交叉滚柱直线导轨五自由度静刚度理论模型

蒋书运*, 王耀

东南大学机械工程学院, 南京 211189

* E-mail: jiangshy@seu.edu.cn

收稿日期: 2020-04-17; 接受日期: 2020-07-27; 网络版发表日期: 2021-01-05

国家自然科学基金(批准号: 51635004, 11472078)资助项目

摘要 交叉滚柱直线导轨广泛应用于机床等精密机械中, 静刚度为交叉滚柱直线导轨的重要性能指标, 然而到目前为止, 尚未见到该导轨静刚度的理论模型的报道. 本研究建立交叉滚柱直线导轨五自由度静刚度的理论模型. 首先, 基于Hertz线接触理论与弹性理论的Boussinesq解, 采用分片法推导了滚柱-滚道接触力及接触力矩的函数表达式; 在此基础上, 建立直线导轨结合部变形协调方程、物理方程与静力平衡方程, 迭代求解方程获得交叉滚柱直线导轨五自由度静刚度. 其次, 以一款交叉滚柱直线导轨为例, 开展了导轨五自由度静刚度的实验测试, 并与理论模型计算结果进行了对比, 验证了本模型的正确性. 最后, 分析讨论了预紧力对交叉滚柱直线导轨各向位移及刚度的影响, 为交叉滚柱直线导轨预紧力的调节奠定理论基础.

关键词 交叉滚柱直线导轨, 静刚度, 五自由度, 预紧力, 接触载荷

1 引言

交叉滚柱直线导轨以其刚性好、精度高、结构紧凑、维护方便且能有效降低工作高度等优点, 被广泛应用于如数控机床等精密机械中^[1,2]. 导轨结合部的静刚度是一项重要的性能指标, 既反映其自身承载能力, 又直接影响机床整机动力学性能^[3]. 由于交叉滚柱直线导轨的滚柱呈十字交错排布, 现有的滚柱直线导轨副静态刚度的理论模型, 特别是结合部变形协调方程与静力平衡方程, 已不适用于交叉滚柱直线导轨, 因此, 建立交叉滚柱直线导轨的静刚度理论模型十分有意义. 然而, 到目前为止, 尚未见到有关交叉滚柱直线导轨静刚度理论模型的报道.

对于国内外开展滚动直线导轨静刚度的研究, 概括起来研究方法可分为两种. (1) 试验测试法. 通过搭建专用的加载-位移测量装置, 获得滚动直线导轨结合部的各向变形与刚度^[4-9]; 也有通过模态测试的方式识别出滚动直线导轨结合部的各向刚度^[10,11]. (2) 理论计算法. 采用Palmgren经验公式^[12,13]或者切片法^[14,15]计算滚柱-滚道接触载荷, 从而建立滚柱直线导轨结合部静刚度理论模型进行刚度求解; 也有学者通过有限元法计算导轨结合部刚度^[16,17].

目前导轨生产企业大多依赖试验测试法获得导轨的刚度值, 该方法带来了十分棘手的问题, 即在导轨设计阶段, 并不清楚滚子与轨道的几何参数与其静刚度的对应关系; 有限元法建模繁琐、工作量大、耗时,

引用格式: 蒋书运, 王耀. 交叉滚柱直线导轨五自由度静刚度理论模型. 中国科学: 技术科学, 2021, 51: 399–412

Jiang S Y, Wang Y. Modeling and analysis on the static stiffness of cross roller guide under five degrees of freedom (in Chinese). Sci Sin Tech, 2021, 51: 399–412, doi: 10.1360/SST-2020-0162

且依赖于大型的商用软件. 现有理论对滚子-滚道接触载荷的计算采用Palmgren经验公式或者实验获得^[18,19], 此类近似方法只对某一直径范围内的滚柱是精确的, 尚无法用于滚柱相对于滚道存在倾斜或者修形滚柱的导轨副计算.

预紧是提高导轨刚性与运动精度的重要技术手段, 目前已有学者研究预紧力对导轨位移、刚度的影响^[18,20,21]. 交叉滚柱直线导轨的预紧力调整是在安装过程中进行的, 与传统滚柱直线导轨相比, 预紧力对交叉滚柱直线导轨的刚度影响更大. 因此, 有必要建立交叉滚柱直线导轨静刚度的理论模型, 研究揭示预紧力对导轨静刚度的影响规律.

考虑到Hertz线接触理论是将滚柱的半径作为计算参数, 因此适用于不同直径的滚柱导轨刚度分析, 采用分片法和弹性理论的Boussinesq解可以处理修形滚柱与滚柱相对滚道倾斜的接触问题. 本文基于Hertz线接触理论与弹性理论的Boussinesq解, 采用分片法推导了滚柱-滚道接触力与接触力矩的函数表达式, 继而建立了交叉滚柱直线导轨五自由度静刚度理论模型, 并运用Newton-Raphson数值迭代法求解此模型获得刚度值. 以一款交叉滚柱直线导轨为对象, 开展了导轨5自由度静刚度的实验测试; 运用本文的理论模型, 进一步分析了预紧力对交叉滚柱直线导轨各向位移与刚度的影响.

2 交叉滚柱直线导轨静刚度理论建模

图1为交叉滚柱直线导轨的结构示意图. 导轨系统主要由左右导轨、左右滑轨、滚柱、基座与工作台组成. 滚柱呈十字交错状, 均匀排列于滚道内, 且滚柱长度略小于滚柱直径, 在确保滚柱与滚道的线接触的同时, 避免了滚柱端面与滚道的接触摩擦. 右导轨被固定在基座上, 通过调节侧向预紧螺钉对左导轨施加横向预紧力.

