中国科学 : 数学　2023 年　第 53 卷　第 7 期 : 931 ～ 952
SCIENTIA SINICA　Mathematica
综　述

有限单群的数量刻画

施武杰[1,2]

1. 重庆文理学院数学与大数据学院, 重庆 402160;
2. 苏州大学数学科学学院, 苏州 215006
E-mail: wjshi@suda.edu.cn

收稿日期: 2022-05-24; 接受日期: 2022-12-09; 网络出版日期: 2023-05-26
国家自然科学基金 (批准号: 11171364 和 11271301) 资助项目

摘要　本文综述了用 “元素的阶之集” 和 “两个阶” (群的阶和元素的阶之集) 刻画有限单群、研究有限群的工作, 讨论它的相关课题、应用及推广.

关键词　有限群　群的阶　元素的阶　有限单群分类定理

MSC (2020) 主题分类　20D05, 20D60, 20D06, 20D08

1　引言

群论是数学的重要分支, 在数学、物理和化学等领域都有重要的应用. 于 2004 年宣布完成的有限单群分类定理, 是 20 世纪最重要的数学成就之一. 证明时间之长、参与者之众、文章之多和篇幅之大 (15,000 多页), 在数学史上都是空前的, 具有里程碑的意义. 通过研究某些给定子群的结构, Burnside 于 1899 年发表了第一篇分类无限系列单群的论文. (“Group theory is an important branch of mathematics, and it has important applications in mathematics, physics, chemistry and other fields. The classification theorem for the finite simple groups, which was completed in 2004, is one of the most important mathematical achievements of the 20th century. In terms of the number of participating researchers, the number of published papers, and the total length of the proof (more than 15,000 pages), it is unprecedented in the history of mathematics. The first paper classifying an infinite family of finite simple groups, starting from a hypothesis on the structure of certain proper subgroups, was published by Burnside in 1899.”)

近年来, 群表示论中 McKay 猜想和 Alperin 猜想等重要课题已经约化为单群和拟单群情形 (参见文献 [146]), 迫切地需要理解和识别单群更多的性质. 著名群论专家 Solomon [186] 指出: “目前正在进行的项目是出版一个超过 12 卷的系列书, 以展示有限单群分类定理的完整证明, 预计该项目将于 2025 年完成.” (“The ongoing project to publish a series of more than 12 volumes presenting a complete proof of this theorem is expected to be completed by 2025.”) (上述两段英文摘自 R. Solomon 于 2020 年 11 月 2 日寄给作者的电子邮件, 也可参见文献 [186]).

英文引用格式: Shi W J. Quantitative characterization of finite simple groups (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 931–952, doi: 10.1360/SSM-2022-0097

　

对有限群, 群 G 的阶 $|G|$ 和 G 中元素的阶是两个最基本的数量. 设 G 是有限群, $\pi_e(G)$ 记为 G 中元素的阶的集. 本文作者于 1987 年提出了如下猜想:

猜想 1.1 [165] 设 G 是有限群, S 为有限单群, 则 $G \cong S$ 当且仅当 (1) $\pi_e(G) = \pi_e(S)$; (2) $|G| = |S|$, 即对所有的有限单群可以仅用群的阶和元素的阶之集 (简称 “两个阶”) 加以刻画.

作者于 1987 年向 Thompson 教授报告了上述猜想, 得到了 Thompson 的鼓励和充分肯定. Thompson 在回信中指出: “Good luck with your conjecture about simple groups. I hope you continue to work on it”, “I like your arguments”, “This would certainly be a nice theorem”. 与此同时, Thompson [1) 2)] 在 1987 和 1988 年的两封信中分别提出了如下的问题和猜想 (参见文献 [100, 问题 12.37–12.39]).

定义 1.2 设 G 是有限群, d 为正整数, $G(d) = \{x \in G \mid x^d = 1\}$. G_1 和 G_2 称为同阶型群当且仅当 $|G_1(d)| = |G_2(d)|$ $(d = 1, 2, \ldots)$.

Thompson 问题 (1987) [1)] 设 G_1 和 G_2 为同阶型群, 如果 G_1 是可解群, G_2 是否也一定可解?

Thompson 在他的信中指出: “The problem arose initially in the study of algebraic number fields, and is of considerable interest.”

设 G 是有限群, 记 $N(G) = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid G$ 有共轭类 $C, |C| = n\}$, 即 G 的所有共轭类长度的集合.

Thompson 猜想 (1988) [2)] 设 G 和 M 是有限群且 $N(G) = N(M)$, 再设 M 为非 Abel 单群而 G 的中心为 1, 则 G 和 M 同构.

本文将对上述猜想 1.1 的证明、Thompson 猜想和 Thompson 问题的解决现状、以及一些相关的数量与群的问题作一个综述, 涉及其应用和推广, 也包括一些没有解决的问题.

事实上, 猜想 1.1 的提出源于本文作者的硕士学位论文. 该论文研究除单位元外元素的阶均为素数的有限群 (element prime order group, EPO- 群) [184] 以及元素的阶均为素数幂的有限群 (element prime power order group, EPPO- 群) [185]. 进一步地, 得到了如下结果 (参见文献 [163]):

定理 1.3 设 G 是有限群, 则 G 同构于 A_5 当且仅当 $\pi_e(G) = \{1, 2, 3, 5\}$.

段学复先生得知这一结果后, 在给陈重穆教授的信中写道: “很有意思, 有空也要想一想.” 段先生和陈教授的鼓励促使作者用 “元素的阶之集” 去刻画更多的单群. 而对于不能仅用 “元素的阶之集” 去刻画的单群 (如 A_6), 自然想到了加上 “群的阶”, 于是就提出了上述猜想 1.1.

文献 [184] 是以中文发表的文章, 类似的文章在 5 年后发表在 *Proceedings of the American Mathematical Society* [42] 上, 且该文的主要定理有错误. 为此, 作者与其合作者发表了文献 [39], 作为文献 [42] 的一个勘误. 文献 [185] 最初同样是以中文发表的文章, 由于近期受到关注, 因此作者将其译成英文, 发布在 arXiv 上. 文献 [149] 对文献 [184] 进行了推广, 研究了除一个正规子群外元素都是素数阶元的有限群. 近期出现在 arXiv 上 Lewis 的文章 Groups having all elements of a normal subgroup with prime power order (arXiv:2203.02537v1) 是文献 [185] 的一个推广.

2 有限单群的谱刻画

在仅用元素的阶之集刻画单群 A_5 之前, 作者曾用群的阶的素因子个数 $|\pi(G)|$ 和对 “元素的阶之集” 给出一些限制条件刻画单群 $\mathrm{PSL}_2(7)$ [160] 和一些其他单群 (参见文献 [159,161,162,164]). 而从 “元

1) Thompson J G. 1987 年 4 月 22 日给作者的私人信件. 信中提出的问题也见 Khukhro E I, Mazurov V D. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook, No. 20. 2022, 12.37, p. 58

2) Thompson J G. 1988 年 1 月 4 日给作者的私人信件. 信中提出的猜想也见 Khukhro E I, Mazurov V D. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook, No. 20. 2022, 12.38, p. 59

素的阶之集” 不难推导出上述的一些限制条件成立, 例如, 文献 [160] 证明如下结论:

定理 2.1 设 G 是满足如下条件的有限群:

(1) $|G|$ 至少包含 3 个不同的素数, 即 $|\pi(G)| \geqslant 3$;

(2) G 中每个非单位元的阶或为 2 的幂, 或为异于 5 的素数;

则 G 同构于 $\mathrm{PSL}_2(7)$.

由 $\pi_e(G) = \{1,2,3,4,7\}$ $(= \pi_e(\mathrm{PSL}_2(7)))$ 容易推导出上述条件 (1) 和 (2) 均成立.

文献 [163] 仅应用初等的群论知识以 “元素的阶之集” 为条件刻画单群 A_5. 此后, 文献 [153] 也使用初等的办法证明了有限群 G 同构于 A_5 当且仅当 $\pi_e(G) = \{1,p,q,r\}$, 其中 p、q 和 r 为不同的素数.

由于 “群的元素的阶之集” 概念的重要性, 一些跟进的文献将它称为 “谱 (spectrum)”.

Mazurov[129] 指出: “These results opened a wide way for investigations of recognizability of groups by spectrum.” (这些结果开启了用谱研究群的可刻画性的一条宽阔的道路.)

群 G 的元素的阶之集 $\pi_e(G)$ 显然是正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的一个子集, 然而, 反过来下面的问题却是十分困难的:

问题 2.2 什么样的数量集可以成为某个有限群 G 的元素的阶之集 $\pi_e(G)$?

1996 年 10 月, 作者在普林斯顿大学举办的 “Group Theory Seminar” 报告中给出如下定义: 对正整数集的子集 Γ 可定义如下的 h 函数, $h(\Gamma)$ 为群 G 同构类的个数使得 $\pi_e(G) = \Gamma$.

定义 2.3[175] 对给定的群 G, 显然有 $h(\pi_e(G)) \geqslant 1$. 如果 $h(\pi_e(G)) = 1$, 则称群 G 为可刻画的. 而若 $h(\pi_e(G)) = k$ 是有限的, 则称群 G 为几乎可刻画的 (k- 可刻画的); 否则, 称群 G 为不可刻画的.

可解群是不可刻画群 (参见文献 [175, 定理 4]). 一般地有如下结论:

定理 2.4[67,125,136,170,177] 若群 G 有可解的极小正规子群, 或 G 为 A_6、A_{10}、$L_3(3)$、$U_3(3)$、$U_3(5)$、$U_3(7)$、$U_4(2)$、$U_5(2)$、J_2、$S_4(q)$ $(q \neq 3^{2m+1}$, $m > 0)$, 则 G 是不可刻画的.

对可刻画群, 2010 年 4 月, 作者在意大利举办的 Ischia Group Theory 会议上报告了如下定理 (参见文献 [177]):

定理 2.5 设 G 为下列单群.

(1) 交错群 A_n $(n \neq 6, 10)$.

(2) 散在单群 S, $S \neq J_2$.

(3) Lie 型单群:

- $L_2(q)$, $q \neq 9$; $L_3(2^m)$, $m \geqslant 1$; $L_3(q)$, 其中 $3 < q \equiv 2 \pmod 5$ 且 $(6, (q-1)/2) = 1$;
- $U_3(2^m)$, $m \geqslant 2$; $L_4(2^m)$, $m \geqslant 1$; $U_4(2^m)$, $m \geqslant 2$;
- $Sz(2^{2m+1})$, $m \geqslant 1$; $R(3^{2m+1})$, $m \geqslant 1$; ${}^2F_4(2^{2m+1})$, $m \geqslant 1$; $S_4(3^{2m+1})$, $m \geqslant 0$;
- $B_p(3)$, $p > 3$ 为奇素数; $C_p(3)$, p 为奇素数; $D_p(5)$, p 为奇素数;
- $D_n(q)$, $q = 2$, 3 或 5 对某些 n; $G_2(3^m)$;
- ${}^2F_4(2)'$, $L_3(7)$, $L_4(3)$; $L_n(2)$, $n \geqslant 3$; $L_5(3)$, $U_3(9)$, $U_3(11)$, $U_4(3)$, $U_6(2)$, $G_2(3)$;
- $G_2(4)$, $S_6(3)$, $O_8^+(2)$, $O_{10}^+(2)$, $F_4(2)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^2E_6(2)$.

则 G 为可刻画的.

上述可刻画群的研究已经有了一个比较完整的综述报告, 可参见文献 [67, 表 1–9], 表中 h 函数为 1 的有限单群即为可刻画单群.

Mazurov 等对上述刻画条件去掉了群为 “有限” 的限制, 证明了一系列的结果 (参见文献 [70,85, 114–119,126–128,130–133,135,208,224–227]). 一个典型的结果如下:

定理 2.6[113] 如果群 G 的谱为 $\{1,2,3,4,7\}$, 则 G 同构于 $\mathrm{PSL}_2(7)$.

注意到, 如果加上群 G 为有限的条件, 那么上述定理的结论发表于 1984 年的文献 [160], 而去掉 "有限" 的条件, 有同样结论的文章发表于 2007 年, 其中经历了 23 年.

对于 h 函数, 文献 [148] 和 [100, 问题 12.84] 猜测 $h(\Gamma)=\{0,1,\infty\}$, 文献 [40,122,123,138,148,173,183,192] 先后对这个猜想给出了反例, 并给出了 h 函数为 2 的群的例子. 其中, 文献 [173] 提出了如下的问题: 设 Γ 是自然数集的任意子集, 是否存在一个正整数 k, 使得 $h(\Gamma)=\{0,1,2,\dots,k,\infty\}$, 如果存在, 这样的 k 为多少? 文献 [214] 给出了如下的群的例子: 对任意 $r>0$, $h(\pi_e(L_3(7^n)))=r+1$, 其中 $n=3^r$, 这些 $r+1$ 个群为 $L_3(7^n)\langle\rho\rangle$, ρ 为 $L_3(7^n)$ $(n=3^r)$ 的域自同构, $k=0,1,2,\dots,r$. 这给出了对任意正整数 k, 都有 h 函数为 k- 可刻画的群的例子. 观察 h 函数为 2 的群的例子 (参见文献 [170, 定理 5.4]), 作者曾提出, 对于任意 k, 是否存在两个有限的 k- 可刻画群, 它们是截断自由的 (section-free), 即相互之间一个不是另一个的单截断 (参见文献 [170, 问题 5.2]). 文献 [66] 指出了存在这样的群的例子, 它们是 $G_1=L_{15}(2^{60}).3$ 和 $G_2=L_{15}(2^{60}).5$ (参见文献 [100, 问题 A: 16.106]). 注意到, 上述的 G_1 和 G_2 虽是截断自由的, 但有相同的正规子群 $L_{15}(2^{60})$.

