中国科学: 数学 2021 年 第 51 卷 第 11 期: 1743～1768
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

日内交易量预测的局部波动模型及其实证研究

献给严加安院士 80 华诞

季怡轩, 徐紫怡, 程雪*

北京大学数学科学学院, 北京 100871
E-mail: yixuanji@pku.edu.cn, ziyixu@stu.pku.edu.cn, chengxue@pku.edu.cn

收稿日期: 2020-10-31; 接受日期: 2021-01-25; 网络出版日期: 2021-12-08; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11971040 和 11871010) 资助项目

摘要 本文在辨析 3 种典型日内交易量预测模型—加和模型、乘积模型和分解优化模型—的理论差异并使用中国市场数据实证检验的基础上, 提出一种新的日内交易量预测模型: 局部波动模型. 在交易量预测和成交量加权平均价 (volume weighted average price, VWAP) 策略层面, 局部波动模型的稳定性均优于经典的基准方法—历史滚动均值. 该模型运算速度快且可实现动态预测, 预测精度方面表现良好, 仅不及精度最高但速度最慢的乘积模型, 且其稳健性优于乘积模型, 介于乘积模型和分解优化模型之间. 该模型在大盘风格数据上表现较好, 且在处理频率较高的数据以及交易量波动较低的数据上具有优势.

关键词 日内交易量预测 VWAP 策略 分解组合方法 局部波动

MSC (2020) 主题分类 60G25, 62M20, 62P05

1 引言

交易量是金融市场交易机制和价格动态结构中的关键变量之一, 可反映包括交易情形、价格波动风险和市场流动性等在内的重要市场信息. 对日内交易量结构的研究及对交易量的准确预测在波动性度量 (如文献 [1])、流动性风险管理 (如文献 [2])、算法交易 (如文献 [3]) 和金融市场产品创新 (如文献 [4]) 等方面均有广泛深入的应用. 特别是在流动性风险管理和算法交易方面应用广泛的成交量加权平均价 (volume weighted average price, VWAP) 及其 VWAP 策略, 定义完全基于市场交易量日内结构, 应用效果严重依赖于日内交易量的预测准确度 (参见文献 [3]).

日内交易量预测的研究思路大致可分为两类. 一类是直接将日内交易量视为整体, 例如, Orchel [5] 运用支持向量机回归预测日内交易量; Iuhas [6] 使用长短期记忆 (long short-term memory, LSTM) 网络、支持向量回归 (support vector regression, SVR) 和自回归 (autoregressive, AR) 模型; Huptas [7] 利用

英文引用格式: Ji Y X, Xu Z Y, Cheng X. A local volatility model for intraday volume prediction and its empirical study (in Chinese). Sci Sin Math, 2021, 51: 1743–1768, doi: 10.1360/SSM-2020-0315

© 2021《中国科学》杂志社

统计方法对日内交易量结构特点进行研究, 使用 Bayes 自回归条件成交量 (autoregressive conditional volume, ACV) 模型进行预测等. 另一类可称为分解组合法. 该方法将日内交易量序列分解为不同的成分或子序列研究, 此后通过成分或子序列的合理组合进行预测. Lo 等 [8] 最先运用投资组合理论研究交易量, 将资本资产定价模型 (capital asset pricing model, CAPM) 思想运用于对股票交易量的分析与建模; Bialkowski 等 [3] 也通过 CAPM 思想对日内交易量建模, 将日内交易量分解为由一个不可观测的公共因子决定的市场成分和剩余的特殊成分之和; Brownlees 等 [9] 引入乘积误差模型 (multiplicative error model, MEM), 将日内交易量分解为日间成分、日内周期成分、日内非周期成分和剩余误差之积; Humphery [10] 使用特定的线性回归模型, 通过 "动态 VWAP 方法" 将交易量分解为历史部分和偏差项; Satish 等 [11] 同时将原始交易量序列及同时间不同日期的交易量序列作为研究对象, 给出了 3 个预测值, 再通过它们的线性组合进一步优化给出了最终预测值; Chen 等 [12] 采用乘积误差模型的对数形式, 使用 Kalman 滤波估计参数和进行预测; Markov 等 [13] 针对股票市场的不同情形—竞价阶段、股利宣告和解禁等特殊日期、连续竞价阶段等—设计了不同的预测模型. 本文主要关注的也是这一类方法.

基于 3 种利用分解组合思想进行日内交易量结构研究及预测的典型模型 (加和模型、乘积模型和分解优化模型 (参见文献 [3, 9, 11])) 在中国市场沪深 300 指数及部分个股数据的实证结果, 有如下发现. 乘积模型的预测效果最佳, 其在交易量层面和 VWAP 层面均表现优异. 但乘积模型对数据的要求较高, 其采用半耦合的方式仅在形式上分离了日内和日间不同的周期性因素, 导致参数需要联合估计、计算速度慢且因此几乎无法适用于动态预测. 加和模型的优点在于其对样本量的要求不太高, 计算速度较快, 但其预测效果严重依赖于参数和证券的选取. 分解优化模型运算速度最快, 对数据的要求较低. 分解优化模型在交易量层面取得较好的预测效果, 但在 VWAP 策略层面表现不佳、预测误差较大. 这一结果与 3 种模型在原文献中的实证结果及后续一些相关文献中的分析也保持了一致.