建立坐标系 $O-XYZ$, 原点位于交叉滚柱直线导轨中心处, X 轴置于直线导轨滑动方向, Y 轴置于水平方向, Z 轴置于竖直方向. 外载荷 F_Z , F_Y 施加于 O 点, 分别沿着 Z 轴、 Y 轴正向, M_X 是绕 X 轴转动的旋转力矩, M_Z 是绕 Z 轴转动的偏航力矩, M_Y 是绕 Y 轴转动的俯仰力矩. 当直线导轨受到外载荷 F_Z , F_Y , M_X , M_Z , M_Y 作用时, 滑轨相对于导轨将分别产生位移 δ_Z , δ_Y , θ_X , θ_Z , θ_Y .

图1 (网络版彩图)交叉滚柱直线导轨结构示意图
Figure 1 (Color online) Schematic diagram of cross roller guide.

2.1 滚柱-滚道线接触模型

对于交叉滚柱直线导轨, 滚柱与滑轨滚道、导轨滚道同时接触, 取单个滚柱、滑轨与导轨作为研究对象, 建立其接触模型, 如图2所示. 为了便于计算, 在滚柱上设置坐标系 A_0-xyz , 滑轨受到外载荷 Q 和绕 O 点的外力矩 M 作用后, 滚柱-滚道接触区发生弹性变形, 远离接触区部分的弹性变形不予考虑. 平行于导轨滚道面的刚性平面为 CD , 平行于滑轨滚道面的刚性平面为 AB , CD 平面为固定面, 滑轨受载后 AB 平面移至 $A'B'$, 可用线位移 δ 、角位移 θ 加以表述.

在坐标系 A_0-xyz 中, 将滚柱沿 y 轴方向接触区域 L 划分为 z 个单元片区, 片区 j 的长度为 $2h_j$, 接触片区 j 所产生的接触力为 Q_j , 如图3所示.

图2 (网络版彩图)滚柱-滚道接触模型
Figure 2 (Color online) Contact model of roller and raceway.

图 3 (网络版彩图)滚柱-滚道接触区的分片离散

Figure 3 (Color online) Discrete slicing of contact area between roller and raceway.

图4为滚柱-滚道接触区的应力分布, 接触片区 j 的半宽为 a_j , 片区 i, j 中心点的 y 轴坐标值分别为 y_i, y_j , 假定在片区 j 内接触应力沿 y 轴方向是均匀分布的, 沿 x 轴方向呈半椭圆的Hertz分布, 其中心处的应力为 p_{0j} , 则接触片区 j 的应力分布为

$$p_j(x, y) = \frac{p_{0j}}{a_j} \sqrt{a_j^2 - x^2}, \quad (1)$$

式中, $p_j(x, y)$ 为在坐标系 A_0 -xyz中接触点 (x, y) 处的应力。

由弹性理论的Boussinesq解^[22], 接触单元 j 内的分布应力引起单元 i 中心处的位移 ω_{ij} 为

图 4 (网络版彩图)滚柱-滚道接触区应力分布

Figure 4 (Color online) Stress distribution of contact area between roller and raceway.

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= \frac{1-\mu^2}{\pi E} p_{0j} \int_{-a_j}^{a_j} \int_{y_j-h_j}^{y_j+h_j} \frac{\sqrt{1-(x'/a_j)^2}}{\sqrt{x'^2+(y_i-y')^2}} dx' dy' \\ &= \frac{1-\mu^2}{\pi E} p_{0j} D_{ij}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中, μ, E 分别为接触体材料的泊松比和弹性模量. 其中 D_{ij} 称为柔度系数^[22], 定义为

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int_{-a_j}^{a_j} \sqrt{1-(x'/a_j)^2} \\ &\quad \times \ln \left[\frac{y_j - y_i + h_j + \sqrt{x'^2 + (y_j - y_i + h_j)^2}}{y_j - y_i - h_j + \sqrt{x'^2 + (y_j - y_i - h_j)^2}} \right] dx'. \end{aligned} \quad (3)$$

通过叠加原理得到单元 i 中心处的位移:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi E} \sum_{j=1}^z p_{0j} D_{ij} \\ = \begin{cases} \delta + \theta y_i - 2Z_i, & \delta > 2Z_i - \theta y_i, \\ 0, & \delta \leq 2Z_i - \theta y_i, \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, z), \end{aligned} \quad (4)$$

式中, $E' = \left[\frac{(1-\mu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\mu_2^2)}{E_2} \right]^{-1}$ 为当量弹性模量; μ_1, μ_2 分别为滚柱和滚道材料的泊松比; E_1, E_2 分别为滚柱和滚道材料的弹性模量; z 为滚柱-滚道接触区分片数;

i, j 为接触片区编号; δ, θ 分别为滑轨受载后相对导轨的线位移和角位移; Z_i 为滚柱的修形方程, 滚柱无修形时 $Z_i=0$.

根据Hertz线接触理论^[22], 可得

$$a_j = \frac{2R}{E'} p_{0j} \quad (j = 1, 2, \dots, z), \quad (5)$$

式中, R 为滚柱的半径。

式(4)和(5)构成 z 阶线性方程组, 当 δ, θ 和 $Z_i (i=1, 2, \dots, z)$ 确定后, 从中可以解出 z 个未知数 $p_{0j} (j=1, 2, \dots, z)$ 与 z 个未知数 $a_j (j=1, 2, \dots, z)$ 。

滚柱-滚道结合部滑轨的静力平衡情况如图5所示, 在坐标系 A_0 -xyz中, 旋转中心 O 点的 y 轴坐标为 $l_{OA} \cos \alpha$, 同时考虑到角位移 θ 为一小量, 可推导出滚柱-滚道接触区内应力对滑轨的总接触力 Q_c 与对 O 点的总接触力矩 M_c 表达式为

$$Q_c = \sum_{j=1}^z \left[2h_j \int_{-a_j}^{a_j} p_j(x) dx \right] = \pi \sum_{j=1}^z h_j p_{0j} a_j, \quad (6)$$

图 5 (网络版彩图) 滚柱-滚道结合部滑轨的静力平衡图
Figure 5 (Color online) Static equilibrium diagram for slide rail of the roller-raceway joint.