有限群的谱是一个包含 1 的正整数集. 如果将整数集 $\pi_e(G)$ 划分为 1、素数集 $\pi_e'(G)$ $(\pi_e'(G)=\pi(G))$ 和合数集 $\pi_e''(G)$, 那么下述结论成立:

定理 2.7 [45] 设 G 是有限群, 则 $|\pi_e'(G)|\leqslant|\pi_e''(G)|+3$. 而当等式成立时, G 为单群, 且这些单群均可被它的谱加以刻画. 它们是下述单群之一:

(I) A_5、$L_2(11)$、$L_2(13)$、$L_2(16)$、$L_3(4)$ 和 J_1.

(II) $Sz(q)$, 其中 $q=2^{2n+1}$ 满足 $q-1$、$q-\sqrt{2q}+1$ 和 $q+\sqrt{2q}+1$ 中的每一个数或为素数, 或为两个素数乘积.

(III) $L_2(2^n)$, 其中 n $(n\geqslant 5)$ 为奇素数且满足 $(2^n+1)/3$ 为素数, 同时 2^n-1 或为素数, 或为两个素数的乘积.

(IV) $L_2(3^n)$, 其中 n 为奇素数且满足 $(3^n+1)/4$ 为素数, 同时 $(3^n-1)/2$ 或为素数, 或为两个素数的乘积.

(V) $L_2(5^n)$, 其中 n 为奇素数且满足 $(5^n-1)/4$ 和 $(5^n+1)/6$ 均为素数.

(VI) $L_2(p)$, 其中 p 为大于 13 的素数且有

(i) $(p-1)/4$ 和 $(p+1)/6$ 均为素数;

(ii) $(p-1)/6$ 和 $(p+1)/4$ 均为素数.

问题 2.8 在上述定理的情形 (II)–(VI) 中, 满足相应条件的单群的个数是有限多个还是无限多个?

如果记 $\iota(G)$ 为集合 $\pi_e(G)$ 中的 pq $(p\neq q)$ 型数之集, 则有如下定理:

定理 2.9 [44] 设 G 是有限群, 则 $|\pi(G)|\leqslant|\iota(G)|+4$. 而当等式成立时, G 为单群, 且这些单群均可以被它的谱加以刻画.

定理 2.9 中有限群的阶的素因子个数 $|\pi(G)|$ 受到 $|\pi_e''(G)|$ (或 $|\iota(G)|$) 的制约.

若 "群的阶" 无平方因子, 则群为可解群 (亚循环群). 对照这个结论和 A_5 的特征性质 (定理 1.3), 作者提出如下问题:

问题 2.10 研究 "元素的阶无平方因子" 的有限群.

不附加其他条件, 有限群的谱还能有哪些性质? 即问题 2.2 中提到的: 什么样的数量集可以成为元素的阶的集 $\pi_e(G)$?

文献 [160] 发表后, Brandl 给作者来信, 提出了两个问题, 其中的一个问题是: 若有限群 G 中元素的阶为连续整数, 即 $\pi_e(G)=\{1,2,3,\dots,n\}$, 则可以连续下去的最大的 n 是多少? 显然, 这个问题

也是对群的谱附加了 “连续” 的条件. 为解决这个问题, 作者考虑了有限群的素图分支 (prime graph components), 找到了解决这个问题的关键性文献 [201] (相关的文献参见 [83,102], 而文献 [103] 最为完整地记载了素图分支).

定义 2.11 [201]　设 G 是有限群. 用 $\pi_e(G)$ 给出 G 如下的简单图 $\Gamma(G)$: 图的顶点集为 $\pi(G)$, 两个不同的点 p 和 q 连成一个边当且仅当 $pq \in \pi_e(G)$, 记为 $p \sim q$. 记 $t(G)$ 为 $\Gamma(G)$ 的连通分支数, 而用 $\pi_i = \pi_i(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, t(G))$ 表示 $\Gamma(G)$ 的第 i 个连通分支. 当 G 的阶为偶数时, 记 $2 \in \pi_1(G)$. 该图 $\Gamma(G)$ 常称为群 G 的素图. 此图由 Grunberg 和 Kegel 于 1975 年提出, 故也称为群 G 的 Grunberg-Kegel 图 (简写为 $\mathrm{GK}(G)$).

由素图的定义易知, $\pi_e(G)$ 决定 $\Gamma(G)$; 但反过来, 同样的 $\Gamma(G)$ 可以有不同的 $\pi_e(G)$. 于是, 用 $\Gamma(G)$ 去研究有限群, 特别是有限单群, 就成为一个新的课题.

定理 2.12 [20]　设 G 是有限群, 若 G 的谱为连续整数, 即 $\pi_e(G) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (称这样的群为有限 OC_n 群), 则 $n \leqslant 8$. 进一步地, 这些群已被分类如下:

(I) $n \leqslant 2$, G 为初等 Abel 群.

(II) $n = 3$, $G = [N]Q$ 为 Frobenius 群, 其中 $N \cong Z_3^t$, $Q \cong Z_2$ 或 $N \cong Z_2^{2t}$, $Q \cong Z_3$.

(III) $n = 4$, $G = [N]Q$ 且有下面情形之一成立:

(i) N 的方次数 (exponent) 为 4, 且类小于等于 2 而 $Q \cong Z_3$.

(ii) $N \cong Z_2^{2t}$, $Q \cong \Sigma_3$.

(iii) $N \cong Z_3^{2t}$, $Q \cong Z_4$ 或 Q_8 而 G 为 Frobenius 群.

(IV) $n = 5$, $G \cong A_6$ 或 $G = [N]Q$, 其中 $Q \cong A_5$, N 是初等 Abel 2- 群且为自然的 $\mathrm{SL}(2, 4)$- 模的直和.

(V) $n = 6$, G 为下面情形之一:

(i) $G = [P_5]Q$ 为 Frobenius 群, 其中 $Q \cong [Z_3]Z_4$ 或 $Q \cong \mathrm{SL}(2, 3), P_5 \cong Z_5^{2t}$.

(ii) $G/O_2(G) \cong A_5$, 且 $O_2(G)$ 是初等 Abel 群且为自然和正交 $\mathrm{SL}(2, 4)$- 模的直和.

(iii) $G \cong \Sigma_5$ 或 $G \cong \Sigma_6$.

(VI) $n = 7$, $G \cong A_7$.

(VII) $n = 8$, $G = [\mathrm{PSL}(3, 4)]\langle\beta\rangle$, β 为 $\mathrm{PSL}(3, 4)$ 的酉自同构.

这里 $[A]B$ 为正规子群 A 借助于补群 B 的半直积.

推论 2.13　设 G 是有限群, 则 $\pi_e(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$ 当且仅当 $G \cong A_7$.

对于无限的 OC_7 群 G, 文献 [120] 证明了它是局部有限的, 即 G 中任意有限多个元素生成的子群为有限的, 从而推导出 $G \cong A_7$ (参见文献 [100, 问题 A: 19.80]).

易知, Z_2^∞ 和 $[Z_3^\infty]Z_2$ 分别是无限 OC_2 群和 OC_3 群. 对 $4 \leqslant n \leqslant 6$, 也存在无限的 OC_n 群.

问题 2.14　对无限 OC_n 群, 它的最大值 n 是多少? 无限 OC_n 群是周期的, 即群中元素的阶均为有限的, 它是否为局部有限的? 这是 Burnside 问题 [72] 的一个特殊情形.

文献 [108, 202] 则分别讨论了元素的阶为奇数连续和元素的阶除一些素数外连续的有限群.

问题 2.15　对照定理 2.12, 研究有限群的谱为分段连续的有限群. 例如, $\pi_e(A_5) = \{1, 2, 3, 5\}$ [184] 和 $\pi_e(\mathrm{PSL}_2(7)) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ [160] 都是谱为两段连续的有限单群. 进一步地, 对分段连续的有限群, 找出其最大连续的长度. 例如, 一段连续情形的有限群, 即为 OC_n 群, 其长度为 8.

注意到群中元素的阶为循环子群的阶, 文献 [51, 171] 分别给出了交换子群的阶和真子群的阶为连续的有限群. 又因为群中元素的阶是一个共轭不变量, 文献 [150] 则研究了非线性特征标次数为连续的有限群.

3 用群的阶和元素的阶之集刻画有限单群

按照有限单群分类 (classification of finite simple groups, CFSG), 任一有限单群为下述单群之一 (参见文献 [54]):

(i) 素数阶群;

(ii) 次数大于等于 5 的交错群;

(iii) 典型单群;

(iv) 例外的 Lie 型单群;

(v) 26 个散在单群.

从 1987 年到 2003 年, 作者及其合作者先后证明了除典型群 $B_n(q)$、$C_n(q)$ 和 $D_n(q)$ (n 为偶) 外, 对所有的有限单群, 猜想 1.1 都成立 (参见文献 [32, 165, 172, 180–182, 205]). 2009 年, 文献 [195] 证明了该猜想对 $B_n(q)$、$C_n(q)$ 和 $D_n(q)$ (n 为偶) 也成立. 于是, 上述猜想得到证明而成为一个定理, 即所有的有限单群均可由 "群的阶" 和 "元素的阶之集" (简称 "两个阶") 确定.

对于 26 个散在单群, 它们的 "两个阶" 十分明确, 只需要利用文献 [201] 中有限群的素图分支进行研究. 而事实上, 这 26 个散在单群除 J_2 外, 均可仅用 "元素的阶之集" 加以刻画 (参见定理 2.5(2)).

对于次数大于等于 5 的交错群, 文献 [182] 根据群 A_n 的阶 $(n!)/2$, 建立了一系列的引理, 特别地引用了数论中的 Stirling 公式, 在不依赖于文献 [201] 关于有限群的素图分支的情形下证明了结论成立. 事实上, 对于所有的次数大于等于 5 的交错群, 除 A_6 和 A_{10} 外, 均可仅用 "元素的阶之集" 加以刻画 (参见定理 2.5(1)).

对于典型单群和例外的 Lie 型单群, 作者首先用单群分类定理解决了 Artin 于 1955 年所提出的一个问题: 确定所有 Sylow 子群的阶大于 $|G|^{1/3}$ 的有限单群 [14], 即证明了如下两个引理 (参见文献 [168]):

引理 3.1 设 G 是有限单群, 若 $|G| = p^k m$, 其中 p 不整除 m, p 为奇素数, 且 $|G| < p^{3k}$, 则 G 为下述群之一:

(1) 一个特征为 p 的 Lie 型单群;

(2) A_5、A_6 和 A_9;

(3) $L_2(p-1)$ (p 为 Fermat 素数)、$L_2(8)$ 和 $U_5(2)$.

引理 3.2 设 G 是有限单群, 若 $|G| = 2^k m$, 其中 m 为奇数, 且 $|G| < 2^{3k}$, 则 G 为下述群之一:

(1) 一个特征为 2 的 Lie 型单群;

(2) $L_2(r)$ (r 为 Fermat 素数或为 Mersenne 素数);

(3) A_6、$U_3(3)$、A_9、M_{12}、$U_3(4)$、A_{10}、M_{22}、J_2、HS、M_{24}、Suz、Ru、Fi_{22}、Co_2、Co_1 和 B.

上述引理和群的阶将研究的范围缩小到 Lie 型单群内. 再进一步分析, 证明了除典型群 $B_n(q)$、$C_n(q)$ 和 $D_n(q)$ (n 为偶) 外, 猜想 1.1 均成立.

事实上, 在例外的 Lie 型单群中, Suzuki-Ree 群 ${}^2B_2(2^{2n+1})$ ($n \geqslant 1$) [169]、${}^2G_2(3^{2n+1})$ ($n \geqslant 1$) [21]、${}^2F_4(2^{2n+1})$ ($n \geqslant 1$) [46] 以及 $G_2(q)$ [196]、$E_8(q)$ [104] 和 $F_4(2^m)$ [31] 等均可仅用 "元素的阶之集" 加以刻画 (参见文献 [67, 表 8]).

对典型群 $B_n(q)$ 和 $C_n(q)$, 它们的群的阶是相同的, 是否存在某个 n 和素数幂 q, 使得它们的群的谱也相同, 从而构成了猜想 1.1 的反例? Shi [176] 和 Grechkoseeva [65] 几乎同时考虑了这样一个问题, 用不同的方法都证明了对所有的 n 和素数幂 q, $\pi_e(B_n(q)) \neq \pi_e(C_n(q))$, 从而这样的反例不存在.

