岩土孔隙率表征单元体及其分形近似判据

褚召祥^{1,2}, 周国庆^{2*}, 饶中浩¹, 赵光思², 商翔宇², 李瑞林²

1. 中国矿业大学电气与动力工程学院, 徐州 221116;

2. 深部岩土力学与地下工程国家重点实验室, 徐州 221116

* E-mail: gqz@cumt.edu.cn

收稿日期: 2020-09-01; 接受日期: 2020-12-03; 网络版发表日期: 2021-09-03

国家自然科学基金(批准号: 41672343, 41772338, 41902273, 42107156)、111创新引智计划(编号: B14021)、中国博士后科学基金(编号: 2020M681777)和江苏省博士后科学基金(编号: 2020Z434)资助项目

摘要 RVE (representative volume element)/REV (representative elementary volume)的存在性及其确定是尺度效应研究领域的一个基本科学问题. 从复合材料微细观力学、岩土力学与工程领域分别分析了代表性体积单元(RVE)和表征单元体(REV)的异同, 以后者为主要研究对象给出岩土介质REV研究的三层次分类. 进一步以第三层次分类中的孔隙率、孔隙大小及分布分形维数为约束, 引入分形几何理论描述岩土介质复杂孔隙结构, 通过理论公式推演及与已有文献研究结果对比, 提出了一种孔隙大小分布满足分形幂律特征条件下岩土介质孔隙率表征单元体(P-REV)尺度确定的近似判据, 即岩土介质选择其内部最大孔隙孔径5倍的立方体单元即可作为微细观尺度孔隙结构(孔隙率)研究的REV. 后续通过低阶概率函数等统计分析方法进行了验证, 结果表明, 以该近似判据确定的砂岩、泡沫混凝土等岩土试样P-REV与其他方法确定的结果基本吻合, 可以给出具有代表性意义的统计结果, 并在表征精度与计算效率之间提供合理的平衡点.

关键词 岩土工程, 表征单元体, 孔隙, 孔径尺寸分布, 分形

1 引言

作为一种典型的地质材料, 岩土介质(岩石和土)具有结构性且十分复杂, 对其宏观物理力学特性影响显著, 呈现出明显的尺寸效应. 然而, 对岩土介质复杂结构特征进行精确的数学描述与表征进而研究对其宏观物理力学行为的影响、揭示对宏观物理力学行为起控制作用的内禀机制往往十分困难. 因此, 目前多采用经典连续介质力学理论, 忽略岩土介质内部复杂孔、

裂隙结构等缺陷, 以点单元为基础进行理想化处理将其视为密实的宏观连续介质加以分析^[1]. 而实际岩土体为断续/多孔介质, 不同于金属材料(该类材料的空隙和杂质等缺陷尺寸与材料构件本身尺寸相比极其微小, 可忽略^[2]). 此时, 评价连续介质力学理论与方法适用性的基本概念: 代表性体积单元(representative volume element, RVE)和表征单元体(representative elementary volume, REV)的存在性及其确定就成为上述问题研究的关键, 也是岩土力学与工程领域的一个基

引用格式: 褚召祥, 周国庆, 饶中浩, 等. 岩土孔隙率表征单元体及其分形近似判据. 中国科学: 技术科学, 2021, 51: 1107–1126

Chu Z X, Zhou G Q, Rao Z H, et al. Porosity-based representative elementary volume for geomaterials and its fractal theory-based approximate criterion (in Chinese). Sci Sin Tech, 2021, 51: 1107–1126, doi: 10.1360/SST-2020-0371

本科学问题^[3,4]。

目前, 已有大量聚焦于岩土RVE/REV的研究。在宏观工程尺度, 蒋宇洪等人^[5]以有限尺度测试窗法为基础提出了一种选择藏式古建石砌体代表性体积单元RVE的方法。Long等人^[6]和Oda^[7]等学者将Bear^[4]首次提出的REV概念引入裂隙岩体这一研究领域。王晓明和郑银河^[8]、向文飞等人^[9,10]针对裂隙岩体REV进行了系统梳理, 分析了其基本概念、力学意义与确定方法。分析后发现, 该类研究多关注于裂隙岩体等效力学性质与渗透特性。在微细观尺度, Hill^[11]定义的代表性体积representative volume (RV)是RVE概念形成的雏形, 但其研究对象为复合材料的细观弹性力学特性。李瑞林^[12]聚焦应力梯度, 建立了基于代表性体积单元RVE的颗粒岩土介质高阶连续介质力学模型。Bear^[4]在研究多孔介质土体渗流时首次提出了REV的概念, 并被广泛应用于土壤物理^[13,14]和数字岩芯^[15-17]等岩土多孔介质输运领域。上述大量研究将RVE/REV概念应用于大尺度裂隙岩体和非均质岩土多孔介质, 在取得了丰富的研究成果、深化了人们对岩土尺寸效应认识的同时, 也带来了一些问题。比如, 对RVE/REV等概念的过度解读以及使用导致了在取样、测试及验证过程中的混乱, 并产生了一些争议^[18], 仅从字面分析就存在RVE和REV的两种不同表述。其次, 根据所研究和感兴趣不同特性参数确定的RVE/REV也存在不同程度的差异^[13,18-22], 对上述不同约束参数尚未开展较为全面、详细地层次分类, 难以进行横向比较^[14]。

另外, 针对多相/组分-多孔/颗粒岩土介质, 目前已经可以通过CT、3D打印等技术手段在一定程度上打开其内部复杂结构这一“看不见、摸不着”黑箱(黑箱变灰箱)^[23,24], 对岩土微细观复杂结构进行准确表征和直观显示。以此为基础, 进而开展的微细观尺度(如孔隙/颗粒尺度)岩土介质热力学行为精细化研究逐渐引起了诸多学者的关注^[25]。但该类研究往往涉及数据量巨大, 受制于计算机的存储和运算能力, 有必要选择特定感兴趣区域内的RVE/REV, 在表征精度与计算效率、成本之间找到合理的平衡点^[26,27]。以CT图像重构岩土三维数字结构为例, Ni等人^[28]和王刚等人^[29]认为200×200×200像素煤的REV结构计算误差最小。刘语等人^[30]通过统计分析认为南京粉细砂孔隙结构CT图像REV尺度为400像素。程志林等人^[31]认为数字岩芯REV大小在300~500个像素范围。针对未固结颗粒岩

土材料, 部分学者认为其REV可通过粒径分布^[32](particle size distribution, PSD)比如均值粒径 D_{50} 进行归一化处理来衡量^[33-35]。这与宏观工程尺度裂隙岩体REV通过平均/最大节理迹长衡量类似^[36-38]。但在岩土孔隙/颗粒二元介质系统中(尤其是已固结强胶结岩石类材料), 却鲜有研究通过另一PSD信息即孔径分布(pore size distribution)来评价REV尺度大小。此外, 部分学者尝试通过引入分形几何理论来描述岩土复杂结构, 建立以分形维数衡量REV尺度的判定标准。如王媛等人^[39]和Wu等人^[40]等分别建立了基于土体裂隙和煤体孔隙分维数估算其REV的方法。卢波等人^[38]提出应采用分形几何的观点在裂隙岩体结构宏观分区的基础上研究其REV, 与Zhang等人^[41]开展的裂隙岩体REV与分形维数关系研究的思路类似。分析该类研究后发现, 通过岩土微细观尺度孔、裂隙/颗粒分形几何特征确定其REV尺度可以有效解决表征精度与计算效率、成本之间的矛盾。但相对裂隙/颗粒, 以岩土内部孔隙的孔径分布为基础, 结合分形理论确定岩土REV的研究仍相对较少。

基于上述存在的问题, 本文聚焦岩土力学与工程领域RVE/REV这一基本科学问题, 在对其概念来源、取样测试、确定与验证方法分析的基础上提出了岩土介质REV研究的三层次分类; 以CT图像重构岩土三维数字结构为基础, 提出了一种岩土介质孔隙大小分布满足分形幂律特征条件下其REV尺度确定的近似判据, 可为相关研究提供参考。

2 岩土RVE/REV研究的三层次分类

2.1 RVE分析

RVE概念的雏形是RV, 最早由Hill^[11]在1963年提出, 主要用于研究复合材料细观弹性力学特性。以其定义为基础, Hill从普适性能量角度以应变能函数形式提出了经典的Cauchy体Hill定理, 是连续介质细观均匀化理论形成的前提^[42,43]。该定理为^[44,45]对任意体积为 V 边界为 S 的RVE结构, 在指定边界条件下的应力场与应变场需满足下式:

$$\overline{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}} - \overline{\sigma_{ij}} \overline{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{V} \int_S (u_i - \overline{\varepsilon_{ij}} x_j) (n_k \sigma_{ki} - n_k \overline{\sigma_{ki}}) dS, \quad (1)$$

式中, σ_{ij} 和 ε_{ij} 分别为应力和应变张量; n_k 为边界外法线

方向; x_j 为边界点坐标; u_i 为边界点位移; $\bar{\sigma}$ 为物理场量在 RVE 上的体积平均, 如宏观物理场 σ_{ij} 为细观物理场 σ_{ij} 在 RVE 上的体积平均 $\bar{\sigma}_{ij}$ 为

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad (2)$$

同样, 对平均应变有

$$\varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (3)$$

结合 RVE 内的控制方程与边界上的平衡方程, 利用 Gauss 定理可以进一步将平均应力和平均应变表示为 RVE 边界积分的形式, 即可得出式(1).