$$M_c = \pi \sum_{j=1}^z h_j p_{0j} a_j (y_j - l_{OA} \cos \alpha), \quad (7)$$

式中, l_{OA} 为 $\overline{OA}$ 的长度; α 为 $\overline{OA}$ 与 $\overline{AB}$ 间的夹角。

因此, 滚柱-滚道接触力 Q_c 可表示为线位移 δ 及角位移 θ 的函数:

$$Q_c = K_L(\delta, \theta). \quad (8)$$

滚柱-滚道接触力矩 M_c 可表示为位移 δ , θ 及 O 点位置参数 l_{OA} 和 α 的函数:

$$M_c = K_A(\delta, \theta, l_{OA}, \alpha). \quad (9)$$

2.2 滚道间初始预压量计算

2.2.1 变形协调方程

图 6 示出了在横向预紧力 F_{pre} 与工作台重力 F_G 联合作用下滑轨相对于右导轨的位移情况。右导轨固定在基座上, 当在左导轨施加横向预紧力, 两滑轨相对于右导轨将产生横向线位移 δ_{0Y} , 同时由于滚柱呈十字交

图 6 (网络版彩图) 在横向预紧力 F_{pre} 与工作台重力 F_G 联合作用下滑轨相对于右导轨的位移
Figure 6 (Color online) Displacement of slide rail relative to the right rail under the combined action of F_{pre} and F_G .

错排列状, 在 F_{pre} , F_G 联合作用下, 滑轨相对于导轨将产生垂向线位移 δ_{0Z} 与绕 Y 轴的角位移 θ_{0Y} , 若单排滚道内滚柱数为奇数, 角位移 $\theta_{0Y} = 0$ 。

图 7 示出了在横向预紧力 F_{pre} 与工作台重力 F_G 联合作用下交叉滚柱直线导轨滚道的变形, 在远离滚柱-滚道接触区的两侧分别选取平行于导轨滚道面的平面 C_4D_4 , C_3D_3 与平行于滑轨滚道面的平面 A_4B_4 , A_3B_3 . 对通过滚道 2 内第 k 个滚柱的截面进行分析, 在 F_{pre} 和 F_G 联合作用下, 直线导轨截面中心由 O_{0k} 点移至 O'_{0k} 点, 产生横向位移 δ_{0KY} 与垂向位移 δ_{0KZ} . 截面中心的位移由线位移 δ_{0Y} , δ_{0Z} 与角位移 θ_{0Y} 产生, 其表达式为

$$\delta_{0KY} = \delta_{0Y} (k = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

图 7 (网络版彩图) 在横向预紧力 F_{pre} 与工作台重力 F_G 联合作用下交叉滚柱直线导轨滚道的变形. (a) 滚柱 k 与滑轨上滚道相接触; (b) 滚柱 k 与滑轨下滚道相接触
Figure 7 (Color online) Raceway deformation of the cross roller guide under the combined action of F_{pre} and F_G . (a) Contact of roller No. k with the upper raceway of slide rail; (b) contact of Roller No. k with the lower raceway of slide rail.

$$\delta_{OkZ} = \delta_{0Z} - \theta_{0Y} X_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

式中, δ_{OkY} , δ_{OkZ} 分别为在 F_{pre} 和 F_G 联合作用下通过滚道内第 k 个滚柱的截面中心的横向、垂向位移; δ_{0Y} , δ_{0Z} , θ_{0Y} 分别为在 F_{pre} 和 F_G 作用下滑轨相对于右导轨产生的横向、垂向线位移及绕 Y 轴的转角位移; $X_k = \left(\frac{n}{2} - k + \frac{1}{2}\right)s$ 为第 k 个滚柱截面的 X 轴坐标值; n 为单排滚道内滚柱的数目; k 为滚道内滚柱编号; s 为滚道内相邻滚柱的间距。

若滚柱 k 与滑轨上滚道相接触, C_4D_4 固定, A_4B_4 发生横向位移 δ_{OkY} 与垂向位移 δ_{OkZ} , 移至 $A_4'B_4'$; 若滚柱 k 与滑轨下滚道相接触, C_3D_3 固定, A_3B_3 发生横向位移 δ_{OkY} 与垂向位移 δ_{OkZ} , 移至 $A_3'B_3'$ 的位置, β 为滚柱与滚道间的接触角, $\beta=45^\circ$ 。因此, 通过滚道内第 k 个滚柱截面处滚道间的初始预压力为

$$\delta_{0k} = (-1)^{k+1} \tau \delta_{0kZ} \cos \beta + \delta_{0kY} \sin \beta \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (12)$$

式中, τ 为由滚道内滚柱排布方式决定的系数, 当滚道内第 1 个滚柱 ($k=1$) 与滑轨上滚道相接触时, $\tau=1$, 反之, $\tau=-1$ 。

2.2.2 物理方程

单排滚道内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移为 δ_{0k} 、角位移为 0, 采用 2.1 节提出的计算方法, 可以得到单排滚道第 k 个滚柱与滑轨滚道间的接触力 Q_{0k} 为

$$Q_{0k} = K_L(\delta_{0k}, 0) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13)$$

式中, K_L 为滚柱-滚道接触力函数。

2.2.3 静力平衡方程

图 8 示出了在横向预紧力 F_{pre} 与工作台重力 F_G 联合作用下交叉滚柱直线导轨的静力平衡情况。

在初始预紧状态下, 导轨所受外力矩为 0, 假定绕 Y 轴正向顺时针方向旋转的接触力矩为正, 则交叉滚柱直线导轨在初始预紧状态下的静力平衡方程组为

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n Q_{0k} \sin \beta = F_{pre}, \\ 2 \sum_{k=1}^n \{(-1)^{k+1} \tau Q_{0k} \cos \beta\} = F_G, \\ 2 \sum_{k=1}^n \{(-1)^k \tau Q_{0k} \cos \beta X_k\} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

图 8 (网络版彩图) 在横向预紧力 F_{pre} 与工作台重力 F_G 联合作用下交叉滚柱直线导轨的静力平衡. (a) 垂向力与横向力平衡示意图; (b) 俯仰力矩平衡示意图

Figure 8 (Color online) Static equilibrium diagram of the cross roller guide under the combined action of F_{pre} and F_G . (a) Static equilibrium diagram of vertical and horizontal forces; (b) pitching moment equilibrium diagram.