为最终证明猜想 1.1, 文献 [194] 直接从典型群 $B_n(q)$、$C_n(q)$ 和 $D_n(q)$ (n 为偶) 的谱出发, 给出了这些辛群和正交群的非交换合成因子. 最后, 利用文献 [194] 中的 3 个定理, 文献 [195] 证明了猜想 1.1 成立, 从而利用 "两个阶" 刻画有限单群的猜想 1.1 成为一个定理.

数和数量集在数学中有很重要的地位. "元素的阶之集" (谱) 是作者最早提出的概念, 现在在群论界已被普遍重视. 单群复杂多样, 而 "两个阶" 却是最简单的概念. 猜想 1.1 的成立给出了 "简单" 与 "复杂" 的一个联系. 当然, 其证明依赖于单群分类定理.

"两个阶" 刻画了所有的有限单群, 然而对一些阶很小的群, 却不能刻画. 例如, 对 8 阶的二面体群 D_8 和 8 阶的四元数群 Q_8, 有 $\pi_e(D_8)=\pi_e(Q_8)=\{1,2,4\}$, 但它们不同构.

下面给出猜想 1.1 的一个应用.

设 G 是有限群, $B(G)$ 是 G 的 Burnside 环. Yoshida [211] 提出了如下公开问题: 设 G 和 S 是有限群, $B(G)\cong B(S)$ 能否推导出 $G\cong S$ (参见文献 [211, 第 340 页, 问题 2])? 文献 [101, 推论 5.2] 证明了有限群的谱由它的 Burnside 环所确定, 于是有如下应用:

推论 3.3　设 G 是有限群, S 是有限单群, 如果 $B(G)\cong B(S)$, 则 $G\cong S$.

于是, Burnside 环可识别单群, 或者说单群可由它的 Burnside 环刻画.

问题 3.4　能否不依赖于单群分类定理去证明上述猜想 1.1?

对于少数的群的阶小的单群, 可以不用分类定理去证明, 如 A_5 (参见文献 [163]). 而对所有的有限单群不用分类定理给出证明似乎是不可能的.

问题 3.5　弱化 "两个阶" 的条件, 对所有的有限单群给出刻画, 即能否由 "群的阶" 和 "部分元素的阶之集" 或 "群的 Hall 子群的阶" 和 "元素的阶之集" 对所有的单群给出刻画?

对素数幂 $q=p^e$, 记 ch(q)= p, 而对定义在 GF(q) 上的 Lie 型单群 G, 记 G 的特征 $\mathrm{ch}(G)=p$. 文献 [92] 证明了如下定理 (参见文献 [92, 定理 1.2]):

定理 3.6　设 G 和 H 是特征为奇数的 Lie 型单群, 如果 $m_i(G)=m_i(H)$ $(i=1,2,3)$, 则 G 和 H 有相同的特征, 其中 $m_1(G)$、$m_2(G)$ 和 $m_3(G)$ 分别表示群 G 中元素的最大、第二大和第三大的阶.

由此产生如下问题: 能否由 "群的阶" 和 "部分元素的阶之集" 对单群给出刻画? 事实上, 已经证明有如下定理:

定理 3.7 [75,76,107,212]　设 G 是群. S 是下述单群之一:

(1) 散在单群 [76];

(2) $L_2(p)$, 其中 $p\neq 7$ 为素数 [107];

(3) $L_2(q)$ 型的单 K_4 群, 其中 q 为素数幂 [75];

(4) $L_3(p)$ 型的单 K_5 群, 其中 p 为素数, 且 $(3,p-1)=1$ [212].

则 $G\cong S$ 当且仅当 $|G|=|S|$ 以及 $m_1(G)=m_1(S)$, 其中 $m_1(G)$ 是群 G 中元素的最大阶.

如果增加群 G 中元素的第二大或第三大的阶, 则还可以对一些单群加以刻画 (参见文献 [74]).

设 G 是有限群, 记 $\mathrm{Van}(G)=\{g\in G \mid 存在\ \chi\ 使得\ \chi(g)=0\}$, 其中 χ 为 G 的一个不可约复特征标, 记 Vo(G) 为 Van(G) 中元素的阶之集. 显然, Vo(G) 是 G 的元素的阶之集 $\pi_e(G)$ 的一个子集. 文献 [100, 问题 19.30] 提出了如下猜想:

猜想 3.8　设 G 是有限群, S 为有限单群, 则 $G\cong S$ 当且仅当 (1) $\mathrm{Vo}(G)=\mathrm{Vo}(S)$; (2) $|G|=|S|$.

上述猜想作为问题也在张金山的博士学位论文中被提出 [217], 近期进展参见文献 [158] 和脚注 3).

事实上, 群的阶、元素的阶、同阶元长、共轭类长和特征标次数等都是群中的共轭不变量. 此外,

3) Yan Q F, Shen Z C, Zhang J S, et al. A new characteristic of sporadic simple groups J_1 and J_4. Submitted

Sylow 正规化子的阶、极大 Abel (可解) 子群的阶、极大子群指数和 Sylow 数等数量都是群的重要指标. 从它们出发研究群特别是单群的结构是一个广泛而有意义的课题. 例如, 研究共轭类长均为素数幂的有限群的结构.

Qian [151] 和 Qian 等 [154] 定义了特征标的余次数并给出了元素的阶与特征标次数之间的一个关系. 下面考虑用 "群的 Hall 子群的阶" 和 "元素的阶之集" 对单群给出刻画. 首先, 研究利用群 G 的 "Sylow 2- 子群的阶" ($|G|_2$) 和 "元素的阶之集" 刻画交错单群和散在单群. 我们有如下定理:

定理 3.9 设 G 是一个有限群, S 为交错单群, 则 G 同构于 S 当且仅当 (1) $|G|_2=|S|_2$; (2) $\pi_e(G)=\pi_e(S)$.

定理 3.10 设 G 是一个有限群, S 为散在单群, 则 G 同构于 S 当且仅当 (1) $|G|_2=|S|_2$; (2) $\pi_e(G)=\pi_e(S)$.

引理 3.11 [56] 设 G 是有限群且 $\pi_e(G)=\pi_e(S)$, S 为交错单群 A_n ($n\geqslant 5$, $n\neq 6,10$), 则 $G\cong S$.

文献 [123,148,163] 较早地考察了用元素的阶之集来刻画交错群和对称群. 文献 [56,106,213] 接着研究用元素的阶之集刻画交错群问题. 而文献 [187] 指出了 A_6 和 A_{10} 的不可刻画性.

引理 3.12 [20] 设 G 是有限群且 $\pi_e(G)=\pi_e(A_6)=\{1,2,3,4,5\}$, 则 $G\cong A_6$, 或 $G=[N_1]Q$, 其中, $Q\cong A_5$, 而 N_1 是初等 Abel 2- 群, 为自然 $\mathrm{SL}(2,4)$- 模的直和.

引理 3.13 [187] 设 G 是有限群且 $\pi_e(G)=\pi_e(A_{10})=\{1,2,\ldots,10,12,15,21\}$, 则 $G\cong A_{10}$, 或 $G=[A]C$, 其中 A 是 Abel $\{3,7\}$- 群, $C=C_G(t)=[\langle t\rangle]S_5$, 这里 t 为对合且 $a^t=a^{-1}$, $a\in A$. C 的 Sylow 2- 子群为 16 阶广义四元数群.

引理 3.14 [134, 170] 设 G 是有限群且 $\pi_e(G)=\pi_e(M)$, M 为散在单群, M 不同构于 J_2, 则 $G\cong M$.

文献 [170] 证明了除 Co_2 和 J_2 外, 其余 24 个散在单群均可用元素的阶之集加以刻画. 文献 [134] 证明了 Co_2 可用元素的阶之集加以刻画, 而当 $\pi_e(G)=\pi_e(J_2)=\{1,2,\ldots,8,10,12,15\}$ 时, $G\cong J_2, S_8$, 或 G 是一个 2^{6t} ($t=1,2,\ldots$) 阶 2- 群 N 借助于 A_8 的一个扩张 $[N]A_8$. 由此以及引理 3.11, 不难证明定理 3.9 和 3.10 成立.

问题 3.15 设 G 是一个有限群, S 为有限单群. 如果 (1) $|G|_\pi=|S|_\pi$, 其中 $|G|_\pi$ 为 G 的 π- Hall 子群的阶, $\pi\neq\pi(G)$; (2) $\pi_e(G)=\pi_e(S)$, 能否证明 $G\cong S$?

Mazurov 于 2007 年在圣彼得堡举办的国际代数会议上提出了如下猜想: 设 G 是有限群, L 是次数足够大的交错群或 Lie 秩足够大的 Lie 型单群. 若 G 与 L 同谱, 则 G 为有 socle 同构于 L 的几乎单群. 事实上, 如果 L 为有限单群, G 与 L 同谱, 则或者 G 为可解的, 此时 L 为下述情形之一: $L_3(3)$、$U_3(3)$ 和 $S_4(3)$; 或者 G 为有 socle 同构于 L 的几乎单群 (参见文献 [56, 定理 2]). 文献 [68] 最后证明了 Mazurov 提出的上述猜想成立. 利用这些结果, 比较 $|G|_\pi$ 和 $|M|_\pi$, 可以回答问题 3.15.

4 Thompson 猜想和 Thompson 问题

4.1 Thompson 猜想的起源和早期的工作

如前所述, 作者于 1987 年向 Thompson 报告了猜想 1.1, Thompson 在他 1988 年的回信中提出 (Thompson 猜想 (1988)): 设 G 和 M 是有限群, 记 $N(G)=\{n\in\mathbb{Z}^+\mid G \text{ 有共轭类 } C, |C|=n\}$. 再设 M 为非 Abel 单群, G 的中心为 1, 如果 $N(G)=N(M)$, 则 G 和 M 同构.

对 M 为散在单群的情形, Chen [33] 证明了 Thompson 猜想成立. 接着, 完成了他的博士学位论文 "关于 Thompson 猜想". 文献 [34] 在素图分支 [201] 的基础上给出了阶分量的定义:

定义 4.1 设 G 是有限群, $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t$ 为 G 的素图分支, 其中 $t = t(G)$ 为群 $\Gamma(G)$ 的连通分支数. 令 $|G| = m_1 m_2 \cdots m_t$, 其中 $\pi_i = \pi(m_i)$, 则称 $m_1, m_2, \ldots, m_t$ 为 G 的阶分量. 记 $\mathrm{OC}(G) = \{m_1, m_2, \ldots, m_{t(G)}\}$ 为群 G 的阶分量的集.

在此基础上, 文献 [33, 34] 证明了 Thompson 猜想对所有的散在单群成立. 文献 [35, 36] 证明了该猜想对所有素图分支数大于 2 的有限群成立. 而对于素图分支数等于 2 的情形也可以进行同样的讨论, 例如, 文献 [37] 证明了 Thompson 猜想对群 ${}^3D_4(q)$ 成立.

4.2 群的素图为连通的情形

到了 2009 年, 对于素图为连通的单群 A_{10} 和 $L_4(4)$, 文献 [193] 证明了 Thompson 猜想成立. 接着, Ahanjideh 在系列文章中证明了对 Lie 型单群 $A_n(q)$ [5]、$B_n(q)$ [8]、$C_n(q)$ [6]、$D_n(q)$ $(n \neq 4, 8)$ [7]、${}^2A_n(q)$ [9] 和 ${}^2D_n(q)$ [10], Thompson 猜想也成立. 而对于其他例外型 Lie 型单群, 文献 [62, 84, 97, 98, 206] 证明了 Thompson 猜想成立. 对于交错单群, 文献 [13, 55, 57–60, 110, 204] 给出了证明. 最后, Gorshkov [61] 对余下的情形 $D_4(q)$ 和 $D_8(q)$ 证明了 Thompson 猜想成立. 至此最终证明了 Thompson 猜想成立, 从而 Thompson 猜想成为一个定理.

4.3 Thompson 问题

Thompson 问题是 Thompson 在 1987 年给作者的回信中提出的问题. 设 G_1 和 G_2 为同阶型群 (见定义 1.2). 又设 G_1 是可解群, G_2 是否也一定可解? 即对于偶阶群 G, 不能仅用 $|G|$ 来判断它的可解性 (参见文献 [50]). 但是, 如果 Thompson 问题正确, 那么通过同阶型可以判断 G 的可解性. 特别地, Thompson 在信中写道: 我已经把关于同阶型的问题告诉了很多数学工作者, 这个问题起源于研究代数数域, 这是我非常感兴趣的. 同时, Thompson 还在信中给出了如下同阶型且为非可解的群的例子:

$$G_1 = 2^4 : A_7, \quad G_2 = L_3(4) : 2_2.$$

它们都是 M_{23} 的极大子群, 其中符号 “:” 表示半直积, 详见文献 [41] 正文第 72 页中 M_{23} 的极大子群以及第 23 页中 $L_3(4)$ 的自同构群.