在均匀化理论中, 恰当的 RVE 边界条件对于推导非均质材料的宏观本构模型及发展相应的均匀化计算方法是极为重要的^[44,45]. 而 Hill 定理即式(1)可以指导如何施加边界条件, 为正确给定 RVE 边界条件提供了理论依据. 当 RVE 边界条件满足下式时:

$$u_i|_S = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j \text{ 或 } n_k \sigma_{ki}|_S = n_k \bar{\sigma}_{ki}, \quad (4)$$

式(1)即退化为 Hill-Mandel 细宏观能量等价准则:

$$\bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}. \quad (5)$$

Hill 定理及 Hill-Mandel 细宏观能量等价准则是均匀化理论研究材料细观结构与其宏观属性间关系的桥梁, 已充分发展并被广泛应用于复合材料、颗粒介质及岩土工程等非均质材料领域. 虽然该定义起源并多用于复合材料领域, 在岩土工程中对 RVE 的使用较少, 但上述能量观点可以对 RVE 的普适性概念进行阐述, 作为多尺度问题研究中 RVE/REV 的第一层次定义用于岩土力学与工程领域.

2.2 REV 分析

REV 概念是由 Bear^[4] 于 1972 年在研究多孔介质土体渗流时首次提出, 后由 Long 等人^[6] 和 Oda^[7] 等学者引入裂隙岩体等领域. 目前该概念已在岩土领域内被普遍认可, 且广泛应用于岩土多尺度问题的研究, 以分析其尺寸效应. Bear 在提出 REV 概念时同样从连续介质力学点单元入手, 通过流体密度引出对 REV 的描述, 如图 1(a). P 点流体密度 ρ 为^[4]

$$\rho(P) = \lim_{\Delta U_i \rightarrow \Delta U_0} \rho_i = \lim_{\Delta U_i \rightarrow \Delta U_0} (\Delta m_i / \Delta U_i). \quad (6)$$

进一步, Bear^[4] 以多孔介质土体最重要的统计性结构参数——孔隙率(n)阐述 REV 概念, 如图 1(b). P 点多孔介质土体的体积孔隙率为

$$n(P) = \lim_{\Delta U_i \rightarrow \Delta U_0} n_i \{ \Delta U_i(P) \} = \lim_{\Delta U_i \rightarrow \Delta U_0} \frac{(\Delta U_v)_i(P)}{\Delta U_i}, \quad (7)$$

式(6)和(7)中, m 为质量, U 为体积.

图 1(a)和(b)表明密度或孔隙率随体积的变化分为三个明显的阶段: 微观波动区、稳定区和单调增长/稳定区. 当所选择 P 点附近的微小研究域体积 $\Delta U_i < \Delta U_0$ 时, 必须考虑分子间作用力或孔隙/颗粒的存在, 此时难以采用固定的单一参数值代表 P 点附近流体密度或孔隙率参数. 体积 ΔU_0 即可称为表征单元体 REV, 它是数学意义上 P 点处多孔介质的物理体积. 当 $\Delta U_i > \Delta U_0$ 时, 在误差允许范围内可采用单一固定值描述 P 点附近相应的物理参数.

已有研究^[33,46] 和图 1(c)均表明, REV 确定研究具有主观性. 为了提供相对明确的测试方法, Bear 和 Bachmat^[47] 提出 REV 确定的三种数学描述.

(1) 在所研究控制域 Ω 内, x 点处附近体积 V_i 的某一特性参数值为 $Y(x, V_i)$, 则该研究域内的 REV (大小为 V_0) 需满足

$$\left. \frac{\partial Y(x, V_i)}{\partial V} \right|_{V_i=V_0} = 0, \quad (8)$$

式中的中心差分形式可提供 REV 具体测试方法:

$$\nabla(Y)|_{V_i} = \frac{Y(V_{i+1}) - Y(V_{i-1})}{V_{i+1} - V_{i-1}} \approx 0, \quad (9)$$

式中, $\nabla(Y)$ 为特性参数值的梯度变化.

(2) 当所研究控制域 Ω 近似为均匀介质处理时, 其某一特性参数的波动需控制在较小范围内, 满足

$$\delta(Y_i) = \frac{Y_{\max}(V_i) - Y_{\min}(V_i)}{\bar{Y}(V_i)} \ll 1, \quad (10)$$

式中, $\delta(Y)$ 是特性参数值 Y 的无量纲波动范围; $Y_{\min}$, $Y_{\max}$ 和 $\bar{Y}$ 是控制域 Ω 内体积 V_i 测试特性参数的最小、最大和平均值. 需要说明的是, $\delta(Y)$ 的确定同样存在一定的主观性, 比如式(10)中的 1.

(3) 采用统计概率形式分析, 在所研究控制域 Ω 内体积 V_i 的特性参数 $Y(x, V_i)$ 若可以近似为一固定的随机变量函数, 则该 V_i 即为其 REV, 满足

图1 REV概念定义的图形示意. (a) 流体密度定义^[4]; (b) 多孔介质孔隙率定义^[4]; (c) REV定义

Figure 1 REV Concept and graphical schematic. (a) Definition of the fluid density [4]; (b) definition of the porosity for porous media [4]; (c) definition of the REV.

$$E[Y(x, V_i)] = \theta = \text{const}, \quad (11)$$

$$\text{Var}[Y(x, V_i)] = E\left\{[Y(x, V_i) - \theta]^2\right\} = \text{const}, \quad (12)$$

式(11)和(12)中, $E[Y(x, V_i)]$ 和 $\text{Var}[Y(x, V_i)]$ 分别为 Y 的期望和方差.

上述对REV概念的描述基于岩土多孔介质的结构假设, 多采用体积平均法处理. 与均匀化方法相比, 体积平均法的本质与其类似, 均是多尺度问题研究中尺度升级(Up-scaling)的有效手段, 但也存在一些差异.

姚军等人^[15]在其油气渗流力学的评述中给出了二者同异性的对比. 综合分析, Bear基于多孔介质REV概念的数学描述可以作为岩土多尺度问题研究中RVE/REV的第二层次定义进行阐述.

2.3 RVE/REV研究角度、取样测试及验证方法

2.3.1 研究角度分类

如前文所述, 已有学者基于不同研究问题与研究兴趣对岩土RVE/REV从不同角度开展了大量研究工作, 主要涉及岩土基本结构参数如孔径/粒径及分布、裂隙/节理迹长及密度、孔隙率、迂曲度、比表面积、分形维数等; 岩土宏观物理力学特性如扩散(菲克定律)、渗透(达西定律)、导电(欧姆定律)、导热(傅里叶定律)和强度(胡克定律)等. 根据上述研究角度的不同, Al-Raoush等人^[21]将岩土多孔介质REV分为两类: 孔隙率REV和宏观特性参数REV; 王晓明和郑银河^[8]、Esmaili等人^[20]将裂隙岩体REV分为几何REV (geometrical REV)和力学REV (mechanical REV)两类, 与Zhang等人^[22]将裂隙岩体RVE分为几何RVE (geometrical RVE)和结构RVE (structural RVE)类似; 部分学者还提出了统计REV^[48]和分形REV^[17]的分类. 通常情况下针对微细观尺度岩土介质首选孔隙率参数以考察确定其REV^[17,26,49~53], 这也与Bear首次提出REV概念时所使用的孔隙率参数约束是一致的. 本文3.1~3.3节主要研究内容也以孔隙率为基础开展岩土REV尺度确定研究. 需要说明的是, 部分研究已经表明, 基于孔隙率参数确定的岩土REV与其他参数约束REV存在明显的差异. 一般情况下孔隙率REV均偏小, 不足以作为其他宏观特性研究的REV使用^[13,21,33,49~53]. 基于对上述研究的分析, 提出了岩土RVE/REV确定研究的三种分类.

(1) 孔隙率REV (porosity-based REV, P-REV)

将岩土材料(微细观尺度)视为多孔介质, 分析孔隙率参数随试样体积的变化波动进而确定相应REV, 是基于岩土REV概念起源的最基本分类.

(2) 几何结构REV (geometrical and structural REV, G&S-REV)

以可直接观测的岩土几何结构参数为基础, 开展统计分析, 分析其随尺度的变化规律, 确定相应REV. 此类参数主要有孔径/粒径及分布、裂隙/节理迹长及密度、迂曲度、比表面积、分形维数等.

(3) 热-水-力-电REV(thermal-hydrological-mechanical-electrical REV, THME-REV)

通过室内试样试验或数值模拟实验得到某一宏观物理力学特性参数, 进而确定该参数所对应的REV. 比如热学中的导热系数、水力学中的渗透系数、力学中的弹性模量以及电学中的电导率等.

2.3.2 取样测试分类

在研究确定岩土介质REV时, 主要通过采样窗口法(sampling window method)选取不同尺度大小试样(sub-volume)开展研究. 但在具体的取样方式选择时则存在多种不同的情况. 比如, Brown等人^[18]提出切片、中心点覆盖棱柱和非覆盖相邻棱柱三种采样法; Baveye等人^[54]提出了中心立方体、相邻立方体、中心平行六面体和非中心平行六面体四种取样法. 部分窗口采样法如表1^[13,18,33,54,55]所示.

总体分析上述取样方法主要考虑两方面因素: 取样几何形状和是否随机性(确定性). 在前人研究的基础上, 本文参考Koestel等人^[14]、Fernandes等人^[26]和Wu等人^[40]的采样方法以圆柱形岩土微细观CT三维重构数字模型为例, 提出8顶点立方体覆盖取样法, 如图2所示, 具体流程如下.