运用 Newton-Raphson 法, 迭代求解式 (10)~(14), 可获得每个滚柱处滚道间的初始预压力 δ_{0k} ($k=1, 2, \dots, n$).

2.3 垂向线刚度 K_z 的计算

2.3.1 变形协调方程

图 9 示出了在垂向力 F_z 作用下交叉滚柱直线导轨的变形. 以滚道 1 作为研究对象, 在远离滚柱-滚道接触区的两侧分别选取平行于导轨滚道面的平面 C_1D_1 , C_2D_2 与平行于滑轨滚道面的平面 A_1B_1 , A_2B_2 . 当工作台受到垂向外载荷 F_z , 滑轨相对于导轨将产生垂向线位移 δ_z . 由于侧向预紧螺钉锁定, 左导轨被固定, 平面 C_1D_1 , C_2D_2 不动, 平面 A_1B_1 , A_2B_2 在 Z 向产生线位移 δ_z , 移至 $A_1'B_1'$, $A_2'B_2'$ 的位置。

考虑到滚道间的初始预压力, 滚道 1 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移 δ_{1k} 为

$$\delta_{1k} = \delta_{0k} + (-1)^{k+1} \tau \delta_z \cos \beta \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

式中, δ_z 为在垂向力 F_z 作用下滑轨相对于导轨产生的垂向线位移。

2.3.2 物理方程

滚道 1 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移

图 9 (网络版彩图)在垂向力 F_z 作用下交叉滚柱直线导轨结合部的变形

Figure 9 (Color online) Joint deformation of cross roller guide under F_z .

为 δ_{1k} , 角位移为0, 采用2.1节的计算方法, 可以得到滚道1内第 k 个滚柱与滑轨滚道间的接触力 Q_{1k} 为

$$Q_{1k} = K_L(\delta_{1k}, 0) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

2.3.3 垂向力平衡方程

建立直线导轨的垂向力平衡方程为

$$F_z = 2 \sum_{k=1}^n \{(-1)^{k+1} \tau Q_{1k} \cos \beta\} - F_G, \quad (17)$$

式中, F_z 为交叉滚柱直线导轨受到的垂向力。

运用Newton-Raphson法迭代求解式(15)~(17), 可获得垂向力 F_z 作用下滑轨相对于导轨产生的垂向线位移 δ_z , 继而可以得到交叉滚柱直线导轨的垂向线刚度 $K_z = dF_z/d\delta_z$ 。

2.4 横向线刚度 K_y 的计算

2.4.1 变形协调方程

导轨横向线刚度的计算与垂向线刚度相似, 因此,

考虑到滚道间的初始预压量, 滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移 δ_{pk} 为

$$\delta_{pk} = \delta_{0k} + (-1)^p \delta_y \sin \beta \quad (p = 1, 2) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

式中, δ_y 为在横向力 F_y 作用下滑轨相对于导轨产生的横向线位移; p 为滚道编号。

2.4.2 物理方程

滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移为 δ_{pk} , 角位移为0, 运用2.1节提出的计算方法, 可以得到滚道 p 内第 k 个滚柱与滑轨滚道间的接触力 Q_{pk} 为

$$Q_{pk} = K_L(\delta_{pk}, 0) \quad (p = 1, 2) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (19)$$

2.4.3 横向力平衡方程

建立直线导轨的横向力平衡方程为

$$F_y = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^2 \{(-1)^p Q_{pk} \sin \beta\}, \quad (20)$$

式中, F_y 为交叉滚柱直线导轨受到的横向力。

运用Newton-Raphson法迭代求解式(18)~(20), 可获得横向力 F_y 作用下滑轨相对于导轨产生的横向线位移 δ_y , 继而可以得到交叉滚柱直线导轨的横向线刚度 $K_y = dF_y/d\delta_y$ 。

2.5 旋转角刚度 $K_{\theta x}$ 的计算

2.5.1 变形协调方程

图10示出了旋转力矩 M_x 作用下交叉滚柱直线导轨的变形。在滚道1、2两侧距离滚柱-滚道接触区1个滚柱半径的位置, 分别选取平行于导轨滚道面的平面 C_1D_1 , C_2D_2 , C_3D_3 , C_4D_4 与平行于滑轨滚道面的平面

图 10 (网络版彩图)在旋转力矩 M_x 作用下交叉滚柱直线导轨结合部的变形

Figure 10 (Color online) Joint deformation of cross roller guide under M_x .

$A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$, 当工作台在旋转力矩 M_X 作用下, 滑轨相对于导轨将产生旋转角位移 θ_X , 于是 $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ 平面绕 X 轴转动 θ_X , 移至 $A_1'B_1', A_2'B_2', A_3'B_3', A_4'B_4'$.

为了计算受载后滚道两侧刚体平面间产生的相对位移, 以 A_1B_1, A_4B_4 平面作为研究对象, 建立图 11 所示的简化模型.

可推导得线位移 δ_{A1}, δ_{A4} 的表达式为

$$\delta_{A1} = \frac{\cos\left(\frac{\theta_X}{2} + \alpha\right)}{\cos\frac{\theta_X}{2}} l_{OA} \tan\theta_X \approx l_{OA} \cos\alpha \tan\theta_X, \quad (21)$$

$$\delta_{A4} = \frac{\cos\left(-\frac{\theta_X}{2} + \alpha\right)}{\cos\frac{\theta_X}{2}} l_{OA} \tan\theta_X \approx l_{OA} \cos\alpha \tan\theta_X, \quad (22)$$

式中, δ_{A1}, δ_{A4} 分别为 A_1, A_4 点处的线位移; θ_X 为在旋转力矩 M_X 作用下滑轨相对于导轨产生的旋转角位移.