作者曾于 2011 年 9 月在俄罗斯举办的 “Algebra and Mathematical Logic” 纪念 V. V. Morozov 诞辰 100 周年的国际会议上作了题为 “Thompson Problem and Thompson Conjecture” 的大会报告, 介绍了上述问题和猜想.

4.4 阶方程

记 $M_G(n)$ 是 G 中 n 阶元的集合. 同阶元可以给出 G 的一个分拆, 即 $G = \cup M_G(n)$, $n \in \pi_e(G)$. 因为每个 n 阶元必定在某个 n 阶循环子群里面, 所以 $|M_G(n)| = V_n(G)\phi(n)$, 这里 $V_n(G)$ 是 n 阶循环子群的个数, $\phi(n)$ 表示 Euler 函数. 因此, 以下方程成立: $|G| = \cup V_n(G)\phi(n)$, $n \in \pi_e(G)$, 称其为 G 的阶方程. 记该方程为 $\mathrm{Ord}(G)$. 于是, 对于有限群 G 和 H, 它们的阶方程相同, 表示 $\pi_e(G) = \pi_e(H)$, 且对于每个 $d \in \pi_e(G)$ 有 $V_d(G) = V_d(H)$. 容易看出阶方程相同与 Thompson 问题中的同阶型一致.

如果 G 和 H 为同阶型, 不难证明, 如果 H 幂零, 则 G 也幂零; 如果 H 超可解, 则 G 可解 (参见文献 [203]). 当然, 如果 H 是有限非交换单群, 则 G 同构于 H 是非可解的, 这是因为猜想 1.1 已经被证明成立. 文献 [156, 157] 证明了, 如果 H 是可解的且 H 的素图不连通, 则 G 也可解. 文献 [156, 157] 主要证明了如下论断:

引理 4.2 如 G 是有限群, H 是 Frobenius 群 (2-Frobenius 群), G 和 H 的阶方程相同, 则 G 是 Frobenius 群 (2-Frobenius 群). 进一步地, 如果 H 是可解的, 则 G 也是可解的.

由引理 4.2 即可推导出如下定理:

定理 4.3 设 G 是有限群且使得 G 和 H 是同阶型. 如果 H 是可解的且 H 的素图非连通, 则 G 也可解.

注意到群中两个元素共轭必然为同阶, 于是一个 "同阶类" 是若干个 "共轭类" 的并. 反过来, 两个元 "同阶" 未必 "共轭". 系列丛书《群论中没有解决的问题》记载了如下问题: 在有限群 G 中, 如果同阶元均共轭, 是否有 $|G| \leqslant 6$ (参见文献 [100, 问题 7.48])? 利用有限单群分类 (CFSG), 文献 [49,52,191,215] 先后对此问题给出了正面的回答.

问题 4.4 不用单群分类定理, 能否证明在有限群 G 中, 若同阶元均共轭, 则 $|G| \leqslant 6$?

Thompson 问题从 "同阶" 出发来研究群的结构, 而 Thompson 猜想从 "共轭" 出发来研究群, 两者既有区别又有联系. 共轭类对于研究有限群结构的重要性是很早就知道的. 文献 [30] 综述了共轭类长或共轭类数对有限群结构的影响. 文献 [155] 用同阶类长刻画了单群 A_5, 即证明了如下定理:

定理 4.5 群 G 同构于交错群 A_5 当且仅当 G 的同阶型为 $\{1, 15, 20, 24\}$.

如果记 $\mathrm{nse}(G) = \{m_k \mid k \in \pi_e(G)\}$, 其中 m_k 为 G 中 k 阶元的个数, 则上述定理可表示为: G 同构于交错群 A_5 当且仅当 $\mathrm{nse}(G) = \mathrm{nse}(A_5)$. 对于一些交错单群和线性单群, 也有不少文献用 $\mathrm{nse}(G)$ 对这些单群进行刻画 (参见文献 [11, 15]).

文献 [155] 给出了如下一个结论:

命题 4.6 设 G 是元素的个数大于 2 的群. 若 G 的同阶元的长度有限, 其最大长度为 s, 则 $|G| \leqslant s(s^2-1)$.

Thompson 问题研究的是用 "同阶" 来判别群的可解性, 这里 "同阶" 的条件不能加强为 "共轭". 事实上, 下述结论成立:

定理 4.7 [145] 存在两个有限群 G 和 H 使得 $N(G) = N(H)$, 即它们共轭类长度的集合相同, 但 G 为可解的, H 为非可解的.

与研究 Thompson 问题相关的一项工作是用最高阶元的个数或型研究群的可解性 (参见文献 [38, 48, 77, 87–91, 189, 207]).

5 相关的数量刻画问题

5.1 有限群的阶宽和谱宽

对任意正整数 n, 算术基本定理断言 $n = p^a q^b \cdots r^c$, 其中 $p, q, \ldots, r$ 为不同素数.

数的素因子分解可能是数学中最重要的结果. 下文将考虑素因子的个数对群结构的影响.

注意到有限群 G 的阶 $|G|$ 和群中元素 g 的阶 $|g|$ 都是数, 用 $|\pi(G)|$ 表示 $|G|$ 的素因子的个数, 而 $|\pi(g)|$ 表示 $|g|$ 的素因子的个数. 分别称它们为有限群的阶的宽度 $w_o(G)$ 和元的宽度.

定义 5.1 设 G 是有限群, 称 $w_o(G) = |\pi(G)|$ 为 G 的阶的宽度, 而称 $w_s(G) = \max\{|\pi(g)| \mid g \in \pi_e(G)\}$ 为 G 的谱的宽度.

对于群 G 的其他的共轭不变量集, 也可以给出相应的宽度的概念.

2020 年 8 月, 在俄罗斯举办的 "Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics" 线上系列会议上, 作者作了首场大会邀请报告, 提出了上述两个宽度的概念, 并讨论了宽度较小的有限群的结构,

其中, 关于 “阶的宽度” 的一些结果可参见文献 [179]. 该文献指出, $w_o(G)=1$ 的群即为有限 p 群, 虽然其群的阶只有一个素因子, 但其结构仍然十分复杂. 近期的中文文献可参见 [221, 222]. 举一个特别 “简单” 的情形, $\pi_e(G)=\{1,3\}$, 其结构仍然复杂, 目前还没有明确的分类.

当 $w_o(G)=2$ 时, 也就是 p^aq^b 阶群, 它是一类特殊的可解群. 1904 年, Burnside[25] 用表示论对其可解性给出了第一个证明. 在此之后, Goldschmidt[53] 在 p 和 q 均为奇素数情形时对此定理给出了纯群论证明, 接着 Bender[16] 和 Matsuyama[121] 分别于 1972 和 1973 年证明了剩余情形, 从而给出了 p^aq^b 定理的抽象群证明.

对于 $w_o(G)=3$ 的情形, 它们可以是非可解群, 其主因子包含 $w_o(G)=3$ 的有限单群. Herzog[80] 给出了所有的 8 个 $w_o(G)=3$ 的有限单群 (单 K_3 群), 它们是 A_5、$L_2(7)$、$L_2(8)$、A_6、$L_2(17)$、$L_3(3)$、$U_3(3)$ 和 $U_4(2)$.

用单群分类定理, 文献 [82, 167, 200] 先后给出了 $w_o(G)=4$ 的单群 (单 K_4- 群) 4), 而文献 [24, 223] 对单 K_4- 群作了进一步的讨论. 它们是:

(I) A_n $(n=7,8,9,10)$、M_{11}、M_{12}、J_2; $L_2(q)$ $(q=16,25,49,81,97,243,577)$、$L_3(q)$ $(q=4,5,7,8,17)$、$L_4(3)$; $O_5(q)$ $(q=4,5,7,9)$、$O_7(2)$、$O_8^+(2)$、$G_2(3)$; $U_3(q)$ $(q=4,5,7,8,9)$、$U_4(3)$、$U_5(2)$; ${}^3D_4(2)$、${}^2F_4(2)'$、$Sz(8)$、$Sz(32)$;

(II) $L_2(r)$, 其中 r 为素数且满足如下方程: $r^2-1=2^a3^bu$, 其中 $a\geqslant 1$, $b\geqslant 1, u$ 为大于 3 的素数;

(III) $L_2(2^m)$ 且满足如下方程: $2^m-1=u$, $2^m+1=3t$, 其中 $m\geqslant 1$, u 和 t 为素数, $t>3$;

(IV) $L_2(3^m)$ 且满足如下方程: $3^m+1=4t$, $3^m-1=2u$, 或 $3^m+1=4t$, $3^m-1=2u$, 其中 $m\geqslant 1$, u 和 t 为奇素数.

因为 p^aq^b 阶群为可解, 所以单 K_2 群个数为 0, 而单 K_3 群个数为 8. 以下是关于单 K_4 群个数的一个猜测.

猜想 5.2　单 K_4 群有无限多个.

特别地, 作者猜测存在无限多个素数 r 使得 $w_o(L_2(r))=4$. 然而, 要证明这个结论是一个困难的问题, 因为它是一个没有解决的 Dickson 猜想[47] 的特殊情形. 在数对

$$\begin{aligned}&(x,3x-2),\quad (x,2x+1),\quad (x,4x+1),\quad (x,6x-1),\\&(x,6x+1),\quad (x,2x-1),\quad (x,4x-1),\quad (x,8x-1)\end{aligned}$$

中, 如果能证明对素数 x 使得上述任意一个数对中有无限多个素数对出现, 那么单 K_4 群的个数是无限的. 反过来考虑, 如果对无限多的素数 x, 上述数对中的第二个数只能出现有限多个素数, 那么能否由此推导出矛盾?

文献 [86, 105] 研究了 $w_o(G)=5$ 和 $w_o(G)=6$ 的单群. 对群 G 的阶的宽度 $w_o(G)$, 如下结论成立: $w_o(G)\leqslant|\pi_e''(G)|+3$, 当等式成立时, G 为单群, 其中 $\pi_e''(G)$ 为 $\pi_e(G)$ 中的合数集 (定理 2.7); $w_o(G)\leqslant|\iota(G)|+4$, 当等式成立时, G 为单群, 其中 $\iota(G)$ 为 $\pi_e(G)$ 中的 pq $(p\neq q)$ 型数的集 (定理 2.9).

与上述猜想 5.2 类似, 从单群分类中出现的还有如下的数论问题:

问题 5.3　群的阶为平方数的单群的个数是否为无限?

5.2　谱宽较小的有限群

谱宽为 1 的有限群为有限质幂元群. 更特殊一点, 除单位元外, 元素的阶均为素数的群称为质元

4) 文献 [200] 中有结论没有具体的证明, 个别地方有遗漏 (如 $L_3(8)$ 和 $U_3(7)$), 也有重复 (如 $O_7(2)$ 和 $S_6(2)$ 是同一个群), 另外, Suzuki 系列单群是可以完全确定的

群. 文献 [184,185] 已经研究了这一类群. 对于可解质幂元群 G, 除得出 $w_o(G)=2$ 外, 给出了 G 的主列的具体结构 (参见文献 [185, 定理 2.4]); 而对不可解情形, 在文献 [188] 的基础上, 也给出了这类群的明确分类 (参见文献 [185, 定理 3.1 和 3.2]). 此外, 文献 [185, 定理 2.1] 证明了可解质幂元群 G 是 M- 群, 即 G 的每一个不可约复表示都是单项表示. 文献 [185] 表明质幂元群有如下的性质 (参见文献 [185, 定理 1.4]):

性质 5.4 若 G 是质幂元群, $H<G$, $(|H|,d)=1$, $d>1$, 则 $|H|$ 整除 G 中 d 阶元的个数.

下述结果说明上述性质是质幂元群的特征性质.

定理 5.5 [26] 有限群 G 是质幂元群, 当且仅当对所有 $H<G$, $1\neq d\in\pi_e(G)$, $(|H|,d)=1$, 则 $|H|$ 整除 G 中 d 阶元的个数.

文献 [79,209] 将有限质幂元群的研究推广到了无限情形.

问题 5.6 研究谱宽为 2 和 3 的有限群的结构.

文献 [96] 研究了谱宽为 2 的有限群 G, 即存在 $pq\in\pi_e(G)$, 而不存在 $pqr\in\pi_e(G)$, 其中 p、q 和 r 为相异素数. 对其特殊情形, 即可解的 $\{p,q,r\}$- 群, 得到了如下结论 (参见文献 [96, 定理 C]):

设 G 为可解的 $\{p,q,r\}$- 群, p、q 和 r 整除 $|G|$. 若不存在 $pqr\in\pi_e(G)$ (即 G 的谱宽小于等于 2), 则 $h(G)\leqslant 21$. 又若 $|G|$ 为奇数, 则 $h(G)\leqslant 15$, 其中 $h(G)$ 为 G 的 Fitting 高度.