(1) 最大参考试样确定

2D/3D数字图像的最小基本单元像素/体素在几何形态上呈现为标准的正方形或立方体, 而一般用于CT扫描的标准岩土试样均为圆柱形, 为了统一表示, 采用常规认识中的立方体作为REV几何形状并采用正方形/立方体边长(像素/体素数量)刻画REV尺度大小. 同

时, 为了消除边界效应^[33], 需要确定CT三维重构数字模型内的最大立方体参考试样.

如图2中上部图形示意图所示. 假设CT扫描视场形成图像的像素大小为 $A \times A$, 其内切圆为试样CT扫描形成的切片图像. 以CT扫描视场图像四边中点为顶点, 形成试样圆形CT切片图像的内接正方形. 在左上第二象限内连接试样CT图像圆点至CT视场图像端点与内切圆、内接方形分别交于M点和N点, 取MN线段中点A为最大参考立方体试样的一个顶点. 采用同样方法确定其余顶点, 即可形成最大立方体参考试样A(E)B(F)C(G)D(H), 其边长大小约为 $\lceil (1 + \sqrt{2}) A / 4 \rceil$ 体素.

(2) 8顶点立方体覆盖取样

依次选择所确定最大立方体参考试样的8个顶点ABCDEFGH为基准点, 如图2中下部图形以B顶点为例, 设置某一恒定/非恒定空间步长 l (体素数量), 以恒定空间步长为例不断增加边长大小为 $l, 2l, \dots$ 直至最大立方体参考试样的边长, 以确定不同取样大小. 此时每一边长大小水平的子立方体均有8种不同情况, 共 $8 \times \lceil \lceil (1 + \sqrt{2}) A / 4 \rceil / l \rceil - 7$ 个不同子立方体试样(-7是由于每个顶点基准最大时的8种工况是相同的), 分析参数的尺寸相关性.

2.3.3 验证方法分类

在确定了RVE/REV的相关概念定义及具体的取样测试方法后, 最重要的是其量化验证方法. 目前主要有以下量化验证REV尺度大小的方法: 直观经验判断法、统计学方法及其他如曲线拟合法和灰关联分析

图2 (网络版彩图) REV采样窗取样示意图

Figure 2 (Color online) Sampling window method.

表 1 岩土孔隙率REV确定采样方法划分

Table 1 Classification of sampling window methods for porosity-based REV

文献	采样方法	示意图	几何形状	确定/随机
Brown 等人 ^[18]	(a) 堆叠切片取样	(a)	2D 圆形	确定性
	(b) 中心点覆盖棱柱取样	(b)	3D 棱柱	确定性
	(c) 非覆盖相邻棱柱取样	(c)	3D 棱柱	随机性
Baveye 等人 ^[54]	(a) 中心立方体取样	(a)	3D 立方体	确定性
	(b) 相邻立方体取样	(b)	3D 立方体	
	(c) 中心覆盖平行六面体取样	(c)	3D 六面体	
	(d) 非中心覆盖平行六面体取样	(d)	3D 六面体	
Costanza- Robinson 等人 ^[33]	(a) 上下两点中心立方体取样	(a)	3D 立方体	确定性
	(b) 中心棱柱取样	(b)	3D 长方体	
Borges 等人 ^[13]	(a) 中心同轴棱柱取样	(a)	3D 长方体	确定性 随机性
	(b) 随机棱柱取样	(b)	3D 长方体	
Santos 等人 ^[55]	(a) 轴向同轴圆柱取样	(a)	3D 圆柱体	确定性
	(b) 轴向切片式圆柱取样	(b)		
Wu 等人 ^[17]	九点立方体取样		3D 立方体	确定性

等^[8]。直观经验判断法通常根据绘制的参数随体积变化曲线或散点图直接主观量化确定REV大小, 虽然简单快捷, 但因人而异, 具有较强的主观臆断性, 尤其当

样本数量较少时容易产生较大的误差。统计学方法, 比如各种相对、梯度误差分析, 变异系数分析以及T和F假设检验等, 具有科学、严谨的特点以及足够的可信

度保证,且检验方法与参数多样,可满足不同情况需要,是目前岩土REV验证确定的主要手段.除此之外,还有一些如曲线拟合法、灰关联分析法及人工神经网络等也得到了不同程度的应用.其对比分析如表2^[19,20,22,28,30,36,38,46,48,52,56~61]所示.

2.4 岩土REV研究的三层次分类

上述2.1~2.3节分析了代表性体积单元(RVE)和表征单元体(REV)的基本概念与来源,研究角度、取样测试及验证方法,得出以下结论与建议.

(1) RVE与REV概念基本一致,但也存在区别. RVE更侧重于力学理论上的基础单元,对应经典点单元,具有高度抽象性,仅在理论上存在而实际中可能并不存在. REV虽然也具有类似力学属性,但更侧重实验和应用层次,一般情况下是实际存在的. 岩土力学与工程领域建议以Bear首次提出的表征单元体(REV)统一表示,避免与复合材料/固体力学领域常用的代表性体积单元(RVE)引起书写上的混乱.

(2) 岩土REV研究可分为三种不同层次分类,如图3所示. 普适性理论研究,主要从能量角度研究岩土介质的微细观结构与宏观属性间的关系,分析其尺寸效应的统一性原理. 该类研究主要为其他层次的研究提供顶层指导思想与方法; 数学角度定量化研究,主要研究REV基本概念的数学描述,以提供岩土多尺度问题研究中具体的方法论,为后续实施方法的建立奠

定理论基础; 可操作性方法研究,主要从实验与模拟角度研究岩土REV存在性及确定具体实施方法,在顶层思想、理论模型的指导下应具有可操作性、能落地.

(3) 针对岩土REV研究国内外学者根据不同问题中的关注点已经开展了大量的研究工作并取得了丰富的研究成果. 后续是否可以根据岩土应用领域进行分类,比如裂隙岩体、数字岩芯以及土壤物理等,对不同的取样、测试与验证方法建立相应的标准体系与研究方法数据库,可能更有利于加深人们对该基本科学问题的认识及相关问题的解决.

3 岩土孔隙率REV确定分形近似判据

近年来,以CT等为代表的可视化技术在数字岩芯、土壤物理等领域获得了广泛应用. 为了解决计算效率与表征精度间的矛盾,有必要选择并确定特定感兴趣域内的岩土REV^[26,27]. 因此,以孔径分布曲线为基础,建立了孔隙大小分布满足分形幂率特征条件下岩土孔隙率REV尺度确定的近似判据,可以为数字岩芯、土壤物理及其他相关领域研究提供参考.

3.1 分形几何理论基础

Yu和Cheng^[62]将多孔介质内的孔隙类比为地球上的岛屿,通过对Mandelbrot提出的分形幂率标度关系

表2 REV验证方法分类

Table 2 Classification of REV verification

方法	简介	优点	缺点	文献
直观判断法	通过参数变化趋势人为主观确定	简单快捷	精确度差	[28,36,38]
相对、梯度 误差分析	$\varepsilon = 2 \frac{K_{ave}^{i+1} - K_{ave}^i}{K_{ave}^{i+1} + K_{ave}^i}; \varepsilon_s = \frac{K_{ave}^{i+1} - K_{ave}^{i-1}}{\delta(K_{ave}^{i+1} + K_{ave}^{i-1})}$			[19,56]
变异性系数分析	$CV = \sigma(\text{标准差}) / \mu(\text{平均值})$	科学、严谨,可信度高,方法与参数多样,满足不同情况需要	需要大量的样本数据以支撑结论	[46,48,52]
F, T假设检验	F-方差齐性检验; T-显著性检验			[20,30,57]
K-S, W假设检验	$K-S: D_{sta} = \max S_i(x_i) - R_j(x_i) , p = P(D_{sta} \geq D_{crit});$ $W: p = P(U \geq U_s)$			[22,58]
曲线拟合法	曲线拟合后通过相关程度判定, $RMS=0.2$			[59]
灰关联分析法	$r_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \zeta(k)$, 关联度及斜率计算判断	样本的需求与计算量相对较小、方法独特	应用较少 适用性受限	[60]
人工神经网络法	—			[61]

图3 (网络版彩图) 岩土REV研究三层次分类

Figure 3 (Color online) A three-level classification of the REV determination for geomaterials.