考虑到滚道间的初始预压量, 滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移 δ_{pk} 为

$$\delta_{pk} = \delta_{0k} - (-1)^{k+p} t l_{OA} \cos\alpha \tan\theta_X \quad (p = 1, 2) \\ (k = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

图 12 示出了滚道的相对位置, 滚道 1, 2 间的水平距离为 L_1 , 滚柱-滚道接触角为 β .

在坐标系 $O-XYZ$ 中, A_1 点, B_4 点的 Y 轴坐标及 Z 轴坐标分别为

$$Y_{A1} = -\frac{1}{2}L_1 + \frac{1}{2}\sqrt{D_b^2 + L^2} \cos\varphi_1 + \frac{1}{2}D_b \sin\beta, \quad (24)$$

$$Z_{A1} = -\frac{1}{2}\sqrt{D_b^2 + L^2} \sin\varphi_1 - \frac{1}{2}D_b \cos\beta, \quad (25)$$

$$Y_{B4} = \frac{1}{2}L_1 - \frac{1}{2}\sqrt{D_b^2 + L^2} \cos\varphi_2 - \frac{1}{2}D_b \sin\beta, \quad (26)$$

$$Z_{B4} = -\frac{1}{2}\sqrt{D_b^2 + L^2} \sin\varphi_2 - \frac{1}{2}D_b \cos\beta, \quad (27)$$

式中, D_b, L 分别为滚道内滚柱直径和接触长度; $\varphi_1 = \pi - (\beta + \psi)$ 为 $\overline{ad}$ 与水平线间的夹角; $\varphi_2 = \psi - \beta$ 为 $\overline{bc}$ 与水平线间的夹角; $\psi = \arctan(D_b/L)$ 为 $\overline{ad}$ 与滚柱-滚道接触线间的夹角.

根据滚道结构的对称性, 可得 $\overline{OA_1}, \overline{OB_4}$ 的长度 l_{OA}, l_{OB} 与夹角 α 为

$$l_{OA} = \sqrt{Y_{A1}^2 + Z_{A1}^2}, \quad (28)$$

$$l_{OB} = \sqrt{Y_{B4}^2 + Z_{B4}^2}, \quad (29)$$

$$\alpha = \arccos \frac{L^2 + l_{OA}^2 - l_{OB}^2}{2Ll_{OA}}. \quad (30)$$

2.5.2 物理方程

滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移为 δ_{pk} , 角位移为 θ_X , $\overline{OA_m}$ ($m=1, 2, 3, 4$) 的长度为 l_{OA} , $\overline{OA_m}$ 与 $\overline{A_mB_m}$ ($m=1, 2, 3, 4$) 间的夹角为 α , 运用 2.1 节的计算方法, 可以得到滚道 p 内第 k 个滚柱与滑轨滚道间接触力对 O 点的力矩 M_{pk} 为

图 11 (网络版彩图) 滚道两侧刚体平面间的相对位移. (a) A_1B_1 平面的位移; (b) A_4B_4 平面的位移

Figure 11 (Color online) Relative displacement between the rigid planes on both sides of the raceway. (a) Displacement of the plane A_1B_1 ; (b) displacement of the plane A_4B_4 .

图 12 (网络版彩图)滚道相对位置示意图

Figure 12 (Color online) Relative positions of raceways.

$$M_{pk} = K_A(\delta_{pk}, \theta_X, l_{OA}, \alpha) (p = 1, 2) \quad (31)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n),$$

式中, K_A 为滚柱-滚道接触力矩函数.

2.5.3 旋转力矩平衡方程

图13示出了在旋转力矩 M_X 作用下交叉滚柱直线导轨的力矩平衡情况.

建立直线导轨的旋转力矩平衡方程:

$$M_X = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^2 \{(-1)^{k+p} \tau M_{pk}\}, \quad (32)$$

式中, M_X 为交叉滚柱直线导轨受到的旋转力矩.

运用Newton-Raphson法迭代求解式(23)~(32)可以获得旋转力矩 M_X 作用下滑轨相对于导轨产生的旋转角位移 θ_X , 继而可以得到交叉滚柱直线导轨的旋转角刚度 $K_{\theta X} = dM_X/d\theta_X$.

2.6 偏航角刚度 $K_{\theta Z}$ 的计算

2.6.1 变形协调方程

图14示出了在偏航力矩 M_Z 作用下滑轨相对于导轨的转角位移情况. 当工作台在偏航力矩 M_Z 作用后,

滑轨相对于导轨将产生偏航角位移 θ_Z , 通过滚道内第 k 个滚柱的截面中心将产生 Y 向位移 δ_{kY} :

$$\delta_{kY} = X_k \theta_Z (k = 1, 2, \dots, n), \quad (33)$$

式中, θ_Z 为在偏航力矩 M_Z 作用下滑轨相对于导轨产生的偏航角位移.

图15示出了偏航力矩 M_Z 作用下交叉滚柱直线导轨结合部的变形. 对通过滚道内第 k 个滚柱的截面进行分析, 当工作台在偏航力矩 M_Z 作用下, 截面中心由 O_k 点横向移动 δ_{kY} 至 O'_k 点. 若滚柱 k 与滑轨上滚道相接触, C_1D_1, C_4D_4 固定, A_1B_1, A_4B_4 横向移动 δ_{kY} 至 $A'_1B'_1, A'_4B'_4$ 的位置; 若滚柱 k 与滑轨下滚道相接触, C_2D_2, C_3D_3 固定, A_2B_2, A_3B_3 横向移动 δ_{kY} 至 $A'_2B'_2, A'_3B'_3$ 的位置.

因此, 考虑到滚道间的初始预压量, 滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移 δ_{pk} 为

$$\delta_{pk} = \delta_{0k} + (-1)^p X_k \theta_Z \sin \beta (p = 1, 2) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (34)$$

2.6.2 物理方程

滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移为 δ_{pk} , 角位移为0, 使用2.1节提出的计算方法, 可以得

 图 13 (网络版彩图)在旋转力矩 M_X 作用下交叉滚柱直线导轨的力矩平衡

 Figure 13 (Color online) Rolling moment equilibrium of cross roller guide under M_X .

