach spaces with shrinking unconditional bases. Israel J Math, 2011, 185: 375–388
17 Odell E, Schlumprecht T. Trees and branches in Banach spaces. Trans Amer Math Soc, 2002, 354: 4085–4108
18 Kalton N J. On subspaces of c_0 and extension of operators into $C(K)$-spaces. Q J Math, 2001, 52: 313–328
19 Odell E. On quotients of Banach spaces having shrinking unconditional bases. Illinois J Math, 1992, 36: 681–695
20 Kadec M, Pełczyński A. Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p. Studia Math, 1962, 21: 161–176
21 Johnson W B, Odell E. Subspaces of L_p which embed into ℓ_p. Compos Math, 1974, 28: 37–49
22 Johnson W B. On quotients of L_p which are quotients of ℓ_p. Compos Math, 1977, 34: 69–89
23 Alspach D, Odell E. L_p spaces. In: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. I. Amsterdam: North-Holland, 2001, 123–159
24 Rosenthal H P. On the subspaces of L_p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables. Israel J Math, 1970, 8: 273–303
25 Schechtman G. Examples of $\mathcal{L}_p$ spaces $(1 < p \neq 2 < \infty)$. Israel J Math, 1975, 22: 138–147
26 Bourgain J, Rosenthal H P, Schechtman G. An ordinal L^p-index for Banach spaces, with application to complemented subspaces of L^p. Ann of Math (2), 1981, 114: 193–228
27 Johnson W B, Zippin M. On subspaces of quotients of $(\sum G_n)_{\ell_p}$ and $(\sum G_n)_{c_0}$. Israel J Math, 1972, 13: 311–316
28 Johnson W B, Odell E. Subspaces and quotients of $\ell_p \oplus \ell_2$ and X_p. Acta Math, 1981, 147: 117–147
29 Haydon R, Odell E, Schlumprecht T. Small subspaces of L_p. Ann of Math (2), 2011, 173: 169–209
30 Lindenstauss J. Some open problems in Banach space theory. Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, 1975–1976, 15: 18–26
31 Gowers W T. A remark about the scalar-plus-compact problem. Math Sci Res Inst Publ, 1996, 34: 111–115
32 Androulakis G, Schlumprecht T. Strictly singular, non-compact operators exist on the space of Gowers and Maurey. J Lond Math Soc (2), 2001, 64: 655–674
33 Argyros S A, Haydon R G. A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem. Acta Math, 2011, 206: 1–54
34 Maurey B, Rosenthal H. Normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence. Studia Math, 1977, 61: 77–98
35 Johnson W B, Maurey B, Schechtman G. Weakly null sequences in L_1. J Amer Math Soc, 2007, 20: 25–36
36 Odell E, Zheng B. On the unconditional subsequence property. J Funct Anal, 2010, 258: 604–615
37 Johnson W B. Operators into L_p which factor through ℓ_p. J Lond Math Soc (2), 1976, 14: 333–339

38 Johnson W B. Operators into L_p which factor through ℓ_p. In: Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, 1979-1980, No. 17. Palaiseau: Ecole Polytechnique, 1980, 1–6
39 Zheng B. On operators which factor through ℓ_p or c_0. Studia Math, 2006, 176: 177–190
40 Zheng B. On operators from separable reflexive spaces with asymptotic structure. Studia Math, 2008, 185: 87–98
41 Odell E, Schlumprecht T, Zsak A. On the structure of asymptotic ℓ_p spaces. Q J Math, 2008, 59: 85–122
42 Zheng B. Operators on L_p $(2 < p < \infty)$ which factor through X_p. J Funct Anal, 2017, 273: 782–798
43 Gohberg I C, Markus A S, Feldman I A. Normally solvable operators and ideals associated with them. Bul Akad Štiince RSS Moldoven, 1960, 76: 51–70
44 Chen D, Johnson W B, Zheng B. Commutators on $(\sum \ell_q)_{\ell_p}$. Studia Math, 2011, 206: 175–190
45 Dosev D, Johnson W B, Schechtman G. Commutators on L_p, $1 \leqslant p < \infty$. J Amer Math Soc, 2013, 26: 101–127
46 Kania T, Laustsen N J. Uniqueness of the maximal ideal of the Banach algebra of bounded operators on $C([0, \omega_1])$. J Funct Anal, 2012, 262: 4831–4850
47 Laustsen N J, Odell E, Schlumprecht T, et al. Dichotomy theorems for random matrices and closed ideals of operators on $(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_1^n)_{c_0}$. J Lond Math Soc (2), 2012, 86: 235–258
48 Laustsen N J, Schlumprecht T, Zsák A. The lattice of closed ideals in the Banach algebra of operators on a certain dual Banach space. J Operator Theory, 2006, 56: 391–402
49 Lin P, Sarı B, Zheng B. Norm closed ideals in the algebra of bounded linear operators on Orlicz sequence spaces. Proc Amer Math Soc, 2014, 142: 1669–1680
50 Zheng B. Commutators on $(\sum \ell_q)_{\ell_1}$. J Math Anal Appl, 2014, 413: 284–290
51 Rosendal C. Infinite asymptotic games. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2009, 59: 1359–1384
52 Freeman D, Odell E, Sarı B, et al. On spreading sequences and asymptotic structures. Trans Amer Math Soc, 2018, 370: 6933–6953
53 Johnson W B, Schechtman G. Multiplication operators on $L(L_p)$ and ℓ_p-strictly singular operators. J Eur Math Soc (JEMS), 2008, 10: 1105–1119

Linear embedding and factorizations of operators on Banach spaces

Bentuo Zheng

Abstract Embedding theory is one of the most important topics in the geometry of Banach spaces and factorizations of operators are the natural extensions. In this paper, we will first systematically introduce the historical results on isomorphic theory and present some of the recent progress in this direction. Then we will discuss related results about factorizations of operators. Interesting open problems will be listed at the end of the paper.

Keywords **isomorphic embedding, isomorphism, factorization of operators, Schauder basis, unconditional basis**

MSC(2010) **46B03, 46B20**

doi: 10.1360/SSM-2020-0152