推导得出多孔介质中孔隙数量与孔隙大小(孔径/半径)的分形标度关系

$$N(r' \geq r) = (r_{\max}/r)^{D_f}, \quad (13)$$

将参考半径 r 用最小半径 $r_{\min}$ 替换, 则式(13)可改写为^[62]

$$N_{\text{total}}(r' \geq r_{\min}) = (r_{\max}/r_{\min})^{D_f}, \quad (14)$$

式(13)和(14)中, N 为分形多孔介质中孔隙半径大于或等于 r 的累积孔隙数量; N_{total} 为分形多孔介质中孔隙总数量; r' 为度量尺度; r 为孔隙半径; $r_{\min}$ 和 $r_{\max}$ 代表自相似区间范围, 分别为最小和最大孔隙半径; D_f 为孔隙大小分布分形维数, $0 < D_f < 2$ (二维空间), $0 < D_f < 3$ (三维空间)。

严格意义上讲, 多孔介质中孔隙大小的度量尺度 r' 是离散、不连续的。因此, 不能对其进行微分运算。但是, 由于所研究该类问题包含的度量结果-数量巨大, 其度量尺度-半径(直径)等可近似视为连续和可微分函数, 从而可以进行微积分运算^[63]。针对式(13), 公式两边对 r 微分有

$$-dN = D_f \cdot r_{\max}^{D_f} \cdot r^{-(D_f+1)} dr, \quad (15)$$

式中给出了半径为 r 至 $r+dr$ 区间内孔隙数量与孔隙大小(半径)间的分形标度微分关系, 负号表明孔隙数量与半径成反比即孔隙数量随半径增大而减小。该微分关系式是本文研究的分形理论基础。

3.2 岩土孔隙率REV分形近似判据的提出

选择土科学中经典的毛细管(束)假设模型描述岩土多孔介质内部孔隙结构。该模型的基本假设为岩土多孔介质中的孔隙由一束不同直径分布的圆柱形毛细管组成, 各毛细管高度相等且平行分布, 在输运方向上毛细管的管径保持不变, 如图4所示。

选择如图4中所示的边长为 L_0 表征单元体REV(或称之为一个分形集合单元), 垂直于毛细管轴向的横断面上单个半径为 r 的毛细管断面面积为

$$S(r) = \pi r^2, \quad (16)$$

横断面上自相似区间范围内所有毛细管面积为

$$S_{\text{pore}} = - \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} S(r) dN, \quad (17)$$

将式(15)中 $-dN$ 的表达式带入到式(17)中, 得出

$$\begin{aligned} S_{\text{pore}} &= \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \pi r^2 \cdot D_f \cdot r_{\max}^{D_f} \cdot r^{-(D_f+1)} dr \\ &= \frac{\pi D_f}{2-D_f} r_{\max}^{D_f} \left(r_{\max}^{2-D_f} - r_{\min}^{2-D_f} \right) \\ &= \frac{\pi D_f}{2-D_f} r_{\max}^2 \left[1 - \left(\frac{r_{\min}}{r_{\max}} \right)^{2-D_f} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

这里, 近似认为每一个垂直于毛细管轴向横断面的面孔隙率与体积孔隙率相等, 则可以得到任意横断面面积与相关参数的关系为

图 4 孔隙结构毛细管模型示意图

Figure 4 Schematic diagram of capillary bundle model for porous structure.

$$S = L_0^2 = \frac{S_{\text{pore}}}{\phi} = \frac{\pi D_f}{(2-D_f)\phi} r_{\text{max}}^2 \left[1 - \left(\frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}} \right)^{2-D_f} \right], \quad (19)$$

式中, ϕ 为孔隙率.

Yu和Li^[64]从精确自相似分形几何推导演绎出统计自相似分形多孔介质孔隙率与分形维数、度量尺度自相似区间等参数间的统一关系, 以二维空间为例

$$\phi = (r_{\text{min}} / r_{\text{max}})^{2-D_f}, \quad (20)$$

式(20)可以进一步转化为

$$D_f = 2 - \frac{\ln \phi}{\ln \left(\frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}} \right)}, \quad (21)$$

将式(20)带入到式(19), 则任意横断面面积与相关参数的关系可改写为

$$S = L_0^2 = \frac{S_{\text{pore}}}{\phi} = \frac{\pi D_f (1-\phi)}{(2-D_f)\phi} r_{\text{max}}^2, \quad (22)$$

整理式(22)可以得到类似式(20)和(21)的形式:

$$\phi = \frac{\pi D_f \left(\frac{r_{\text{max}}}{L_0} \right)^2}{\pi D_f \left(\frac{r_{\text{max}}}{L_0} \right)^2 + (2-D_f)}, \quad (23)$$

$$D_f = \frac{2\phi}{\phi + \pi(1-\phi) \left(\frac{r_{\text{max}}}{L_0} \right)^2}. \quad (24)$$

以式(21)为基础, 通过与已有文献研究结果(Krohn和Thompson^[65]、Smidt和Monro^[66]、Yu等人^[62,67])进行对比和近似拟合分析, Feng等人^[68]得出当 $r_{\text{min}}/r_{\text{max}} \approx 10^{-3}$ 时真实多孔介质孔隙大小分布分形维数与孔隙率关系的理论预测与实验结果比较吻合, 如图5(a)^[68]所示. 因此, 提出将 $r_{\text{min}}/r_{\text{max}} \approx 10^{-3}$ 作为由孔隙率确定分形维数的一个近似参考依据^[63,68]. 针对同一系列实验数据, 当采用 r_{max}/L_0 指标即式(24)时, 数据吻合度较高的情况则是 $r_{\text{max}}/L_0 \approx 0.1$, $R^2 \approx 0.656$, 如图5(b)所示. 因此, 本文提出可以将 $r_{\text{max}}/L_0 \approx 0.1$ 作为由PSD(孔径分布)确定REV尺度 L_0 的一个近似判据, 即岩土多孔介质选择其内部最大孔隙半径10倍(孔径5倍)的立方体单元即可作为孔隙结构(孔隙率)研究的REV. 需要说明的是上述分析过程中所采用的文献中实验数据是在三维空间测量得到. Costa^[69]认为三维空间分形维数与二维平面分形维数两者间恰好相差为1, 即

$$D_{f,3} = D_{f,2} + 1. \quad (25)$$

Wu等人^[40]认为二者相差并不一定严格为1, 为

$$D_{f,3} = C D_{f,2} + 1, \quad (26)$$

式中 C 与二维平均分形维数有关.

郁伯铭等人^[63]同样认为同一孔隙在二维和三维空间的分形维数数值相差并不总是精确地为1, 这与二维和三维孔隙率及自相似范围区间有关. 本文近似认为二者相差为1, 与郁伯铭等人^[63]、Feng等人^[68]处理方法类似, 将文献中的分形维数实验数据减去1, 再分别与式(21)和(24)计算结果进行比较.

3.3 验证与分析

根据前面所提出的近似判据, 最大孔隙尺寸(孔径)就成为了岩土孔隙率REV确定的关键. 这与人们常规认识中多孔介质的宏观输运性质如渗透、导热和导电强烈依赖于其最大孔隙是相符的^[63]. 但与较容易通

图5 (网络版彩图)不同 $r_{\min}/r_{\max}$ (a)^[65]和 $r_{\max}/L_0$ (b)时分形维数与孔隙率间的拟合关系曲线

Figure 5 (Color online) Relationships among pore dimension versus area porosity with different ratios of $r_{\min}/r_{\max}$ (a) [65] and $r_{\max}/L_0$ (b).

过实验测试(如筛分法)获得的固体颗粒级配和大小相比,岩土孔径尺寸的测试相对困难,主要有压汞法、氮气吸附法、核磁共振法等。部分学者则尝试开展最大孔隙尺寸理论模型研究,且已受到相当的重视,但目前还没有公认的理论模型^[63]。本文选择砂岩和泡沫混凝土两种岩土材料,通过低场核磁共振实验获得了各自的孔径分布曲线,以用于通过本文近似判据确定的孔隙率REV的验证。

3.3.1 NMR和CT实验

选择某基建矿井建井工作面砂岩和实验室预制泡沫混凝土试样^[27],加工为适合MesoMR23-060V-I核磁共振系统使用的 $\Phi 25 \times 50$ mm圆柱形试样并进行负压饱和处理,对饱水试样开展NMR测试,过程如图6所示。将NMR测试后的上述两试样放入烘箱进行烘干(105°C)。考虑砂岩和泡沫混凝土试样颗粒与孔隙尺度,分别进行 $\Phi 2$ mm高、 $\Phi 25$ mm低分辨率模式CT扫描测试(图7)。Xradia 510 Versa型号CT设备、扫描试样及过程示意如图所示。上述实验获得用于后续分析的结果如图8和表3所示。

3.3.2 孔隙率REV统计法验证

砂岩和混凝土两种试样CT扫描图像大小为 1024×1024 像素,每种试样高度方向获得CT切片图像数量为1000。基于前文所述立方体覆盖取样法确定最大立方体参考试样约为 $600 \times 600 \times 600$ 体素。进一步通

图6 (网络版彩图)MesoMR23-060V-I核磁共振系统及试样制备

Figure 6 (Color online) MesoMR23-060V-I nuclear magnetic resonance system and sample preparation.

图7 (网络版彩图) CT机、试样制备及扫描实验示意图

Figure 7 (Color online) CT apparatus, specimens and schematic of scanning experiments.

图 8 (网络版彩图)砂岩和泡沫混凝土孔径分布
Figure 8 (Color online) Pore size distribution of sandstone and foamed concrete.

过Otsu最大类间方差法进行CT数字图像阈值分割, 以泡沫混凝土试样为例, 其CT图像二值化后(基质/骨架和孔隙二元介质系统)堆叠形成的0/1三维稀疏矩阵如图9所示.

进一步, 通过前文所述8顶点立方体覆盖取样法提取不同大小立方体, 遍历统计形成的如图9中所示0/1

表 3 砂岩和泡沫混凝土孔隙率REV的近似确定

Table 3 Approximate determination of the P-REV for sandstone and foamed concrete

试样	砂岩	泡沫混凝土
最大孔径 $2r_{\max}$ (m)	$\sim 1.07 \times 10^{-4}$	$\sim 1.04 \times 10^{-3}$
REV尺度 L_0 (mm)	$10r_{\max} \approx 0.535$	$10r_{\max} \approx 5.2$
CT体素尺寸 (μm)	2	25
CT切片数量 (个)	≥ 268	≥ 208

三维稀疏矩阵, 可获得不同大小子立方体试样的孔隙率参数. 本文具体实施例采用非等间距空间步长共137种不同子立方体试样, 单个顶点混凝土试样统计结果如表4所示. 根据统计分析结果, 可以得到两试样孔隙率参数随试样大小的变化波动曲线如图10所示. 通过人为主观判断可以得出, 砂岩孔隙率REV尺度范围在200~300体素之间(甚至更大), 泡沫混凝土则约为150~200体素(人为主观判断稍微困难).