文献 [96, 定理 C] 是最近得出的一个结果, 可以看出一般地研究谱宽为 2 的有限群的结构是一个比较困难的问题. Qian [152] 最近给出了谱宽为 3 的可解群的结构. 注意到, 对谱宽为 1 (质幂元群) 的有限群的分类是在文献 [188] 的基础上完成的. 而要完成谱宽为 2 和 3 的有限群的结构, 估计要用上单群分类定理.

5.3 相关问题的推广

用有限群的谱刻画有限单群 A_5 是三四十年前的工作. 下面给出该项工作的若干推广.

"谱" 是元素的阶之集, 即循环子群的阶之集, 可以考虑交换子群的阶之集、幂零子群的阶之集、可解子群阶之集 [19,43] 或者 Sylow 子群正规化子阶之集 [18] 等数量集对群结构的影响; 元素的阶、同阶元的个数、共轭类长和特征标次数等都是群中的共轭不变量, 从这些共轭不变量出发可构成不同的数量集.

"刻画" 可以是 "同构", 也可以是同态. 从 "h 函数" 来讲, 可以 $h(\Gamma)=1$, 也可以 $h(\Gamma)=k$ 为有限, 否则, 称它为不可刻画的.

"有限单群" 可以是 "单群", 也可以是不可解群, 如一些单群的自同构群 [17,78], 也可以是单群的直积, 如 $Sz(2^7)\times Sz(2^7)$ [124] 和 $J_4\times J_4$ [64].

"谱" 是研究条件, "刻画" 是研究方式, "有限单群" 是研究对象. 从不同的角度可提出关于这 3 个方面的不少问题来进行研究.

5.4 阶宽和谱宽的一个数量关系

1991 年, 作者 [166] 总结了用 "阶" 刻画单群的早期工作, 介绍了 Thompson 问题和猜想 (见本文的第 4.1 和 4.4 小节). 作者在文献 [166] 的第 5 节中提出如下问题 (参见文献 [166, 问题 4.3]):

记 $|\pi(k)|$ 为数 k 的相异素因子数. 设 G 为有限群, $n=\max\{|\pi(k)|\mid k\in\pi_e(G)\}$, 是否存在一个函数 f, 使得 $|\pi(G)|\leqslant f(n)$? 也就是说, 对任意有限群, 其阶宽是否受谱宽的制约?

当 $w_s(G)=n=1$ 时, G 为有限质幂元群, 由文献 [185, 定理 2.4, 3.1 和 3.2] 即知, 此时 $w_o(G)=|\pi(G)|\leqslant 4$.

对上述问题, Zhang [216] 证明了若 G 可解, 则阶宽 $w_o(G)$ 的界受限于谱宽 $w_s(G)$ 的二次函数, 即 $w_o(G)\leqslant \frac{w_s(G)(w_s(G)+3)}{2}$. 对一般的群 G, $w_o(G)$ 的界受限于 $w_s(G)$ 的一个超指数函数. 文献 [94,95,144] 先后改进了上述结果. 最近, 文献 [81] 证明了如下定理.

定理 5.7 设 G 为有限群, 则 $w_o(G)<210w_s(G)^4$.

一个类似的关于群的阶和余次数的结果可参见文献 [210].

由阶宽和谱宽的定义, 显然有 $w_s(G)\leqslant w_o(G)$. 下述结论对所有有限单群成立.

定理 5.8 [179] 设 G 为有限单群, 则 $w_s(G)<w_o(G)$.

自然地, 本文作者提出研究两个宽度差 $d=w_o(G)-w_s(G)$ 的问题. 例如, 讨论 $d=1$ 的有限单群的分类.

6 群、数与图

6.1 群与数

群与数有着密切的联系. 用群的阶可以决定群的一些重要性质, 如 15 阶群必循环、p^2 阶群必交换和 135 阶群必幂零等. 对于可解性, 在群论研究史上有很多有名的工作, 如 Feit-Thompson 的奇数阶群可解定理 [50] 和 Thompson 的极小单群分类定理 [190]. 由此可以得出如下定理:

定理 6.1 设 G 是有限群, 若 $(|G|,2)=1$ 或 $(|G|,15)=1$, 则 G 为可解群.

对上述 $(|G|,15)=1$ 的情形, 可参考美国《数学评论》(*Mathematical Reviews*) MR0230809 (37 #6367).

文献 [73] 称上述定理中的 2 和 15 为可解互素数, 即阶与其互素的群必为可解群. 进一步地, 文献 [73] 证明了所有的可解互素数一定是 2 或 15 的倍数. 对照用群的阶研究有限群 G, 用元素的阶之集 $\pi_e(G)$ 刻画有限单群. 此外, 用元素的阶之集 $\pi_e(G)$ 也可以判断 G 的可解性.

定义 6.2 设 G 是有限群, $\pi_e(G)$ 为 G 中元素的阶之集. 如果由 $\pi_e(G)\cap T=\emptyset$ 可推导出 G 为可解群, 则称数量集 T 为 G 的交空可解集.

定理 6.3 [178] 设 G 是有限群, $\pi_e(G)$ 为 G 中元素的阶之集. 若 $\pi_e(G)\cap T=\emptyset$, 其中 $T=\{2\}$, $\{3,4\}$ 或 $\{3,5\}$, 则 G 可解. 进一步地, 仅用 $\pi_e(G)$ 的交空可解集来判定 G 是否可解, 仅有上述 3 种情形.

问题 6.4 设 G 是有限群, 能否用 $\pi_e(G)$ 给出 G 为循环、交换、幂零、超可解以及 M- 群等性质的充分条件?

对照 "群的阶" 中数量的问题, 还可以用 "元素的阶" 提出类似的问题. 例如, 有限群的 Lagrange 定理表明, 子群的阶整除群的阶. 但对群的阶的任意一个因子不一定存在阶为这个因子的子群, 即 Lagrange 定理的逆不成立.

定义 6.5 一个有限群称为 CLT (the converse of Lagrange's theorem) 群当且仅当它满足 Lagrange 定理的逆.

定义 6.6 一个正整数集的子集 M 称为闭子集, 如果对所有 $k\in M$, k 的所有因子均属于 M.

不是所有的闭子集都可以成为群 G 的子群的元素的阶之集.

对照 CLT- 群, 给出如下定义:

定义 6.7 一个有限群 G 称为 COE 群, 如果对 $\pi_e(G)$ 的每一个闭子集 M, 都存在一个子群 H 使得 $\pi_e(H)=M$.

定理 6.8 [174] 若 G 是 COE 群, 则 $|\pi(G)|\leqslant 3$, 且有下述情形成立:

(1) G 是一个 p- 群;

(2) $|G|=p^aq^b$ $(p\neq q,\ ab\neq 0)$, 且若 G 的方次数为 p^mq^n, 则 G 有一个方次数为 p^mq^n 的 EPPO-子群;

(3) $|G|=2^a3^b5^c$ $(abc\neq 0)$ 且 G 的方次数为 30、60 或 120, 进一步地, G 有一个同构于 A_5 的真子群, G 不是质幂元群.

6.2 群与图有密切的联系

Gruenberg 和 Kegel 5) 首先在群上给出了素图 $\Gamma(G)$ 的概念 (参见定义 2.11) 和它的分类. 之后, 文献 [83,102,103,201] 给出了有限单群素图分支的具体连接情形. Lucido [111] 定义了素图的直径.

定义 6.9 称 $\mathrm{diam}(\Gamma(G))=\max\{d(p,q)\mid p$ 和 q 位于 $\Gamma(G)$ 的同一连通分支, $d(p,q)$ 表示 p 与 q 之间的距离$\}$ 为群 G 的素图 $\Gamma(G)$ 的直径.

若 G 为有限可解群, 则 $\mathrm{diam}(\Gamma(G))\leqslant 3$. 文献 [111] 证明了当 G 为一般有限群时 $\mathrm{diam}(\Gamma(G))\leqslant 5$, 并刻画了 $\mathrm{diam}(\Gamma(G))=5$ 的几乎单群 B, 这里 B 称为几乎单群, 是指存在非交换单群 A, 使得 $A\leqslant B\leqslant \mathrm{Aut}(A)$.

文献 [63] 给出了素图直径为 5 的有限群.

注意到, 当 $\mathrm{diam}(\Gamma(G))=1$ 时, 群 G 即为质幂元群 [185]. 于是有如下问题.

问题 6.10 研究 $\mathrm{diam}(\Gamma(G))=2,3,4$ 的有限群.

对可解群的情形, 文献 [96,152] 分别研究了素图直径为 2 和 3 的有限可解群.

文献 [112] 在文献 [111] 的基础上进一步讨论了素图为树, 即没有圈的情形, 得到了如下结果:

定理 6.11 若有限群 G 的素图为树, 则 $|\pi(G)|\leqslant 8$.

文中还给出了 $|\pi(G)|=8$ 的实例.

对照 G 的素图 $\Gamma(G)$, 文献 [4] 提出了可解图的如下概念:

定义 6.12 设 G 为有限群, G 的可解图 $\Gamma_S(G)$ 定义如下: 其顶点为整除 $|G|$ 的素数, 两个不同的点 p 和 q 相连成一个边当且仅当 G 中存在一个阶被 pq 整除的可解子群.

文献 [71] 证明了 $\mathrm{diam}(\Gamma_S(G))\leqslant 4$.

用图来研究群有很多工作, 1976 年 Erdös 定义了非交换图 [147].

定义 6.13 设 G 为有限群. G 的非交换图 $\nabla(G)$ 定义如下: $\nabla(G)$ 的顶点集为 $G\setminus Z(G)$, 两个顶点 x 和 y 相连当且仅当 $xy\neq yx$.

文献 [1,140] 曾猜想: 设 G 和 H 是两个非交换有限群, 满足 $\nabla(G)=\nabla(H)$, 则 $|G|=|H|$. 文献 [137] 给出群的例子证明这个猜想不成立. 进一步地, 文献 [1] 提出了如下猜想 (也称为 AAM (Abdollahi-Akbari-Maimani) 猜想):

猜想 6.14 设 S 是非交换单群, G 是群. 若 $\nabla(G)=\nabla(S)$, 则 $G\cong S$.

文献 [199,220] 证明了, 对素图不连通的单群 A_{10} 和交错群 $L_4(4)$, 上述猜想成立. 此外, 文献 [199] 还证明了如下结论:

命题 6.15 设 S 是非交换单群, G 是群, $Z(G)=1$. 若 $\nabla(G)=\nabla(S)$, 则 $N(G)=N(S)$.

5) Gruenberg K W, Kegel O H. Unpublished manuscript, 1975

由于 Thompson 猜想已经被证明成立 (参见第 4.1 和 4.2 小节), 于是 AAM 猜想成立.

定义 6.16 (单群的 OD- 刻画)　设有限群 G 的阶 $|G| = p^a q^b \cdots r^c$, 其中 $p < q < \cdots < r$ 为素数, $a, b, \ldots, c$ 为正整数. 对 $s \in \pi(G)$, 定义 $\deg(s) = |\{t \in \pi(G) \mid s \sim t\}|$, 称 $\deg(s)$ 为顶点 s 的次数. 令 $\mathrm{D}(G) = (\deg(p), \deg(q), \ldots, \deg(r))$, 称 $\mathrm{D}(G)$ 为群 G 的素图度数序列. 如果恰好存在 k 个不同构的群 G 使得 $|G| = |M|$ 且 $\mathrm{D}(G) = \mathrm{D}(M)$, 则称群 M 为可 k- 重 OD- 刻画. 特别地, 称可 1- 重 OD- 刻画群为可 OD- 刻画.

对于单群 (几乎单群) 的 OD- 刻画 (k- 重 OD- 刻画), Moghaddamfar 和张良才等作了大量的研究 (参见文献 [12, 141–143, 218, 219]).

6.3　有限单群素图 (GK 图) 顶点的连接标准

无论是研究用元素的阶之集 $\pi_e(G)$ 刻画有限单群, 还是上述单群的 OD- 刻画, 都离不开研究有关群的素图 (GK 图) (定义 2.11). 于是, 研究素图顶点的连接是一项十分重要的工作. 文献 [197, 198] 对每一个非交换单群的素图 (GK 图) 都给出了它们顶点的连接标准. 特别是与顶点 “2” 连接的情形以及顶点两两不相连的 “独立集” 的情形. 文献 [197, 198] 用表格的形式对所有的单群列出了大量的图和数据. 文献 [198] 是文献 [197] 的续篇, 并对文献 [197] 中的一些内容作了更正.

6.4　不能用素图刻画的有限群

文献 [69, 99] 用素图 $\Gamma(G)$ 刻画了有限单群 $E_6(2)$、$E_6(3)$ 和 ${}^2E_6(3)$. 显然, 有不少单群是不能仅用素图加以刻画的. 于是, 文献 [29] 研究了不能用素图刻画的有限群的标准. 主要研究了如下问题:

(1) 什么样的群 G 能唯一地由它们的素图 $\Gamma(G)$ 确定?

(2) 什么样的有限多个的群具有与 G 同样的素图 $\Gamma(G)$?

(3) 什么样的群 G 能唯一地由它们的素图 $\Gamma(G)$ 的同构型确定?