图 14 (网络版彩图)在偏航力矩 M_Z 作用下滑轨相对于导轨的转角位移

Figure 14 (Color online) Yawing angular displacement of slide rail relative to the guide rail under M_Z .

到滚道 p 内第 k 个滚柱与滑轨滚道间的接触力 Q_{pk} 为

$$Q_{pk} = K_L(\delta_{pk}, 0) \quad (p = 1, 2) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

2.6.3 偏航力矩平衡方程

图16说明了在偏航力矩 M_Z 作用下交叉滚柱直线导轨的静力矩平衡情况。

于是建立直线导轨的偏航力矩平衡方程:

$$M_Z = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^2 \{(-1)^p Q_{pk} \sin \beta X_k\}, \quad (36)$$

式中, M_Z 为交叉滚柱直线导轨受到的偏航力矩。

结合式(34)~(36), 使用Newton-Raphson法可迭代求解出在偏航力矩 M_Z 作用下滑轨相对于导轨产生的偏航角位移 θ_Z , 于是可以得到交叉滚柱直线导轨的偏航角刚度 $K_{\theta Z} = dM_Z/d\theta_Z$.

2.7 俯仰角刚度 $K_{\theta Y}$ 的计算

2.7.1 变形协调方程

导轨俯仰角刚度的计算与偏航角刚度相似, 因此, 考虑到滚道间的初始预压量, 易推导得滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移 δ_{pk} :

$$\delta_{pk} = \delta_{0k} + (-1)^k \tau X_k \theta_Y \cos \beta \quad (p = 1, 2) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (37)$$

式中, θ_Y 为在俯仰力矩 M_Y 作用下滑轨相对于导轨产生的俯仰角位移。

2.7.2 物理方程

滚道 p 内第 k 个滚柱两侧刚体平面间产生的线位移

图 15 (网络版彩图)在偏航力矩 M_Z 作用下交叉滚柱直线导轨结合部的变形。(a) 滚柱 k 与滑轨上滚道相接触; (b) 滚柱 k 与滑轨下滚道相接触

Figure 15 (Color online) Joint deformation of cross roller guide under M_Z . (a) Contact of Roller No. k with the upper raceway of slide rail; (b) contact of roller No. k with the lower raceway of slide rail.

图 16 (网络版彩图)交叉滚柱直线导轨在 M_Z 作用下的力矩平衡示意图

Figure 16 (Color online) Yawing moment equilibrium of cross roller guide under M_Z .

为 δ_{pk} , 角位移为0, 运用2.1节提出的计算方法, 可以得到滚道 p 内第 k 个滚柱与滑轨滚道间的接触力 Q_{pk} 为

$$Q_{pk} = K_L(\delta_{pk}, 0) (p = 1, 2) (k = 1, 2, \dots, n). \quad (38)$$

2.7.3 俯仰力矩平衡方程

建立直线导轨的俯仰力矩平衡方程为

$$M_Y = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^2 \{(-1)^k \tau Q_{pk} \cos \beta X_k\}, \quad (39)$$

式中, M_Y 为交叉滚柱直线导轨受到的俯仰力矩。

运用Newton-Raphson法迭代求解式(37)~(39), 可以获得俯仰力矩 M_Y 作用下滑轨相对于导轨产生的俯仰角位移 θ_Y , 继而得到交叉滚柱直线导轨的俯仰角刚

$$\text{度 } K_{\theta Y} = dM_Y / d\theta_Y.$$

3 实验验证

3.1 测试装置

图17为交叉滚柱直线导轨系统静刚度测试装置。此测试装置主要由一对交叉滚柱直线导轨、工作台、基座、加载重物和两只千分表组成。左右导轨固定在基座上; 左、右滑轨由螺栓与工作台相连接; 加载重物放置工作台的上表面, 用于施加外力; 两只千分表用于测量在外力作用下直线导轨的相对位移。

3.2 测试方法

图18为交叉滚柱直线导轨静刚度测试原理图, 测试过程如下。

(1) 垂向刚度测试: 两只千分表布置在工作台左右两端(A, B 点), 重物 M 放置在工作台中心处(V 点), 读取测点 A, B 位移值 S_A, S_B ; 然后逐步增加重物质量, 逐步读取测点 A, B 位移值 S_A, S_B 。

(2) 旋转角刚度测试: 两只千分表布置在工作台左右两端(C, D 点, $CD=l_Y$), 重物 M 放置在距离工作台中心为 l_R 的 R 点处, 读取测点 C, D 位移值 S_C, S_D ; 然后逐步增加重物质量, 并逐步读取 C, D 两测点位移 S_C, S_D 。

(3) 俯仰角刚度测试: 两只千分表布置在工作台前、后两端(E, F 点, $EF=l_X$), 重物 M 放置在距离工作台中心为 l_P 的 P 点处, 读取测点 E, F 位移值 S_E, S_F ; 然后逐步增加重物质量, 并逐步读取 E, F 两测点位移 S_E, S_F 。

通过测点位移 $S_A \sim S_F$, 可得到导轨垂向线位移 δ_Z 、旋转角位移 θ_X 与俯仰角位移 θ_Y 。

图 17 (网络版彩图)交叉滚柱直线导轨静刚度测试装置. (a) 示意图; (b) 实物图

Figure 17 (Color online) Test device for static stiffness of cross roller guide. (a) Schematic diagram; (b) physical figure.