为了量化确定REV, 减少人为主观判断误差, 采用不同试样孔隙率变异系数确定上述两试样孔隙率

图 9 (网络版彩图)泡沫混凝土试样REV三维数字模型及孔隙/骨架体素数据示意图
Figure 9 (Color online) 3D REV digital model of foamed concrete and its voxel data for pore/skeleton.

表 4 泡沫混凝土单顶点不同大小(边长体素数量)子立方体试样孔隙率统计计算结果

Table 4 Statistical results of porosity for concrete cubic subvolume with different sizes (side length)

立方体子试样 边长体素数 (个)	孔隙体 素数 (个)	骨架体 素数 (个)	孔隙率 (%)
5	107	18	85.60
10	708	292	70.80
20	4947	3053	61.84
30	15002	11998	55.56
40	33437	30563	52.25
50	64864	60136	51.89
75	200218	221657	47.46
100	446869	553131	44.69
125	965766	987359	49.45
150	1589376	1785624	47.09
175	2364825	2994550	44.13
200	3556001	4443999	44.45
250	6991743	8633257	44.75
300	12199078	14800922	45.18
350	19279078	23595922	44.97
400	28375490	35624510	44.34
500	54980502	70019498	43.98
600	94118156	121881844	43.57

REV的尺度, 如图11所示. Min等人^[46]和Esmaili等人^[20]分别采用(5%, 10%)和(10%, 20%)作为可接受变异系数. 本文采用较小的5%作为可接受变异系数, 确

定混凝土孔隙率REV边长为197体素, 砂岩为253体素, 与表3结果基本吻合.

3.3.3 孔隙率REV低阶概率函数验证

借鉴复合材料微观结构、相分布的表征方法, 采用低阶概率函数(两点自相关函数和线性路径函数)进一步分析上述两试样孔隙结构特征并验证其孔隙率REV^[27]. 随机多相非均匀材料中, 假设区域 v_i 内均为第 i 相, 所占体积百分比为 ϕ_i , 定义该相的相函数或指示函数(indicator function, Z^i)为

$$Z^i(M) = \begin{cases} 1, & M \in v_i, \\ 0, & M \notin v_i, \end{cases} \quad (27)$$

式中, M 为系统中的任意一点. 根据概率论知识, $Z^i(M) = 1$ 的概率即可作为该相的统计描述

$$\overline{Z^i(M)} = P\{Z^i(M) = 1\}. \quad (28)$$

对于两相岩土介质, 针对孔隙结构, 式(28)代表了系统内任意点 M 为孔隙的统计概率, 对应的物理意义为孔隙率参数, 即 $P\{Z^i(M) = 1\} = \phi$. 进一步, 式(27)孔隙区域的指示函数可以退化简写为

$$Z(M) = \begin{cases} 1, & M \in \text{孔隙}, \\ 0, & M \in \text{骨架}, \end{cases} \quad (29)$$

两相岩土介质中, 当满足 $f[Z^i(M)] = Z^i(M)$, 即自相关时, M 随机变量函数 $f[Z^i(M)]$ 的期望为

图 10 (网络版彩图)泡沫混凝土、砂岩孔隙率随其REV尺度(边长体素数量)的变化
Figure 10 (Color online) Changes in the relationship between porosity and REV scale (number of voxel) for concrete and sandstone.

图 11 (网络版彩图)混凝土和砂岩孔隙率变异系数随试样大小变化关系

Figure 11 (Color online) Porosity coefficient of variation versus sub-sample size for concrete and sandstone.

$$\begin{aligned}
 S(M) &= f[Z^i(M)] = \sum f[Z(M)] \cdot P\{f[Z(M)]\} \\
 &= f(1) \cdot P\{Z(M) = 1\} + f(0) \cdot P\{Z(M) = 0\} \\
 &= 1 \cdot P[Z(M) = 1] + 0 \cdot P[Z(M) = 0] \\
 &= P[Z(M) = 1] = \overline{Z(M)}.
 \end{aligned} \quad (30)$$

进一步可以得到系统内任意两点 M, N 均位于孔隙区域的期望表达式为

$$\begin{aligned}
 S(M, N) &= S(r) = P[Z(M) = 1, Z(N) = 1] \\
 &= \overline{Z(M) \cdot Z(N)},
 \end{aligned} \quad (31)$$

式(30)中, $S(M)$ 为单点概率函数(单点自相关函数); 式(31)中, $S(M, N)$ 为两点概率函数(两点自相关函数). 当 M, N 两点间的距离 $r \rightarrow 0$ 时, 两点自相关函数式(31)即退化为单点概率函数式(30). 与单点概率函数对应孔隙率参数不同, 两点自相关函数的物理意义为系统中相距为 r 的任意两点同时分布于孔隙中的概率, 表征了两相多孔岩土介质中孔隙的空间分布特征, 且随着测试线距离 r 的变化满足以下关系:

$$\begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} S(r) = \emptyset, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} S(r) = \emptyset^2, \end{cases} \quad (32)$$

线性路径函数是反映多相介质微观结构连通性的重要函数, 这里则表征了岩土两相多孔介质系统中孔隙的连通程度, 定义为

$$L(MN) = L(\bar{r}) = \overline{P(MN)} = \begin{cases} 1, \bar{r}_x \in \text{孔隙}, \\ 0, \bar{r}_x \in \text{骨架}, \end{cases} \quad (33)$$

式中, $\bar{r}_x$ 为 MN 两点间测试线 r 上的任意点. 线性路径函

数满足以下关系:

$$\begin{cases} \lim_{\bar{r} \rightarrow 0} L(\bar{r}) = \emptyset, \\ \lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} L(\bar{r}) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

以上述理论为基础, 编制了相应的Matlab程序针对建立的混凝土、砂岩REV三维数字模型(0/1三维稀疏矩阵)分别沿三个主轴 X, Y 和 Z 方向对其进行遍历搜索, 扫描测试线长度 r 以体素数量进行度量, 从1逐渐增加, 统计计算得到的试样孔隙空间分布概率函数变化曲线如图12所示.

从图12可以看出, 两种试样不同主轴方向孔隙空间分布概率函数随着两点间距离 r 的增大逐渐衰减, 基本满足特征关系式(32)和(34). 通过主观判断可以发现, 当 $r \in (40, 50)$ 即两点间距离在40~50体素左右(混凝土试样)、 $r \in (50, 60)$ 即两点间距离在50~60体素左右(砂岩试样), 两种孔隙空间分布概率函数变化曲线均近似趋于稳定. 此时, 这一孔隙空间两点自相关距离或线性路径连通距离接近各自试样的最大孔隙直径. 赵秀才^[70]以自相关距离为参考, 提出了可以将数字岩芯孔隙空间两点自相关距离的5.6~6倍作为其REV尺寸. 由于图12中所示的两点自相关距离和线性路径连通距离接近最大孔隙直径, 所以类似地可以将最大孔隙直径的5.6~6倍作为REV尺寸. 这与本文提出的近似判据 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$, 即岩土介质孔隙率REV尺寸近似为其内部最大孔隙半径的10倍(孔隙直径5倍), 基本一致. 进一步验证了本文岩土介质孔隙率REV确定近似判据的合理性, 并可以给出具有代表性意义的统计分析结果.

图 12 (网络版彩图)混凝土和砂岩试样孔隙分布概率函数
Figure 12 (Color online) Pore distribution probability functions for concrete and sandstone.

4 讨论

(1) 适用性范围

大量研究已经表明, 不同参数约束情况对应不同大小的岩土REV^[13,18~20,22,33], 说明2.3.1节中三种REV间可能存在明显的差异性. 以最基本的孔隙率REV为参考, Borge等人^[13]经研究后认为土的迂曲度几何结构REV是其孔隙率REV的3~15倍; 类似地, 以含湿玻璃微珠湿饱和度和气水界面面积为参考确定的几何结构REV约为其孔隙率REV的2倍^[33]; 在渗透性方面, Saragi和Piri^[50]通过统计分析发现, 相同油页岩试样数字图像三维结构可以获得孔隙率REV, 却得不到渗透率REV, 说明孔隙率REV<渗透率REV; Ozelim和Cavalcante^[52]同样认为通过孔隙率确定的REV用于渗透特性研究是不合适的. 但是, 仍有学者依靠孔隙率确定的REV尺度研究岩土强度^[31]和渗透特性^[28]. 因此, 基于孔隙率REV研究其他结构或宏观特性的充分性和合理性还有待商榷. 本文近似判据确定的岩土孔隙率REV主要用于孔隙结构分析, 同时也可以为其他特性研究提供参考.

(2) 近似判据的主观性理解

本文提出的岩土孔隙率REV近似判据, 与岩土REV的确定类似, 具有一定的主观性^[33,46]. 虽然该近似判据给出了具体结果的表述, 但不应该简单理解为某一精确数值, 而应该是具有一定参考价值的一个小的范围, 其形成主要受以下三个方面原因影响.