素图相同与仅作为图的同构是有区别的, 例如, $\Gamma(A_{10}) \neq \Gamma(\mathrm{Aut}(J_2))$, 但作为抽象图来讲, $\Gamma(A_{10}) \cong \Gamma(\mathrm{Aut}(J_2))$.

问题 6.17　有哪些单群可以用它们的素图和群的阶加以刻画?

上述问题的提出是考虑推广 “两个阶” 刻画所有单群的工作. 而从典型群 $B_n(q)$ 和 $C_n(q)$ 得知 (参见文献 [176]), 对 $n \geqslant 3$、q 为奇数的情形, 它们的素图和群的阶均相同. 所以, 不是所有的单群都可以由它们的素图和群的阶加以刻画.

6.5　定义在群上的图

定义在群上的图有各种图, 而与数量刻画联系比较紧密的是素图 (GK 图). Cameron [27] 提到了如下一些图: 它们的顶点集是有限群 G, 而其边以某种方式反映了群的结构, 使得 G 的自同构群替代图的自同构. 这些图包括交换图 (两个顶点 x 和 y 相连当且仅当 $xy = yx$; 这类图于 1955 年被提出, 参见文献 [22])、生成图 (两个顶点 x 和 y 相连当且仅当 $\langle x, y\rangle = G$; 1996 年开始研究, 参见文献 [23,109])、幂图 (两个顶点相连当且仅当 x 和 y 中的一个元素是另一个的幂; 2000 年开始研究, 参见文献 [93, 139])、强幂图 (两个顶点 x 和 y 相连当且仅当 $\langle x, y\rangle$ 不循环; 2007 年开始研究, 参见文献 [2,3]) 和深交换图 (两个顶点 x 和 y 相连当且仅当它们在 G 的每一个中心扩张中的原像可交换, 即对于每一个群 H, 有中心 Z, $H/Z \cong G$, 在 H 中的元素可交换; 参见文献 [28]).

本文主要讨论了有限单群的数量刻画, 它是群的数量性质的一个重要的组成部分, 也是群论研究的一个重要内容. 用群中元素的阶之集去研究有限群以及用 “两个阶” 统一刻画有限单群是作者率先提出并开展研究的, 在国内外群论界已产生了较大的影响. 作者自 20 世纪 80 年代以来, 先后在西南师范大学 (含在四川大学兼任博士生导师)、苏州大学、重庆文理学院工作, 同时得到了国家自然科学基金 11 项面上项目的资助, 使得这项工作能够不断地有所进展. 撰写本文不仅是想系统地总结我们的工作, 提炼出新的观点、思想和技术, 用以解决相关的问题, 而且也希望能将这项工作继续深入下去, 并找到更多的重要应用.

致谢 衷心感谢审稿人提出的宝贵修改意见. 靳平、钱国华教授对本文的撰写和具体的内容提出了很多宝贵的意见, 杨南迎、沈如林博士也对本文提出了修改意见. 特别地, 李金宝博士为本文的编辑和修改做了大量的工作. 在此作者一并表示诚挚的感谢!

参考文献

1 Abdollahi A, Akbari S, Maimani H R. Non-commuting graph of a group. J Algebra, 2006, 298: 468–492
2 Abdollahi A, Hassanabadi A M. Noncyclic graph of a group. Comm Algebra, 2007, 35: 2057–2081
3 Abdollahi A, Hassanabadi A M. Non-cyclic graph associated with a group. J Algebra Appl, 2009, 8: 243–257
4 Abe S, Iiyori N. A generalization of prime graphs of finite groups. Hokkaido Math J, 2000, 29: 391–407
5 Ahanjideh N. On Thompson's conjecture for some finite simple groups. J Algebra, 2011, 344: 205–228
6 Ahanjideh N. Thompson's conjecture for some finite simple groups with connected prime graph. Algebra Logic, 2013, 51: 451–478
7 Ahanjideh N. On the Thompson's conjecture on conjugacy classes sizes. Internat J Algebra Comput, 2013, 23: 37–68
8 Ahanjideh N. Thompson's conjecture for finite simple groups of Lie type B_n and C_n. J Group Theory, 2016, 19: 713–733
9 Ahanjideh N. Thompson's conjecture on conjugacy class sizes for the simple group $PSU_n(q)$. Internat J Algebra Comput, 2017, 27: 769–792
10 Ahanjideh N, Ahanjideh M. On the validity of Thompson's conjecture for finite simple groups. Comm Algebra, 2013, 41: 4116–4145
11 Ahanjideh N, Asadian B. NSE characterization of some alternating groups. J Algebra Appl, 2015, 14: 1550012
12 Akbari M, Chen X, Moghaddamfar A R. OD-characterization of some simple unitary groups. Bull Iranian Math Soc, 2021, 47: 197–215
13 Alavi S H, Daneshkhah A. A new characterization of alternating and symmetric groups. J Appl Math Comput, 2005, 17: 245–258
14 Artin E. The orders of the classical simple groups. Comm Pure Appl Math, 1955, 8: 455–472
15 Asboei A K. Recognition of 2-dimensional projective linear groups by the group order and the set of numbers of its elements of each order. Groups Complex Cryptol, 2018, 10: 111–118
16 Bender H. A group theoretic proof of Burnside's p^aq^b-theorem. Math Z, 1972, 126: 327–338
17 Bi J X. A characteristic property of symmetric groups (in Chinese). Acta Math Sinica (Chin Ser), 1990, 33: 70–77 [毕建行. 对称群的一个特征性质. 数学学报, 1990, 33: 70–77]
18 Bi J X. Characterization of alternating groups by orders of normalizers of Sylow subgroups. Algebra Colloq, 2001, 8: 249–256
19 Bi J X, Li X H. A characterization of alternating groups by orders of solvable subgroups. J Algebra Appl, 2004, 3: 445–452
20 Brandl R, Shi W J. Finite groups whose element orders are consecutive integers. J Algebra, 1991, 143: 388–400
21 Brandl R, Shi W J. A characterization of finite simple groups with Abelian Sylow 2-subgroups. Ric Mat, 1993, 42: 193–198
22 Brauer R, Fowler K A. On groups of even order. Ann of Math (2), 1955, 62: 565–583
23 Breuer T, Guralnick R M, Kantor W M. Probabilistic generation of finite simple groups, II. J Algebra, 2008, 320: 443–494
24 Bugeaud Y, Cao Z, Mignotte M. On simple K_4-groups. J Algebra, 2001, 241: 658–668
25 Burnside W. On groups of order $p^\alpha q^\beta$. Proc London Math Soc, 1904, s2-1: 388–392
26 Buturlakin A A, Shen R, Shi W J. A characterizing property of CP-groups. Sib Math J, 2017, 58: 405–407
27 Cameron P J. Graphs defined on groups. Int J Group Theory, 2022, 11: 53–107
28 Cameron P J, Kuzma B. Between the enhanced power graph and the commuting graph. J Graph Theory, 2023, 102: 295–303

29 Cameron P J, Maslova N V. Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg-Kegel graph. J Algebra, 2022, 607: 186–213

30 Camina A R, Camina R D. The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: A survey. Asian-Eur J Math, 2011, 4: 559–588

31 Cao H P, Chen G Y, Grechkoseeva M A, et al. Recognition of the finite simple groups $F_4(2^m)$ by spectrum. Sib Math J, 2004, 45: 1031–1035

32 Cao H P, Shi W J. Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups. Sci China Ser A, 2002, 45: 761–772

33 Chen G Y. On Thompson's conjecture (in Chinese). In: Proceedings of the China Association for Science and Technology First Academic Annual Meeting of Youths. Beijing: China Sci and Tech Press, 1992, 1–6 [陈贵云. 关于 Thompson 猜想. 见: 中国科协首届青年学术年会论文集. 北京: 中国科学技术出版社, 1992, 1–6]

34 Chen G Y. A new characterization of sporadic simple groups. Algebra Colloq, 1996, 3: 49–58

35 Chen G Y. On Thompson's conjecture. J Algebra, 1996, 185: 184–193

36 Chen G Y. Further reflections on Thompson's conjecture. J Algebra, 1999, 218: 276–285

37 Chen G Y. Characterization of ${}^3D_4(G)$. SEA Bull Math, 2001, 25: 389–401

38 Chen G Y, Shi W J. Finite groups with 30 elements of maximal order. Appl Categ Structures, 2008, 16: 239–247

39 Cheng K N, Deaconescu M, Lang M L, et al. Corrigendum and addendum to: "Classification of finite groups with all elements of prime order" [Proc. Amer. Math. Soc., 106 (1989), no. 3, 625–629; MR0969518 (89k:20038)] by Deaconescu. Proc Amer Math Soc, 1993, 117: 1205–1207

40 Chigira N, Shi W J. More on the set of element orders in finite groups. Northeast Math J, 1996, 12: 257–260

41 Conway J H, Curtis R T, Norton S P, et al. ATLAS of Finite Groups, Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. Oxford: Oxford University Press, 1985

42 Deaconescu M. Classification of finite groups with all elements of prime order. Proc Amer Math Soc, 1989, 106: 625–629

43 Denecke K, Li X H, Bi J X. A characterization of finite simple groups by the orders of solvable subgroups. Sci China Ser A, 2007, 50: 715–726

44 Deng H W. The number of elements of type pq in the set of element orders and group structure. In: Group Theory. Singapore: Springer, 1998, 80–87

45 Deng H W, Shi W J. A simplicity criterion for finite groups. J Algebra, 1997, 191: 371–381

46 Deng H W, Shi W J. The characterization of Ree groups ${}^2F_4(q)$ by their element orders. J Algebra, 1999, 217: 180–187

47 Dickson L E. A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers. Messenger Math, 1904, 33: 155–161

48 Du X L, Jiang Y Y. Finite groups with exactly $4p$ maximal order elements (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 2004, 25: 607–612 [杜祥林, 姜友谊. 最高阶元个数是 $4p$ 的有限群. 数学年刊 A 辑, 2004, 25: 607–612]

49 Feit W, Seitz G M. On finite rational groups and related topics. Illinois J Math, 1989, 33: 103–131

50 Feit W, Thompson J. Chapter I, from Solvability of groups of odd order. Pacific J Math, 1963, 13: 775–1029

51 Feng Y Q. Finite groups whose abelian subgroup orders are consecutive integers. J Math Res Exposition, 1998, 18: 503–506

52 Fitzpatrick P. Order conjugacy in finite groups. Proc Roy Irish Acad Sect A, 1985, 85: 53–58

53 Goldschmidt D M. A group theoretic proof of the p^aq^b theorem for odd primes. Math Z, 1970, 113: 373–375

54 Gorenstein D, Lyons R, Solomon R. The Classification of the Finite Simple Groups, Number 8: Part III, Chapters 12–17: The Generic Case, Completed. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 40.8. Providence: Amer Math Soc, 2018

55 Gorshkov I B. Thompson's conjecture for simple groups with connected prime graph. Algebra Logic, 2012, 51: 111–127

56 Gorshkov I B. Recognizability of alternating groups by spectrum. Algebra Logic, 2013, 52: 41–45

57 Gorshkov I B. Towards Thompson's conjecture for alternating and symmetric groups. J Group Theory, 2016, 19: 331–336

58 Gorshkov I B. On Thompson's conjecture for alternating and symmetric groups of degree greater than 1361. Proc Steklov Inst Math, 2016, 293: 58–65

59 Gorshkov I B. On Thompson's conjecture for alternating groups of large degree. J Group Theory, 2017, 20: 719–728

60 Gorshkov I B. Thompson's conjecture for alternating groups. Comm Algebra, 2019, 47: 30–36

61 Gorshkov I B. On Thompson's conjecture for finite simple groups. Comm Algebra, 2019, 47: 5192–5206

62 Gorshkov I B, Kaygorodov I, Kukharev A, et al. On Thompson's conjecture for finite simple exceptional groups of Lie type. J Math Sci (NY), 2020, 247: 565–570