图 18 (网络版彩图)交叉滚柱直线导轨静刚度测试原理图. (a) 垂向刚度; (b) 旋转角刚度; (c) 俯仰角刚度
Figure 18 (Color online) Test schematic for static stiffness of cross roller guide. (a) Vertical stiffness; (b) rolling angular stiffness; (c) pitching angular stiffness.

$$\begin{cases} \delta_Z = \frac{S_A + S_B}{2}, \\ \theta_X = \frac{S_D - S_C}{l_Y}, \\ \theta_Y = \frac{S_E - S_F}{l_X}. \end{cases} \quad (40)$$

3.3 测试结果

测试导轨的主要几何物理参数列于表1. 加载点距离 l_R , l_P 均为100 mm, 测点距 l_Y , l_X 分别为300, 350 mm, 重物质量 M 的范围为100~600 kg. 图19给出了各向位移的测试结果.

图19为交叉滚柱直线导轨位移随载荷变化关系的测试值与理论值对比. 可以看出, 采用本文理论模型的计算值与实验测试值趋势相同, 随着外载荷的增加, 导

轨各向位移均明显提高, 然而测试值略高于理论值. 究其原因, 在外载荷作用下, 工作台将产生弹性变形, 实验测试值中既含有导轨的位移又含有工作台的变形, 而理论建模时, 仅考虑交叉滚柱直线导轨接触变形, 假设非接触区不出现弹性变形; 此外, 导轨及滑轨几何误差带来的承载不均也将导致直线导轨副实际刚度的下降. 因此, 各向位移的理论值小于测试值是可以理解的.

4 预紧力对交叉滚柱直线导轨五自由度刚度的影响

图20给出了预紧力对交叉滚柱直线导轨五自由度刚度的影响. 以导轨的垂向线刚度为例, 可以看到: 当

表 1 交叉滚柱直线导轨基本参数
Table 1 Basic parameters of cross roller guide

参数	数值	参数	数值
滚柱直径 D_b (mm)	18	工作台重力 F_G (kN)	1
滚柱-滚道接触长度 L (mm)	12.343	横向预紧力 F_{pre} (kN)	12.477
相邻滚柱间间距 s (mm)	22	滚柱、滚道弹性模量 E_1, E_2 (GPa)	206
单排滚道内滚柱数 n	13	滚柱、滚道泊松比 μ_1, μ_2	0.3
滚道1, 2间间距 L_1 (mm)	255	滚道内滚柱排布方式 τ	1

图 19 (网络版彩图)交叉滚柱直线导轨位移外载荷变化关系. (a) 垂向位移与垂向力; (b) 旋转角位移与旋转力矩; (c) 俯仰角位移与俯仰力矩

Figure 19 (Color online) Variation of displacement with external load for the cross roller guide. (a) Vertical displacement vs. vertical load; (b) rolling angular displacement vs. rolling moment; (c) pitching angular displacement vs. pitching moment.

图 20 (网络版彩图)预紧力对交叉滚柱直线导轨五自由度刚度的影响. (a) 垂向线刚度特性; (b) 横向线刚度特性; (c) 旋转角刚度特性; (d) 偏航角刚度特性; (e) 俯仰角刚度特性

Figure 20 (Color online) Effect of preload on 5 degrees-of-freedom stiffness for the cross roller guide. (a) Vertical stiffness; (b) horizontal stiffness; (c) rolling angular stiffness; (d) yawing angular stiffness; (e) pitching angular stiffness.

预紧力较高时(预紧力为10~32 kN), 导轨的垂向刚度随垂向力的增加基本不变; 当预紧力较低时(预紧力为2~8 kN), 若导轨承受较低垂向力, 导轨垂向刚度较高, 且基本不变, 但随着承受垂向力增加到一定值, 导轨垂向刚度陡然下降至低刚度, 此后, 随着垂向力的增加, 导轨垂向刚度缓慢上升. 其余各向刚度特性与垂向线刚度特性存在相似的规律, 不再赘述. 分析其原因: 当预紧力较高时, 导轨滚道内的滚柱皆与滚道产生接触, 预紧力有效; 当预紧力较低时, 随着垂向力增加到一定值, 滚道内有滚柱开始与滚道发生脱离, 预紧力开始失效, 此后, 当与滚道脱离接触的滚柱数不再增加, 导轨预紧力完全失效, 随着外载增大, 滚柱-滚道接触区增大, 因此刚度反而上升.

在导轨处于有效预紧状态时, 提高导轨预紧力, 导轨的各向刚度逐渐提升, 且随着预紧力的提高, 导轨的刚度变化率逐渐减小; 当导轨预紧力完全失效, 在同一外载作用下, 不同预紧力下的导轨刚度相同.

5 结论

(1) 基于Hertz线接触理论与弹性理论的Boussinesq解, 采用分片法推导了滚柱-滚道接触力与接触力矩的函数表达式; 推导出交叉滚柱直线导轨在不同滚柱排布方式下滚道间的初始预紧量; 建立导轨变形协调方程、物理方程与静力平衡方程, 通过迭代求解上述方程, 可获得交叉滚柱直线导轨五自由度静刚度.

(2) 当预紧力较高时, 交叉滚柱直线导轨各向刚度随外载增加几乎保持不变; 当预紧力较低时, 随着外载增加到一定值, 导轨刚度陡然下降, 此后, 随着外载继续增加, 导轨的刚度反而逐渐上升.

(3) 当交叉滚柱直线导轨处于有效预紧状态, 提高预紧力, 导轨的各向刚度逐渐提升, 且随着预紧力的提高, 导轨的刚度变化率逐渐减小; 当导轨预紧力完全失效, 同一外载作用下, 不同预紧力下的导轨刚度相同.