(i) 采用 $r_{\max}/L_0$ 指标拟合孔隙大小分布分形维数与孔隙率关系时的主观判断影响(近似表述原因一)

针对该问题, 应增加不同孔隙率水平下的岩样测试数据, 减小人为主观判断误差影响. 首先, 选择英国帝国理工学院PERM研究课题组已公开的多个数字岩芯数据进行分析与讨论^[71]. Dong和Blunt^[72]在2009年给出了S1~S9号砂岩数字岩芯各项物理参数. 赵明和郁伯铭^[73]、杨坤等人^[74]更是基于上述S1和S5号等多个砂岩试样分析了其孔隙结构参数及其对渗透特性的影响, 包含本文模型验证所需的孔隙率、分形维数、最大孔隙尺寸等参数. 不考虑所提供基本参数的差异性, 上述文献所提供的S1和S2砂岩数字岩芯以本文 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ 近似判据确定REV大小的对比如表5所示. 可以看出, 在不考虑其他因素情况下, 以本文 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ 近似判据确定的S1和S2砂岩P-REV大小是一致的, 小

于所提供数字岩芯数据尺寸(300^3 体素), 在一定程度上可说明本文 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ REV近似判据的准确性.

上述分析是以已有文献研究提供的数字岩芯数据开展的. 进一步, 选择彭瑞东等人^[75]研究结果, 分析3~4种不同孔隙率水平下岩土试样孔隙结构参数, 以说明本文近似判据 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ 的有效性. 文献^[75]的研究结果表明, 分3类岩土试样, 每种试样4个孔隙率水平, 统计获得其孔隙结构的CT图像分形维数. 以该数据为基础, 通过本文式(24), 在固定近似判据 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ 的前提下计算孔隙结构分形维数, 对比两种不同孔隙分形维数, 如表6所示.

上述结果表明, 在5%~66%的岩土介质孔隙率范围区间, 本文所提出的P-REV近似判据 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ (或式(24))的相对误差在 $\pm 20\%$ 以内. 在中高孔隙率范围内, 模型计算分形维数一般稍大于统计分形维数. 在较低孔隙率范围($<10\%$), 由于孔隙结构的较强非均质性, 本文所提出模型的误差增大、适用性降低. 以3%的孔隙率为临界值, 模型计算孔隙结构2D分形维数 <1 , 不符合实际情况, 此时本文模型不再适用.

(ii) 孔隙大小分布三维空间分形维数与二维平面分形维数间的差异性影响(近似表述原因二)

针对该问题, 通过图5(b)对两组试样扫描结果基于CT图像计算2D/3D分形维数、孔隙率, 同时采用式(23)和(24)根据 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ 的REV假设计算分形维数和孔隙度来验证模型的准确性. 首先通过2D/3D覆盖/充填法统计获得两组试样的孔隙结构分形维数. 其中泡沫混凝土试样3D孔隙结构分形维数 $D_{f,3} \approx 2.81$, 600张CT图像2D孔隙结构分形维数平均值 $D_{f,2} \approx 1.87$, 统计孔隙率为0.44; 砂岩试样3D孔隙结构分形维数 $D_{f,3} \approx 2.65$, 600张CT图像2D孔隙结构分形维数平均值 $D_{f,2} \approx 1.67$, 统计孔隙率为0.16. 其次, 固定 $r_{\max}/L_0 = 0.1$, 采用式(23)根据分形维数计算孔隙率、采用式(24)根据孔隙率计算分形维数, 相关计算参数见表7和8所示. 为了统一表示上述差异以验证模型的准确性, 将上述不同工况参数绘制于原图5(b)中, 可以看出虽有偏差但基本可以验证所提出近似判据模型的准确性.

(iii) 孔径分布与最大孔隙半径 $r_{\max}$ 实验测试的不确定性影响, $r_{\max}$ 为近似值/范围(近似表述原因三)

针对第三方面原因这里对比分析CT扫描 $r_{\max}$ 与NMR测试 $r_{\max}$ 对P-REV确定结果的影响. 本文主要针对岩土试样数字图像开展REV研究, 所以应采用试样CT

表 5 以 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$ 近似判据确定不同砂岩试样 P-REV**Table 5** P-REV determination for different sandstones using approximate criterion $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$

试样	数字岩芯尺寸 (体素)	分辨率 (μm)	最大孔隙半径 (μm)	孔隙率 (%)	本文REV (体素)	备注
文献[73]	S1	300×300×300	4.956	0.246	$\sim 130^3$	10倍最大孔隙半径/分辨率 $\approx$ 立方体REV边长体素数
	S2	300×300×300	3.997	0.211	$\sim 150^3$	
文献[74]	S1	300×300×300	8.68	0.14	$\sim 130^3$	
	S2	300×300×300	4.96	0.25	$\sim 150^3$	

表 6 基于三种孔隙率水平岩土试样的近似判据有效性验证**Table 6** Validation of the approximate criterion based on geomaterial samples with three different porosity levels

试样	孔隙率 (%)	统计分形维数 (D_f)	计算分形维数 (D_f)	误差 (%)	对比
文献[75]	8.01	1.775	1.470	17.18
	26.62	1.847	1.841	0.32	
	62.59	1.954	1.963	-0.46	
	4.89	1.489	1.242	16.59	
	27.85	1.809	1.850	-2.27	
	66.03	1.944	1.968	-1.23	
泡沫混凝土	12.36	1.602	1.636	-2.12	
	28.58	1.762	1.854	-5.22	
	66.93	1.953	1.969	-0.82	

表 7 模型验证参数计算分析(A) ($r_{\max}/L_0 = 0.1$)**Table 7** Parameter calculation and analysis for model validation (A) ($r_{\max}/L_0 = 0.1$)

试样	计算参数		
泡沫混凝土试样	CT统计分形维数(D_{f3})-1	1.81	式(23)计算孔隙率(ϕ)
	CT统计分形维数(D_{f2})	1.87	0.31
砂岩试样	CT统计分形维数(D_{f3})-1	1.65	式(23)计算孔隙率(ϕ)
	CT统计分形维数(D_{f2})	1.67	0.14

表 8 模型验证参数计算分析(B) ($r_{\max}/L_0 = 0.1$)**Table 8** Parameter calculation and analysis for model validation (B) ($r_{\max}/L_0 = 0.1$)

试样	CT统计孔隙率(ϕ)	式(24)计算分形维数(D_f)	CT统计分形维数(D_{f3})-1	CT统计分形维数(D_{f2})
泡沫混凝土试样	0.44	1.92	1.81	1.87
砂岩试样	0.16	1.71	1.65	1.67

扫描得到的最大孔隙尺寸而非NMR实验测量得到的孔隙尺寸, 这样才能够相互对应。但相对于目前压汞法、氮气吸附法和核磁共振法等可以直接给出所需参数的优势, 基于CT扫描图像重构三维数字模型获取其

孔隙结构参数不仅计算复杂、工作量大, 还存在一定的偏差。本文基于CT扫描图像重构三维数字模型获取的混凝土和砂岩试样最大孔隙尺寸分别为 $r_{\max} \approx 580 \mu\text{m}$; $r_{\max} \approx 47.9 \mu\text{m}$ 。根据表3及近似判据 $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$

可以确定各自P-REV尺度为5800和479 μm , 进而考虑不同扫描精度CT体素物理尺寸确定P-REV对应的CT切片数量分别为232和240, 与NMR测试结果确定的P-REV对应CT切片数量208和268存在一定的差距, 相对误差分别为11.5%和10.4%。进一步, 以图11孔隙率变异系数变化规律可以确定, 以CT扫描得到的混凝土孔隙结构参数确定P-REV完全可以满足5%的可接受变异系数, 以CT扫描得到的砂岩孔隙结构参数确定P-REV基本可以满足5%的可接受变异系数。因此, 可以得出基于不同测试手段与方法得到的孔隙结构参数进而采用本文提出的近似判据确定的P-REV均可以保证计算结果的准确性。

(3) 分形物体REV描述的合理性

前文表明, 已有大量研究采用分形几何理论描述岩土复杂结构, 进而开展岩土REV研究。但部分学者如Puyguiraud等人^[53]的最新观点认为: 分形物体是一种连续分级物体, 本身就具有尺度无关性, 不能用REV来描述(an REV cannot be defined for continuously hierarchized heterogeneous media such as fractal materials)。因此, 能否采用REV的概念来描述分形物体, 或者通过分形几何理论/参数研究岩土REV已经引起了学术争议, 可能还需要进一步研究讨论。

5 结论

(1) RVE源于复合材料微细观力学领域, REV则最初用于岩土多孔介质渗透等输运有效特性研究, 二者

概念基本一致。在岩土力学与工程领域建议以Bear首次提出的表征单元体(REV)统一表示, 避免与传统复合材料/固体力学领域常用的代表性体积单元(RVE)引起书写上的混乱。

(2) 岩土REV的存在性及其确定是岩土力学与工程领域的一个基本科学问题。在对其基本概念来源、取样测试、确定与验证方法分析的基础上提出了岩土介质REV研究的三层次分类: 普适性理论研究、数学角度量化研究和可操作性方法研究。在具体的岩土REV确定方面同样提出了三种分类: 基本孔隙率REV(P-REV)、几何结构REV(G&S-REV)和热-水-力-电REV(THME-REV)。

(3) 以圆柱形岩土CT扫描图像三维重构数字模型为基础, 提出了一种8顶点立方体覆盖取样法, 主要包括最大参考试样的确定以及子立方体取样的流程, 可用于分析约束参数的尺寸相关性, 以进一步分析确定不同约束参数下的岩土REV。

(4) 提出了一种孔隙大小分布满足分形幂律特征条件下岩土孔隙率REV尺度的近似判据, $r_{\max}/L_0 \approx 0.1$, 即岩土介质选择其内部最大孔隙半径10倍或孔径5倍的立方体单元即可作为相关微细观孔隙结构研究的REV。通过孔隙率及其变异系数统计检验, 结合两点自相关函数和线性路径函数等低阶段概率函数分析进行了验证。结果表明, 以该近似判据确定的砂岩、混凝土D-REV与其他方法确定的结果基本吻合, 可以给出具有代表性意义的统计结果, 并在表征精度与计算效率之间提供合理的平衡点。