63 Gorshkov I B, Kukharev A V. Finite groups with prime graphs of diameter 5. Commun Math, 2020, 28: 307–312

64 Gorshkov I B, Maslova N V. The group $J_4 \times J_4$ is recognizable by spectrum. J Algebra Appl, 2021, 20: 2150061

65 Grechkoseeva M A. On difference between the spectra of the simple groups $B_n(q)$ and $C_n(q)$. Sib Math J, 2007, 48: 73–75
66 Grechkoseeva M A. Recognition by spectrum for finite linear groups over fields of characteristic 2. Algebra Logic, 2008, 47: 229–241
67 Grechkoseeva M A, Mazurov V D, Shi W J, et al. Finite groups isospectral to simple groups. Commun Math Stat, 2023, 11: 169–194
68 Grechkoseeva M A, Vasil'ev A V. On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups. J Group Theory, 2015, 18: 741–759
69 Guo W B, Kondrat'ev A S, Maslova N V. Recognition of the group $E_6(2)$ by Gruenberg-Kegel graph. Tr Inst Mat Mekh UrO RAN, 2021, 27: 263–268
70 Gupta N D, Mazurov V D. On groups with small orders of elements. Bull Aust Math Soc, 1999, 60: 197–205
71 Hagie M. The diameter of the solvable graph of a finite group. Hokkaido Math J, 2000, 29: 553–561
72 Hall M. The Theory of Groups. New York: Chelsea Publishing, 1976
73 He J H, Pu W. On the number n which makes any group with order prime to n solvable (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1999, 24: 612–614 [何军华, 蒲伟. 阶与 n 互素的群均可解之数 n. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1999, 24: 612–614]
74 He L G, Chen G Y. A new characterization of simple K_3-groups. Comm Algebra, 2012, 40: 3903–3911
75 He L G, Chen G Y. A new characterization of simple K_4-groups with type $L_2(p)$ (in Chinese). Adv Math (China), 2014, 43: 667–670 [何立官, 陈贵云. 关于型为 $L_2(p)$ 的单 K_4- 群的一个新刻画. 数学进展, 2014, 43: 667–670]
76 He L G, Chen G Y, Xu H J. A new characterization of sporadic simple groups. Ital J Pure Appl Math, 2013, 30: 373–392
77 He L G, Chen G Y, Yan Y X. Finite groups with $10p^m$ elements of maximal order are solvable (in Chinese). J Southwest Univ (Natur Sci Ed), 2007, 29: 1–4 [何立官, 陈贵云, 晏燕雄. 最高阶元个数为 $10p^m$ 的有限群是可解群. 西南大学学报 (自然科学版), 2007, 29: 1–4]
78 He L G, Xu H J. A characterization of automorphism groups of simple K_3-groups (in Chinese). Adv Math (China), 2015, 44: 363–368 [何立官, 徐海静. 关于单 K_3- 群自同构群的刻画. 数学进展, 2015, 44: 363–368]
79 Heineken H. On groups all of whose elements have prime power order. Math Proc R Ir Acad, 2006, 106A: 191–198
80 Herzog M. On finite simple groups of order divisible by three primes only. J Algebra, 1968, 10: 383–388
81 Hung N N, Yang Y. On the prime divisors of element orders. Math Nachr, 2021, 294: 1905–1911
82 Huppert B, Lempken W. Simple groups of order divisible by at most four primes. Proc F Scorina Gomel State Univ, 2000, 3: 64–75
83 Iiyori N, Yamaki H. Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic. J Algebra, 1993, 155: 335–343
84 Iranmanesh A, Khosravi B. A characterization of $F_4(q)$ where q is an odd prime power. In: Groups St Andrews 2001 in Oxford, Volume I. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 304. New York: Cambridge University Press, 2003, 277–283
85 Jabara E, Lytkina D V, Mazurov V D. Some groups of exponent 72. J Group Theory, 2014, 17: 947–955
86 Jafarzadeh A, Iranmanesh A. On simple K_n-groups for $n = 5, 6$. In: Groups St Andrews 2005, Volume 2. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 340. Cambridge: Cambridge University Press, 2007, 517–526
87 Jiang Q H, Shao C G. Finite groups with 24 elements of maximal order. Front Math China, 2010, 5: 665–678
88 Jiang Y Y. Finite solvable groups with the number of largest element orders less than 20 (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1998, 23: 379–384 [姜友谊. 最高阶元素个数小于 20 的有限群可解. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1998, 23: 379–384]
89 Jiang Y Y. Finite groups with $2p^2$ elements of maximal order are soluble (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 2000, 21: 61–64 [姜友谊. 最高阶元素个数是 $2p^2$ 的有限群是可解群. 数学年刊 A 辑, 2000, 21: 61–64]
90 Jiang Y Y. A theorem of finite groups with $18p$ elements having maximal order. Algebra Colloq, 2008, 15: 317–329
91 Jiang Y Y, Qian G H. Finite groups having $6p$ elements of maximal order (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 2006, 27: 325–330 [姜友谊, 钱国华. 最高阶元素个数为 $6p$ 的有限群. 数学年刊 A 辑, 2006, 27: 325–330]
92 Kantor W M, Seress Á. Large element orders and the characteristic of Lie-type simple groups. J Algebra, 2009, 322: 802–832
93 Kelarev A V, Quinn S J. A combinatorial property and power graphs of groups. In: Contributions to General Algebra, 12. Klagenfurt: Verlag Johannes Heyn, 2000, 229–235
94 Keller T M. Solvable groups with at most four prime divisors in the element orders. J Algebra, 1995, 175: 1–23
95 Keller T M. A linear bound for $\rho(n)$. J Algebra, 1995, 178: 643–652
96 Keller T M, Moretó A. Character degrees, conjugacy class sizes, and element orders: Three primes. Arch Math (Basel), 2021, 117: 241–251
97 Khosravi B. A characterization of $E_6(q)$. Algebras Groups Geom, 2002, 19: 225–243

98 Khosravi B. A characterization of ${}^2E_6(q)$. Kumamoto J Math, 2003, 16: 1–11
99 Khramova A P, Maslova N V, Panshin V V, et al. Characterization of groups $E_6(3)$ and ${}^2E_6(3)$ by Gruenberg-Kegel graph. Sib Èlektron Mat Izv, 2021, 18: 1651–1656
100 Khukhro E I, Mazurov V D. Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook, No. 20. arXiv:1401.0300v26, 2022
101 Kimmerle W, Luca F, Raggi-Cárdenas A G. Irreducible components and isomorphisms of the Burnside ring. J Group Theory, 2008, 11: 831–844
102 Kondrat'ev A S. Prime graph components of finite simple groups. Math USSR Sb, 1990, 67: 235–247
103 Kondrat'ev A S, Mazurov V D. Recognition of alternating groups of prime degree from their element orders. Sib Math J, 2000, 41: 294–302
104 Kondrat'ev A S. Recognizability by spectrum of groups $E_8(q)$. Tr Inst Mat Mekh UrO RAN, 2010, 16: 146–149
105 Kondrat'ev A S. Finite almost simple 5-primary groups and their Gruenberg-Kegel graphs. Sib Èlektron Mat Izv, 2014, 11: 634–674
106 Kondrat'ev A S, Mazurov V D. Recognition of alternating groups of prime degree from the orders of their elements. Sibirsk Mat Zh, 2000, 41: 359–369
107 Li J B, Shi W J, Yu D P. A characterization of some $\mathrm{PGL}(2,q)$ by maximum element orders. Bull Korean Math Soc, 2015, 52: 2025–2034
108 Li J H. Finite groups with element orders of odd consecutive integers (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1994, 19: 109–115 [李建华. 元素的阶为奇数连续的有限群. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1994, 19: 109–115]
109 Liebeck M W, Shalev A. Simple groups, probabilistic methods, and a conjecture of Kantor and Lubotzky. J Algebra, 1996, 184: 31–57
110 Liu S T. Thompson's conjecture for alternating group A_{26}. Ital J Pure Appl Math, 2014, 32: 525–532
111 Lucido M S. The diameter of the prime graph of a finite group. J Group Theory, 1999, 2: 157–172
112 Lucido M S. Groups in which the prime graph is a tree. Boll Unione Mat Ital (8), 2002, 5-B: 131–148
113 Lytkina D V, Kuznetsov A A. Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$. Sib Èlektron Mat Izv, 2007, 4: 136–140
114 Lytkina D V, Mazurov V D. Groups containing a strongly embedded subgroup. Algebra Logic, 2009, 48: 108–114
115 Lytkina D V, Mazurov V D. Periodic groups generated by a pair of virtually quadratic automorphisms of an abelian group. Sib Math J, 2010, 51: 475–478
116 Lytkina D V, Mazurov V D. $\{2,3\}$-groups with no elements of order 6. Algebra Logic, 2015, 53: 463–470
117 Lytkina D V, Mazurov V D. On groups of period 12. Sib Math J, 2015, 56: 471–475
118 Lytkina D V, Mazurov V D, Mamontov A S. On local finiteness of some groups of period 12. Sib Math J, 2012, 53: 1105–1109
119 Lytkina D V, Mazurov V D, Mamontov A S, et al. Groups whose element orders do not exceed 6. Algebra Logic, 2014, 53: 365–376
120 Mamontov A S, Jabara E. Recognizing A_7 by its set of element orders. Sib Math J, 2021, 62: 93–104
121 Matsuyama H. Solvability of groups of order 2^aq^b. Osaka J Math, 1973, 10: 375–378
122 Mazurov V D. The set of orders of elements in a finite group. Algebra Logic, 1994, 33: 49–55
123 Mazurov V D. Characterizations of finite groups by sets of orders of their elements. Algebra Logic, 1997, 36: 23–32
124 Mazurov V D. A characterization of finite nonsimple groups by the set of orders of their elements. Algebra Logic, 1997, 36: 182–192
125 Mazurov V D. Recognition of finite groups by a set of orders of their elements. Algebra Logic, 1998, 37: 371–379
126 Mazurov V D. Infinite groups with Abelian centralizers of involutions. Algebra Logic, 2000, 39: 42–49
127 Mazurov V D. Groups of exponent 60 with prescribed orders of elements. Algebra Logic, 2000, 39: 189–198
128 Mazurov V D. Groups containing a self-centralizing subgroup of order 3. Algebra Logic, 2003, 42: 29–36
129 Mazurov V D. Characterizations of groups by arithmetic properties. Algebra Colloq, 2004, 11: 129–140
130 Mazurov V D. Groups of exponent 24. Algebra Logic, 2011, 49: 515–525
131 Mazurov V D, Mamontov A S. On periodic groups with small orders of elements. Sib Math J, 2009, 50: 316–321
132 Mazurov V D, Mamontov A S. Involutions in groups of exponent 12. Algebra Logic, 2013, 52: 67–71
133 Mazurov V D, Ol'shanskii A Y, Sozutov A I. Infinite groups of finite period. Algebra Logic, 2015, 54: 161–166
134 Mazurov V D, Shi W J. A note to the characterization of sporadic simple groups. Algebra Colloq, 1998, 5: 285–288
135 Mazurov V D, Shi W J. Groups whose elements have given orders. In: Groups St Andrews 1997 in Bath, II. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 261. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 532–537
136 Mazurov V D, Shi W J. A criterion of unrecognizability by spectrum for finite groups. Algebra Logic, 2012, 51: 160–162
137 Moghaddamfar A R. About noncommuting graphs. Sib Math J, 2006, 47: 911–914