参考文献

- Lee S K, Lee J E, Kim B M, et al. Die design in the complex shape drawing of cross roller guide to improve the dimensional accuracy. *J Mech Sci Technol*, 2007, 21: 1573–1579
- Lv C, Wu J. Research on assembly technology of cross roller linear guide (in Chinese). *Aerosp Man Technol*, 2015, 5: 15–18 [吕宠, 吴杰. 交叉滚柱直线导轨装配技术研究. *航天制造技术*, 2015, 5: 15–18]
- Ohta H, Kitajima Y, Kato S, et al. Effects of ball groupings on ball passage vibrations of a linear guideway type ball bearing (pitching and yawing ball passage vibrations). *J Tribol*, 2007, 129: 188–193
- Rahmani M, Bleicher F. Experimental and analytical investigations on normal and angular stiffness of linear guides in manufacturing systems. *Procedia Cirp*, 2016, 41: 795–800
- Shaw D, Su W L. Stiffness analysis of linear guideways without preload. *J Mech*, 2013, 29: 281–286
- Ohta H, Kato T, Kato S, et al. Carriage drift in linear-guideway type roller bearings. *J Tribol*, 2015, 137: 024505
- Ohta H, Tanaka K. Vertical stiffnesses of preloaded linear guideway type ball bearings incorporating the flexibility of the carriage and rail. *J Tribol*, 2010, 132: 011102
- Song X C, Zhang Y S, Chen H J, et al. Design of the static stiffness test bench for rolling linear guide (in Chinese). *Man Technol Mach Tool*, 2018, 12: 78–82 [宋现春, 张英赏, 陈洪建, 等. 滚动直线导轨副静刚度试验台设计. *制造技术与机床*, 2018, 12: 78–82]
- Heng H, Wang Y L, Feng H T. Design of testing equipment and study of test method for static stiffness of linear motion guide (in Chinese). *Mod Mach Tool Auto Man Tech*, 2014, 2: 106–109 [衡豪, 王禹林, 冯虎田. 滚动直线导轨副静刚度试验装置设计及试验方案研究. *组合机床与自动化加工技术*, 2014, 2: 106–109]
- Liu Y, Song L, Liu N. Modeling and parameters identification of the cross roller guide way. In: *Proceedings of 2012 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. Chengdu, 2012. 692–696
- Dai W, Liu Q. Dynamic characteristic experimental research on the cross roller guide and bolted joints (in Chinese). *Man Technol Mach Tool*, 2008, 9: 141–144 [戴闻, 刘强. 交叉滚子导轨与螺栓结合面动态特性实验研究. *制造技术与机床*, 2008, 9: 141–144]
- Tao W, Zhong Y, Feng H, et al. Model for wear prediction of roller linear guides. *Wear*, 2013, 305: 260–266
- Feng J W, Zhao M L, Chen W J, et al. The calculation and verification for the rigidity of the roller linear guide (in Chinese). *Mech Elec Eng Technol*, 2013, 42: 159–162 [冯健文, 赵美玲, 陈伟就, 等. 滚柱直线导轨副的刚度计算及验证. *机电工程技术*, 2013, 42: 159–162]

- 14 Jiang S, Wang Y, Wang Y. Modeling of static stiffness for linear motion roller guide. *J Tribol*, 2019, 141: 111102
- 15 Horng T L. An analytical solution of the stiffness equation for linear guideway type recirculating rollers with arbitrarily crowned profiles. *Proc Institution Mech Engineers Part C-J Mech Eng Sci*, 2009, 223: 1351–1358
- 16 Sun W, Kong X, Wang B, et al. Statics modeling and analysis of linear rolling guideway considering rolling balls contact. *Proc Institution Mech Engineers Part C-J Mech Eng Sci*, 2015, 229: 168–179
- 17 Pawelko P, Berczyński S, Grządziel Z. Modeling roller guides with preload. *Archives Civil Mech Eng*, 2014, 14: 691–699
- 18 Kwon S W, Tong V C, Hong S W. Five-degrees-of-freedom model for static analysis of linear roller bearing subjected to external loading. *Proc Institution Mech Engineers Part C-J Mech Eng Sci*, 2019, 233: 2920–2938
- 19 Shigeo S, Kenichi O, Hiroshi O. Load distribution and guiding accuracy of cross roller guides. *J Jpn Soc Precis Eng*, 1989, 61: 228–232
- 20 Kong X, Sun W, Wang B, et al. Dynamic and stability analysis of the linear guide with time-varying, piecewise-nonlinear stiffness by multi-term incremental harmonic balance method. *J Sound Vib*, 2015, 346: 265–283
- 21 Song X C, Fan M Z, Wang H, et al. Study on influence of preload on the stiffness characteristics of rollers linear guides (in Chinese). *J Shandong Jianzhu Univ*, 2019, 34: 1–7 [宋现春, 樊明贞, 王皓, 等. 预紧力对滚柱直线导轨副刚度特性影响的研究. 山东建筑大学学报, 2019, 34: 1–7]
- 22 Luo J W, Luo T Y. *Rolling Bearing Analysis and Application* (in Chinese). Beijing: Machinery Industry Press, 2009. 22–24 [罗继伟, 罗天宇. 滚动轴承分析计算与应用. 北京: 机械工业出版社, 2009. 22–24]

Modeling and analysis on the static stiffness of cross roller guide under five degrees of freedom

JIANG ShuYun & WANG Yao

School of Mechanical Engineering, Southeast University, Nanjing 211189, China

The cross roller guide has been widely used in precision machinery, such as machine tools, and contact stiffness is an important performance index of the cross roller guide. However, no report can be found on modeling about the contact stiffness of the cross roller guide. In this study, a theoretical model for the static stiffness of cross roller guide with five degrees of freedom was established. On the basis of the Hertzian line contact theory and the Boussinesq solution of elasticity theory, the function expressions of contact force and moment between the roller and the raceway were derived using the slicing method. On this basis, the guide deformation compatible equation, physical equation, and force equilibrium equation of the guide were established, and the static stiffness of the cross roller guide with degrees of freedom was obtained by iteratively solving the equations. Then, a test rig was developed to measure the static stiffness of the cross roller guide, and the proposed model was verified by comparing the experimental data with the theoretical results. Further analysis regarding the effect of preload on the displacement and stiffness of the cross roller guide was conducted, which lays a theoretical foundation for the preload adjustment of the cross roller guide.

cross roller guide, static stiffness, fivedegrees-of-freedom, preload, contact load

doi: [10.1360/SST-2020-0162](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0162)