参考文献

- 1 Di Y, Kang Z J, Dai Y F, et al. Representative elementary volume of the multiple-continuum model for complex porous media (in Chinese). *Eng Mech*, 2015, 32: 33–39 [邸元, 康志江, 代亚非, 等. 复杂多孔介质多重介质模型的表征单元体. *工程力学*, 2015, 32: 33–39]
- 2 Sun X F, Fang X S, Guan L T. *Mechanics of Materials (I)* (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2009 [孙训方, 方孝淑, 关来泰. *材料力学(I)*. 北京: 高等教育出版社, 2009]
- 3 Xiang W F. A Study on the representative elementary volume of fractured rock masses and the size effects of mechanical properties (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Wuhan: Wuhan University, 2005 [向文飞. 裂隙岩体表征单元体及力学特性尺寸效应研究. 博士学位论文. 武汉: 武汉大学, 2005]
- 4 Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Elsevier: New York, 1972
- 5 Jiang Y H, Yang N, Bai F. Research on the homogenization of Tibetan ancient stone masonry based on RVE elements (in Chinese). *Eng Mech*, 2020, 37: 110–124 [蒋宇洪, 杨娜, 白凡. 基于RVE单元的藏式古建石砌体均质化研究. *工程力学*, 2020, 37: 110–124]
- 6 Long J C S, Remer J S, Wilson C R, et al. Porous media equivalents for networks of discontinuous fractures. *Water Resour Res*, 1982, 18: 645–658

- 7 Oda M. A method for evaluating the representative elementary volume based on joint survey of rock masses. *Can Geotech J*, 1988, 25: 440–447
- 8 Wang X M, Zheng Y H. Review of advances in investigation of representative elementary volume and scale effect of fractured rock masses (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2015, 36: 3456–3464 [王小明, 郑银河. 裂隙岩体表征单元体及尺寸效应研究进展. *岩土力学*, 2015, 36: 3456–3464]
- 9 Xiang W F, Zhou C B. The advances in investigation of representative elementary volume for fractured rock mass (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2005, 24: 5686–5692 [向文飞, 周创兵. 裂隙岩体表征单元体研究进展. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24: 5686–5692]
- 10 Zhou C B, Chen Y F, Jiang Q H. Representative elementary volume and mechanical parameters of fractured rock masses (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2007, 29: 1135–1142 [周创兵, 陈益峰, 姜清辉. 岩体表征单元体与岩体力学参数. *岩土工程学报*, 2007, 29: 1135–1142]
- 11 Hill R. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. *J Mech Phys Solids*, 1963, 11: 357–372
- 12 Li R L. Mechanical behaviour of granular matter under gravity-induced stress gradient (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Xuzhou: China University of Mining & Technology, 2018 [李瑞林. 重力引起的应力梯度作用下颗粒介质力学行为研究. 博士学位论文. 徐州: 中国矿业大学, 2018]
- 13 Borges J A R, Pires L F, Cássaro F A M, et al. X-ray microtomography analysis of representative elementary volume (REV) of soil morphological and geometrical properties. *Soil Tillage Res*, 2018, 182: 112–122
- 14 Koestel J, Larsbo M, Jarvis N. Scale and REV analyses for porosity and pore connectivity measures in undisturbed soil. *Geoderma*, 2020, 366: 114206
- 15 Yao J, Sun H, Li A F, et al. Modern system of multiphase flow in porous media and its development trend (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2018, 63: 425–451 [姚军, 孙海, 李爱芬, 等. 现代油气渗流力学体系及其发展趋势. *科学通报*, 2018, 63: 425–451]
- 16 Gonzalez J L, de Faria E L, Albuquerque M P, et al. Representative elementary volume for NMR simulations based on X-ray microtomography of sedimentary rock. *J Pet Sci Eng*, 2018, 166: 906–912
- 17 Wu H, Yao Y, Zhou Y, et al. Analyses of representative elementary volume for coal using X-ray μ -CT and FIB-SEM and its application in permeability predication model. *Fuel*, 2019, 254: 115563
- 18 Brown G O, Hsieh H T, Lucero D A. Evaluation of laboratory dolomite core sample size using representative elementary volume concepts. *Water Resour Res*, 2000, 36: 1199–1207
- 19 Li J H, Zhang L M. Geometric parameters and REV of a crack network in soil. *Comput Geotechnics*, 2010, 37: 466–475
- 20 Esmaili K, Hadjigeorgiou J, Grenon M. Estimating geometrical and mechanical REV based on synthetic rock mass models at Brunswick Mine. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2010, 47: 915–926
- 21 Al-Raoush R, Papadopoulos A. Representative elementary volume analysis of porous media using X-ray computed tomography. *Powder Tech*, 2010, 200: 69–77
- 22 Zhang W, Chen J, Liu C, et al. Determination of geometrical and structural representative volume elements at the Baihetan dam site. *Rock Mech Rock Eng*, 2012, 45: 409–419
- 23 Peng X H, Wang Y Q, Jia X X, et al. Some key research fields of Chinese soil physics in the new era: Progresses and perspectives (in Chinese). *Acta Pedol Sin*, 2020, 57: 1071–1087 [彭新华, 王云强, 贾小旭, 等. 新时代中国土壤物理学主要领域进展与展望. *土壤学报*, 2020, 57: 1071–1087]
- 24 Ju Y, Xie H P, Zheng Z M, et al. Visualization of the complex structure and stress field inside rock by means of 3D printing technology (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2014, 59: 3109–3119 [鞠杨, 谢和平, 郑泽民, 等. 基于3D打印技术的岩体复杂结构与应力场的可视化方法. *科学通报*, 2014, 59: 3109–3119]
- 25 Bultreys T, De Boever W, Cnudde V. Imaging and image-based fluid transport modeling at the pore scale in geological materials: A practical introduction to the current state-of-the-art. *Earth-Sci Rev*, 2016, 155: 93–128
- 26 Fernandes J S, Appoloni C R, Fernandes C P. Determination of the representative elementary volume for the study of sandstones and siltstones by X-ray microtomography. *Mat Res*, 2012, 15: 662–670
- 27 Chu Z X. Thermal conductivity prediction theoretical models for composite-porous geomaterials (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Xuzhou: China University of Mining & Technology, 2019 [褚召祥. 多组分-多孔岩土介质导热系数预测理论模型研究. 博士学位论文. 徐州: 中国矿业大学, 2019]
- 28 Ni X, Miao J, Lv R, et al. Quantitative 3D spatial characterization and flow simulation of coal macropores based on μ CT technology. *Fuel*, 2017, 200: 199–207

- 29 Wang G, Qin X J, Jiang C H, et al. Simulations of temperature effects on seepage and deformation of coal microstructure in 3D CT reconstructions (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2020, 41: 1750–1760 [王刚, 秦相杰, 江成浩, 等. 温度作用下CT三维重建煤体微观结构的渗流和变形模拟. *岩土力学*, 2020, 41: 1750–1760]
- 30 Liu Y, Zhang W, Liang X L, et al. Determination on representative element volume of Nanjing silty-fine sand for its spatial pore structure (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2019, 40: 2723–2729 [刘语, 张巍, 梁小龙, 等. 南京粉细砂空间孔隙结构表征单元体确定. *岩土力学*, 2019, 40: 2723–2729]
- 31 Cheng Z L, Sui W B, Ning Z F, et al. Microstructure characteristics and its effects on mechanical properties of digital core (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2018, 37: 449–460 [程志林, 隋微波, 宁正福, 等. 数字岩芯微观结构特征及其对岩石力学性能的影响研究. *岩石力学与工程学报*, 2018, 37: 449–460]
- 32 Yun H S, Moon S W, Kang S S, et al. Determination of representative elementary volume of fault core materials by particle distribution analysis. *Geosci J*, 2018, 22: 105–119
- 33 Costanza-Robinson M S, Estabrook B D, Fouhey D F. Representative elementary volume estimation for porosity, moisture saturation, and air-water interfacial areas in unsaturated porous media: Data quality implications. *Water Resour Res*, 2011, 47: W07513
- 34 Katagiri J, Kimura S, Noda S. Significance of shape factor on permeability anisotropy of sand: Representative elementary volume study for pore-scale analysis. *Acta Geotech*, 2020, 15: 2195–2203
- 35 Razavi M R, Muhunthan B, Al Hattamleh O. Representative elementary volume analysis of sands using X-Ray computed tomography. *Geotech Test J*, 2007, 30: 100164
- 36 Zhang G K, Xu W Y. Analysis of joint network simulation method and REV scale (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2008, 29: 1675–1680 [张贵科, 徐卫亚. 裂隙网络模拟与REV尺度研究. *岩土力学*, 2008, 29: 1675–1680]
- 37 Ning Y, Xu W Y, Zheng W T, et al. Study of random simulation of columnar jointed rock mass and its representative elementary volumes scale (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2008, 27: 1202–1208 [宁宇, 徐卫亚, 郑文棠, 等. 柱状节理岩体随机模拟及其表征单元体尺度研究. *岩石力学与工程学报*, 2008, 27: 1202–1208]
- 38 Lu B, Ge X R, Zhu D L, et al. Fractal study on the representative elementary volume of jointed rock masses (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2005, 24: 1355–1361 [卢波, 葛修润, 朱冬林, 等. 节理岩体表征单元体的分形几何研究. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24: 1355–1361]
- 39 Wang Y, Feng D, Chen S X, et al. Estimation of cracked soil's representative elementary volume based on fractal dimension (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2013, 34: 2774–2780 [王媛, 冯迪, 陈尚星, 等. 基于分维数的土体裂隙表征单元体估算. *岩土力学*, 2013, 34: 2774–2780]
- 40 Wu H, Zhou Y, Yao Y, et al. Imaged based fractal characterization of micro-fracture structure in coal. *Fuel*, 2019, 239: 53–62
- 41 Zhang J, Yu L, Jing H, et al. Estimating the effect of fractal dimension on representative elementary volume of randomly distributed rock fracture networks. *Geofluids*, 2018, 2018: 1–13
- 42 Hill R. On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. In: *Proceeding of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. London, 1972. 131–147
- 43 de Souza Neto E A, Blanco P J, Sánchez P J, et al. An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. *Mech Mater*, 2015, 80: 136–144
- 44 Liu Q P, Liu X Y, Gao Y H. Hill's lemma for the average-field theory of Cosserat continuum (in Chinese). *Eng Mech*, 2013, 30, 29–34 [刘其鹏, 刘晓宇, 高月华. Cosserat连续体平均场理论中的Hill定理. *工程力学*. 2013, 30: 29–34]
- 45 Li X K, Zhang J B, Zhang X. A generalized Hill's lemma for gradient-enhanced Cosserat continuum (in Chinese). *Chin J Compu Mech*, 2011, 28: 813–820 [李锡夔, 张俊波, 张雪. 梯度增强Cosserat连续体的广义Hill定理. *计算力学学报*, 2011, 28: 813–820]
- 46 Min K B, Jing L. Numerical determination of the equivalent elastic compliance tensor for fractured rock masses using the distinct element method. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2003, 40: 795–816
- 47 Bear J, Bachmat Y. *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*. Springer Netherlands: Kluwer, Norwell, Mass, 1990
- 48 Zhang D, Zhang R, Chen S, et al. Pore scale study of flow in porous media: Scale dependency, REV, and statistical REV. *Geophys Res Lett*, 2000, 27: 1195–1198
- 49 Al-Raoush R. Change in microstructure parameters of porous media over representative elementary volume for porosity. *Particulate Sci Tech*, 2012, 30: 1–16
- 50 Saraji S, Piri M. The representative sample size in shale oil rocks and nano-scale characterization of transport properties. *Int J CoalGeol*, 2015, 146: 42–54