138 Moghaddamfar A R, Darafsheh M R. A family of finite simple groups which are 2-recognizable by their elements order. Comm Algebra, 2004, 32: 4507–4513
139 Moghaddamfar A R, Rahbariyan S, Shi W J. Certain properties of the power graph associated with a finite group. J Algebra Appl, 2014, 13: 1450040
140 Moghaddamfar A R, Shi W J, Zhou W, et al. On the noncommuting graph associated with a finite group. Sib Math J, 2005, 46: 325–332
141 Moghaddamfar A R, Zokayi A R. Recognizing finite groups through order and degree pattern. Algebra Colloq, 2008, 15: 449–456
142 Moghaddamfar A R, Zokayi A R. OD-characterization of alternating and symmetric groups of degrees 16 and 22. Front Math China, 2009, 4: 669–680
143 Moghaddamfar A R, Zokayi A R, Darafsheh M R. A characterization of finite simple groups by the degrees of vertices of their prime graphs. Algebra Colloq, 2005, 12: 431–442
144 Moretó A. On the number of different prime divisors of element orders. Proc Amer Math Soc, 2006, 134: 617–619
145 Navarro G. The set of conjugacy class sizes of a finite group does not determine its solvability. J Algebra, 2014, 411: 47–49
146 Navarro G. Character Theory and the McKay Conjecture. Cambridge: Cambridge University Press, 2018
147 Neumann B H. A problem of Paul Erdös on groups. J Aust Math Soc, 1976, 21: 467–472
148 Praeger C E, Shi W J. A characterization of some alternating and symmetric groups. Comm Algebra, 1994, 22: 1507–1530
149 Qian G H. Finite groups with many elements of prime orders (in Chinese). J of Math (PRC), 2005, 25: 115–118 [钱国华. 具有很多素数阶元的有限群. 数学杂志, 2005, 25: 115–118]
150 Qian G H. Finite groups with consecutive nonlinear character degrees. J Algebra, 2005, 285: 372–382
151 Qian G H. Element orders and character codegrees. Bull Lond Math Soc, 2021, 53: 820–824
152 Qian G H. Finite solvable groups whose prime graphs have diameter 3. Acta Math Sin (Engl Ser), 2023, in press
153 Qian G H, Shi W J. A characteristic property of A_5 and its elementary proof (in Chinese). J Southwest Univ (Natur Sci Ed), 2007, 29: 1–4 [钱国华, 施武杰. A_5 的一个特征及其初等证明. 西南大学学报 (自然科学版), 2007, 29: 1–4]
154 Qian G H, Wang Y, Wei H Q. Co-degrees of irreducible characters in finite groups. J Algebra, 2007, 312: 946–955
155 Shen R L, Shao C G, Jiang Q H, et al. A new characterization of A_5. Monatsh Math, 2010, 160: 337–341
156 Shen R L, Shi W J. On Thompson problem (in Chinese). Sci Sin Math, 2010, 40: 533–537 [沈如林, 施武杰. 关于 Thompson 问题. 中国科学: 数学, 2010, 40: 533–537]
157 Shen R L, Tang F, Shi W J. Corrigendum to “On Thompson Problem” [Sci Sin Math, 40(6)(2010)] (in Chinese). Sci Sin Math, 2011, 41: 933–938 [沈如林, 唐锋, 施武杰. “关于 Thompson 问题” (《中国科学: 数学》2010 年 40 卷第 6 期) 一文的更正. 中国科学: 数学, 2011, 41: 933–938]
158 Shen Z C, Zhang B Y, Zhang J S, et al. A new characteristic of sporadic simple groups M_{22}. Front Math China, 2023, in press
159 Shi W J. A new characterization of some projective special linear groups and the finite groups in which every element has prime order or order $2p$ (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1983, 1: 23–28 [施武杰. 某些特殊射影线性群的一个新刻划与有限 $2p$ 型合元群. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1983, 1: 23–28]
160 Shi W J. A characteristic property of $PSL_2(7)$. J Aust Math Soc, 1984, 36: 354–356
161 Shi W J. A characterization of some $PSL_2(q)$ (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1985, 2: 25–32 [施武杰. 某些 $PSL_2(q)$ 的特征性质. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1985, 2: 25–32]
162 Shi W J. A characterization of some projective special linear groups. J of Math (PRC), 1985, 5: 191–200
163 Shi W J. A characteristic property of A_5 (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1986, 11: 11–14 [施武杰. A_5 的一个特征性质. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1986, 11: 11–14]
164 Shi W J. Characteristic properties of J_1 and $PSL_2(2^n)$ (in Chinese). Adv Math (China), 1987, 16: 397–401 [施武杰. J_1 与 $PSL_2(2^n)$ 的特征性质. 数学进展, 1987, 16: 397–401]
165 Shi W J. A new characterization of the sporadic simple groups. In: Group Theory—Proceedings of the Singapore Group Theory Conference, 1987. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1989, 531–540
166 Shi W J. Characterizations of simple groups using orders and related topics (in Chinese). Adv Math (China), 1991, 20: 135–141 [施武杰. 用阶刻划单群及有关课题. 数学进展, 1991, 20: 135–141]
167 Shi W J. On simple K_4 groups (in Chinese). Chin Sci Bull, 1991, 36: 1281–1283 [施武杰. 关于单 K_4- 群. 科学通报, 1991, 36: 1281–1283]
168 Shi W J. On a problem of E. Artin (in Chinese). Acta Math Sinica (Chin Ser), 1992, 35: 262–265 [施武杰. 关于 E. Artin 的一个问题. 数学学报, 1992, 35: 262–265]
169 Shi W J. A characterization of Suzuki's simple groups. Proc Amer Math Soc, 1992, 114: 589–591
170 Shi W J. The characterization of the sporadic simple groups by their element orders. Algebra Colloq, 1994, 1: 159–166
171 Shi W J. Finite groups whose proper subgroup orders are consecutive integers. J Math Res Exposition, 1994, 14:

165–166
172 Shi W J. The pure quantitative characterization of finite simple groups (I). Prog Nat Sci, 1994, 4: 316–326
173 Shi W J. Two unsolved problems in group theory (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1996, 21(s1): 6–10 [施武杰. 群论中两个没有解决的新问题. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1996, 21(增刊 1): 6–10]
174 Shi W J. Finite groups defined by the set of their element orders (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1997, 22: 481–486 [施武杰. 用元阶集定义的有限群. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1997, 22: 481–486]
175 Shi W J. Groups whose elements have given orders. Chin Sci Bull, 1997, 42: 1761–1764
176 Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups. Front Math China, 2007, 2: 123–125
177 Shi W J. On the order and the element orders of finite groups: Results and problems. In: Ischia Group Theory 2010. Hackensack: World Scientific, 2012, 313–333
178 Shi W J. A sufficient condition for solvability of finite groups (in Chinese). J Southwest Univ (Natur Sci Ed), 2017, 37: 1–4 [施武杰. 有限群可解的一个充分条件. 西南大学学报 (自然科学版), 2017, 37: 1–4]
179 Shi W J. On the widths of finite groups. Southeast Asian Bull Math, 2021, 45: 945–951
180 Shi W J, Bi J X. A characteristic property for each finite projective special linear group. In: Groups—Canberra 1989. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1456. Berlin-Heidelberg: Springer, 1990, 171–180
181 Shi W J, Bi J X. A characterization of Suzuki-Ree groups. Sci China Ser A, 1991, 34: 14–19
182 Shi W J, Bi J X. A new characterization of the alternating groups. Southeast Asian Bull Math, 1992, 16: 81–90
183 Shi W J, Tang C Y. A characterization of some orthogonal groups. Prog Nat Sci, 1997, 7: 155–162
184 Shi W J, Yang W Z. A new characterization of A_5 and finite groups in which every element order is a prime power order (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1984, 9: 36–40 [施武杰, 杨文泽. A_5 的一个新刻划与有限质元群. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1984, 9: 36–40]
185 Shi W J, Yang W Z. On finite groups with elements of prime power orders. arXiv:2003.09445, 2020 [施武杰, 杨文泽. 有限质幂元群. 云南教育学院学报, 1986, 1: 2–10]
186 Solomon R. A brief history of the classification of the finite simple groups. Bull Amer Math Soc (NS), 2001, 38: 315–352
187 Staroletov A M. Groups isospectral to the degree 10 alternating group. Sib Math J, 2010, 51: 507–514
188 Suzuki M. Finite groups with nilpotent centralizers. Trans Amer Math Soc, 1961, 99: 425–470
189 Tan S B, Ai H M, Yan Y X. Finite groups with $6p^2q$ elements of maximal order (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 2021, 46: 1–3 [谭三标, 艾海明, 晏燕雄. 最高阶元个数为 $6p^2q$ 的有限群. 西南师范大学学报 (自然科学版), 2021, 46: 1–3]
190 Thompson J G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. Bull Amer Math Soc (NS), 1968, 74: 383–437
191 van der Waall R W, Bensaid A. On finite groups whose elements of equal order are conjugate. Simon Stevin, 1991, 65: 361–374
192 Vasil'ev A V. On recognition of all finite nonabelian simple groups with orders having prime divisors at most 13. Sib Math J, 2005, 46: 246–253
193 Vasil'ev A V. On Thompson's conjecture. Sib Èlektron Mat Izv, 2009, 6: 457–464
194 Vasil'ev A V, Grechkoseeva M A, Mazurov V D. On finite groups isospectral to simple symplectic and orthogonal groups. Sib Math J, 2009, 50: 965–981
195 Vasil'ev A V, Grechkoseeva M A, Mazurov V D. Characterization of the finite simple groups by spectrum and order. Algebra Logic, 2009, 48: 385–409
196 Vasil'ev A V, Staroletov A M. Recognizability of groups $G_2(q)$ by spectrum. Algebra Logic, 2013, 52: 1–14
197 Vasil'ev A V, Vdovin E P. An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group. Algebra Logic, 2005, 44: 381–406
198 Vasil'ev A V, Vdovin E P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. Algebra Logic, 2011, 50: 291–322
199 Wang L L, Shi W J. A new characterization of A_{10} by its noncommuting graph. Comm Algebra, 2008, 36: 523–528
200 Wang X F. Classification theorem of K_4 simple groups (in Chinese). Chin Sci Bull, 1990, 35: 1117–1118 [王晓峰. K_4 单群的分类定理. 科学通报, 1990, 35: 1117–1118]
201 Williams J S. Prime graph components of finite groups. J Algebra, 1981, 69: 487–513
202 Xu M C. Finite groups with element orders of consecutive integers except some primes (in Chinese). J Southwest China Normal Univ (Natur Sci Ed), 1994, 19: 116–122 [许明春. 元素的阶除一些素数外连续的有限群. 西南师范大学学报 (自然科学版), 1994, 19: 116–122]
203 Xu M C. On finite groups with the same order type of σ-Sylow tower groups (in Chinese). Natur Sci J Hainan Univ, 1996, 14: 103–105 [许明春. 与 σ-Sylow 塔群同阶型的群. 海南大学学报 (自然科学版), 1996, 14: 103–105]

204 Xu M C. Thompson's conjecture for alternating group of degree 22. Front Math China, 2013, 8: 1227–1236
205 Xu M C, Shi W J. Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd). Algebra Colloq, 2003, 10: 427–443
206 Xu M C, Shi W J. Thompson's conjecture for Lie type groups $E_7(q)$. Sci China Math, 2014, 57: 499–514
207 Yang C. Finite groups with different numbers of largest element order (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 1993, 14: 561–567 [杨成. 最高阶元素个数不同的有限群. 数学年刊 A 辑, 1993, 14: 561–567]
208 Yang N Y, Lytkina D V, Mazurov V D, et al. Infinite Frobenius groups generated by elements of order 3. Algebra Colloq, 2020, 27: 741–748
209 Yang W Z, Zhang Z R. Locally soluble infinite groups in which every element has prime power order. Southeast Asian Bull Math, 2003, 26: 857–864
210 Yang Y. On analogues of Huppert's conjecture. Bull Aust Math Soc, 2021, 104: 272–277
211 Yoshida T. On the Burnside rings of finite groups and finite categories. In: Commutative Algebra and Combinatorics. Advanced Studies in Pure Mathematics, vol. 11. Amsterdam: North-Holland, 1987, 337–353
212 Yu D P, Li J B, Chen G Y, et al. A new characterization of simple K_5-groups of type $L_3(p)$. Bull Iranian Math Soc, 2019, 45: 771–781
213 Zavarnitsine A V. Recognition of alternating groups of degrees $r+1$ and $r+2$ for prime r and the group of degree 16 by their element order sets. Algebra Logic, 2000, 39: 370–377
214 Zavarnitsine A V. Recognition of the simple groups $L^3(q)$ by element orders. J Group Theory, 2004, 7: 81–97
215 Zhang J P. On Syskin problem of finite groups (in Chinese). Sci Sinica Ser A, 1988, 18: 124–128 [张继平. 关于有限群的 Syskin 问题. 中国科学 A 辑, 1988, 18: 124–128]
216 Zhang J P. Arithmetical conditions on element orders and group structure. Proc Amer Math Soc, 1995, 123: 39–44
217 Zhang J S. On type of zeros of characters of finite groups (in Chinese). PhD Thesis. Suzhou: Suzhou University, 2009 [张金山. 关于有限群特征标的零点的型. 博士学位论文. 苏州: 苏州大学, 2009]
218 Zhang L C, Shi W J. OD-characterization of all simple groups whose orders are less than 108. Front Math China, 2008, 3: 461–474
219 Zhang L C, Shi W J. OD-characterization of simple K_4-groups. Algebra Colloq, 2009, 16: 275–282
220 Zhang L C, Shi W J, Liu X F. A characterization of $L_4(4)$ by its noncommuting graph (in Chinese). Chinese Ann Math Ser A, 2009, 30: 517–524 [张良才, 施武杰, 刘雪峰. $L_4(4)$ 的非交换图刻画. 数学年刊 A 辑, 2009, 30: 517–524]
221 Zhang Q H, An L J. The Structure of Finite p-Groups I (in Chinese). Beijing: Science Press, 2017 [张勤海, 安立坚. 有限 p 群构造 (上册). 北京: 科学出版社, 2017]
222 Zhang Q H, An L J. The Structure of Finite p-Groups II (in Chinese). Beijing: Science Press, 2017 [张勤海, 安立坚. 有限 p 群构造 (下册). 北京: 科学出版社, 2017]
223 Zhang S H, Shi W J. On the number of simple K_4 groups. Bull Iranian Math Soc, 2020, 46: 1669–1674
224 Zhurtov A K, Lytkina D V, Mazurov V D. Primary cosets in groups. Algebra Logic, 2020, 59: 216–221
225 Zhurtov A K, Lytkina D V, Mazurov V D, et al. Periodic groups acting freely on abelian groups. Proc Steklov Inst Math, 2014, 285: 209–215
226 Zhurtov A K, Mazurov V D. On recognition of the finite simple groups $L_2(2^m)$ in the class of all groups. Sib Math J, 1999, 40: 62–64
227 Zhurtov A K, Mazurov V D. Frobenius groups generated by quadratic elements. Algebra Logic, 2003, 42: 153–164

Quantitative characterization of finite simple groups

Wujie Shi

Abstract In this paper, we summarize the work on the characterization of finite simple groups and the study on finite groups with "the set of element orders" and "two orders" (the set of group orders and the set of element orders). Some related topics, and the applications together with their generalizations are also discussed.

Keywords finite group, group orders, element orders, classification theorem of finite simple groups

MSC(2020) 20D05, 20D60, 20D06, 20D08

doi: 10.1360/SSM-2022-0097