- 51 de Araújo O M O, Sharma K V, Machado A S, et al. Representative elementary volume in limestone sample. *J Inst*, 2018, 13: C10003
- 52 Ozelim L C S M, Cavalcante A L B. Representative elementary volume determination for permeability and porosity using numerical three-dimensional experiments in microtomography data. *Int J Geomech*, 2018, 18: 04017154
- 53 Puyguiraud A, Gouze P, Dentz M. Is there a representative elementary volume for anomalous dispersion? *Transp Porous Media*, 2020, 131: 767–778
- 54 Baveye P, Rogasik H, Wendroth O, et al. Effect of sampling volume on the measurement of soil physical properties: Simulation with X-ray tomography data. *Meas Sci Technol*, 2002, 13: 775–784
- 55 Santos T M P, Machado A S, Araújo O M O, et al. Optimization of image resolution parameters to characterize carbonate rocks through representative elementary volume analysis. *J Inst*, 2018, 13: C06001
- 56 Li J H, Zhang L M, Wang Y, et al. Permeability tensor and representative elementary volume of saturated cracked soil. *Can Geotech J*, 2009, 46: 928–942
- 57 Wang X M, Xia L, Zheng Y H, et al. Study of representative elementary volume for fractured rock mass based on three-dimensional fracture connectivity (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2013, 32: 3297–3302 [王小明, 夏露, 郑银河, 等. 基于三维裂隙连通率的裂隙岩体表征单元体研究. 岩石力学与工程学报, 2013, 32: 3297–3302]
- 58 Zhang W, Chen J, Chen H, et al. Determination of RVE with consideration of the spatial effect. *Int J Rock Mech Min Sci*, 2013, 61: 154–160
- 59 Öhman J, Niemi A. Upscaling of fracture hydraulics by means of an oriented correlated stochastic continuum model. *Water Resour Res*, 2003, 39: 1277
- 60 Tan C, Chen J P, Que J S, et al. Analysis of representative elementary volume for rock mass based on 3D fracture numerical network model and grey system theory (in Chinese). *J Hydraul Eng*, 2012, 43: 709–716 [谭春, 陈剑平, 阙金声, 等. 基于三维裂隙网络模拟和灰色理论的岩体表征单元体研究. 水利学报. 2012, 43: 709–716]
- 61 Mohammed M, Watanabe K, Takeuchi S. Grey model for prediction of pore pressure change. *Environ Earth Sci*, 2010, 60: 1523–1534
- 62 Yu B, Cheng P. A fractal permeability model for bi-dispersed porous media. *Int J Heat Mass Transfer*, 2002, 45: 2983–2993
- 63 Yu B M, Xu P, Zou M Q, et al. Transport Physics in Fractal Porous Media (in Chinese). Beijing: Science Press, 2014 [郁伯铭, 徐鹏, 邹明清, 等. 分形多孔介质输运物理. 北京: 科学出版社, 2014]
- 64 Yu B, Li J. Some fractal characters of porous media. *Fractals*, 2001, 9: 365–372
- 65 Krohn C E, Thompson A H. Fractal sandstone pores: Automated measurements using scanning-electron-microscope images. *Phys Rev B*, 1986, 33: 6366–6374
- 66 Smidt J M, Monro D M. Fractal modeling applied to reservoir characterization and flow simulation. *Fractals*, 1998, 6: 401–408
- 67 Yu B, Lee L J, Cao H. Fractal characters of pore microstructures of textile fabrics. *Fractals*, 2001, 9: 155–163
- 68 Feng Y, Yu B, Zou M, et al. A generalized model for the effective thermal conductivity of porous media based on self-similarity. *J Phys D-Appl Phys*, 2004, 37: 3030–3040
- 69 Costa A. Permeability-porosity relationship: A reexamination of the Kozeny-Carman equation based on a fractal pore-space geometry assumption. *Geophys Res Lett*, 2006, 33: L02318
- 70 Zhao X C. Numerical rock construction and pore network extraction (in Chinese). Dissertation for Doctoral Degree. Qingdao: China University of Petroleum (East China), 2009 [赵秀才. 数字岩心及孔隙网络模型重构方法研究. 博士学位论文. 青岛: 中国石油大学, 2009]
- 71 Imperial College London. Micro-CT Images and Networks. 2020-10-10. <http://www.imperial.ac.uk/earth-science/research/research-groups/perm/research/pore-scale-modelling/micro-ct-images-and-networks>
- 72 Dong H, Blunt M J. Pore-network extraction from micro-computerized-tomography images. *Phys Rev E*, 2009, 80: 036307
- 73 Zhao M, Yu B M. The fractal characterization of pore structure for some numerical rock and prediction of permeabilities (in Chinese). *J Chongqing Univ*, 2011, 34: 88–94 [赵明, 郁伯铭. 数字岩心孔隙结构的分形表征及渗透率预测. 重庆大学学报, 2011, 34: 88–94]
- 74 Yang K, Wang F Y, Zeng F C, et al. Permeability prediction based on fractal characteristics of digital rock (in Chinese). *J Jilin Univer (Earth Sci Ed)*, 2020, 50: 1003–1011 [杨坤, 王付勇, 曾繁超, 等. 基于数字岩心分形特征的渗透率预测方法. 吉林大学学报(地球科学版), 2020, 50: 1003–1011]
- 75 Peng R D, Yang Y C, Ju Y, et al. Computation of fractal dimension of rock pores based on gray CT images (in Chinese). *Chin Sci Bull*, 2011, 56: 2256–2266 [彭瑞东, 杨彦从, 鞠杨, 等. 基于灰度CT图像的岩石孔隙分形维数计算. 科学通报, 2011, 56: 2256–2266]

Porosity-based representative elementary volume for geomaterials and its fractal theory-based approximate criterion

CHU ZhaoXiang^{1,2}, ZHOU GuoQing², RAO ZhongHao¹, ZHAO GuangSi²,
SHANG XiangYu² & LI RuiLin²

¹ School of Electrical and Power Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China;

² State Key Laboratory for Geomechanics and Deep Underground Engineering, Xuzhou 221116, China

The representative volume element (RVE) and/or the representative elementary volume (REV) and their existence and determination are a basic scientific issue in the research field of size effect. The similarities and differences between the RVE and REV are analyzed from the fields of composite micromechanics and geotechnical engineering. A three-level classification of the REV research on geomaterials is then proposed based on these fields, especially REV research in geotechnical engineering. The pore size distribution and the corresponding fractal dimension are introduced and selected as the constrained parameters for describing the complex pore structure of geomaterials. Accordingly, an approximate criterion is first presented via theoretical deduction and comparison with previous research results, through which the size of a P-REV of mesoscale porous geomaterials can be determined using their pore size distributions (i.e., the edge length of the cubic P-REV is approximately equal to five times of the maximum pore diameter). Finally, some statistical methods, such as low-order probability functions, are utilized to validate the performance of the proposed criterion. The verification results using two types of geomaterials, namely, sandstone and foamed concrete, reveal that both are in a reasonable agreement, indicating that the P-REV determined according to this approximate criterion can provide representative statistical results and find a balance between characterization accuracy and calculation efficiency.

geotechnical engineering, representative elementary volume, pore, pore size distribution, fractal

doi: [10.1360/SST-2020-0371](https://doi.org/10.1360/SST-2020-0371)