基于以上实证分析的结果, 对 3 种模型的具体理论形式进行了对比分析, 在此基础上结合交易量数据通常存在的聚集性的特点, 引入局部波动的思想, 提出一种新的模型. 该模型将原始交易量序列数据分解为同一日期不同时间的交易量 (称其为纵向序列) 和同一时间不同日期的交易量 (称其为横向序列), 通过分解组合获得描绘日间成分、日内周期成分和日内非周期成分的序列, 对新的序列分别建立不同模型进行考察, 并在模型中引入局部波动效应捕捉序列数据中的波动聚集性, 最后采用优化的方法将基于各序列的预测结果进行组合获得最终预测值.

此后本文将局部波动模型应用于沪深 300 指数及部分个股数据进行实证检验, 发现该模型在交易量层面和 VWAP 层面的预测效果均能稳定地超越基准的历史滚动均值, 并且在精度上优于加和模型和分解优化模型, 其预测精度虽不及以预测效果见长的乘积模型, 但其在运算速度上较乘积模型有大幅提升, 且能够实现动态预测.

限于我们的了解, 基于国内市场数据进行日内交易量结构的研究相对较少, 较早利用日内交易数据的研究多集中于波动率及其与交易量的关系 (如文献 [14,15] 等). 据我们所知, 近年利用分解组合思路进行交易量预测的研究, 采用加和模型或乘积模型的较多 (参见文献 [3,9]). 例如, 采用加和模型思想进行研究的有, 李晔 [16] 将日内交易量分解为移动平均、市场作用和特定变化, 周仁才和陈晓雯 [17] 将交易量分解为市场份额和特殊份额两部分, 刘小桃等 [18] 将日内交易量分解为平均部分和异常变化, 夏晖和杨岑 [19] 将交易量分解为市场组合交易量和剩余交易量等; 采用乘积模型思想进行研究的有, 姚海博等 [20] 将交易量序列表示为周期因素、趋势因素和波动因素 3 部分的乘积等.

本文与上述文献不同之处在于: (1) 将交易量序列数据分解为纵向和横向两个维度同时考虑, 这样可以分别获取针对性的信息, 提高预测效率, 之后通过对基于两方向序列的预测进行优化组合将不

同维度包含的信息结合起来进一步提高了精度; (2) 在模型中引入的局部波动性可以较为灵活地捕捉数据的波动聚集性, 提高预测准确性, 实证检验也明确支持了这一点; (3) 除去对自己模型的实证分析, 基于中国市场的数据对 3 个典型的应用较广的分解组合预测模型进行了系统的实证分析和比较, 包括比较细致的稳健性检验, 并尝试从模型理论的角度对其不同表现进行解释和分析.

本文余下内容的结构安排如下: 第 2 节从理论角度介绍和比较加和模型、乘积模型和分解优化模型; 第 3 节在对 3 个模型理论和实证辨析的基础上提出局部波动模型; 所有的实证和误差比较分析放在第 4 节, 本文主要利用沪深 300 指数数据及部分个股数据对加和、乘积、分解优化和局部波动模型进行实证检验, 并结合模型特点对实证结果进行分析与比较; 第 5 节进行模型稳健性分析, 在指数层面分别考察数据的时间跨度、日内交易量区间的长度以及大小盘风格变动对模型表现的影响, 在个股层面主要考察价格波动、交易量波动以及不同行业的稳健性分析; 第 6 节进行总结.

2 基于分解组合思想的 3 种日内交易量预测模型

本节介绍 3 个典型的基于组合分解思想的日内交易量模型, 这 3 种模型的思路各具特色, 在众多的日内交易量研究文献中也是很有辨识度且应用较广的, 基于其不同的建模思路, 分别称其为加和模型、乘积模型和分解优化模型.

假设总共考察 J 只证券, 考察时间长度为 T 天, 每天 (的交易时间) 按相等的时间区间划分为 I 段, 记 $N = IT$. 令 $v_{t,i,j}$ 表示第 j 只证券在第 t 天第 i 时段的交易量[1)], $V_{t,j}$ 表示第 j 只证券第 t 天在外发行自由流通股的总股数. 则 $x_{t,i,j} = v_{t,i,j}/V_{t,j}$ 表示第 j 只证券第 t 天第 i 时段的交易量占当日在外发行自由流通股的比例.

2.1 加和模型

本小节介绍 Bialkowski 等[3] 提出的加和模型, 该模型的特点是, 参考 CAPM 思想, 引入一个公共因子, 将交易量 (比例) 序列分解为公共部分和剩余风险的和, 故简称其为 “加和模型”.

具体而言, Bialkowski 等[3] 设 $x_{t,i,j}$ 有如下表示:

$$x_{t,i,j} = \boldsymbol{\lambda}_j^\top \boldsymbol{F_{t,i}} + e_{t,i,j} = c_{t,i,j} + e_{t,i,j}, \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{F_{t,i}}$ 为 r $(r < J)$ 维向量, 表示不可观测公共因子; $\boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^r$ 表示因子载荷, 从而 $c_{t,i,j} = \boldsymbol{\lambda}_j^\top \boldsymbol{F_{t,i}}$ 表示公共部分, $e_{t,i,j}$ 表示剩余风险.

为简便起见, 将 (2.1) 改写为矩阵形式:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F\Lambda} + \boldsymbol{e}, \tag{2.2}$$

其中 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_J) \in \mathbb{R}^{N\times J}$, $\boldsymbol{X}_j = (x_{1,1,j}, \ldots, x_{T,I,j})^\top$; $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_J}) \in \mathbb{R}^{N\times J}$, $\boldsymbol{e_j} = (e_{1,1,j}, \ldots, e_{T,I,j})^\top$; $\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda_1}, \ldots, \boldsymbol{\lambda_J}) \in \mathbb{R}^{r\times J}$, $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F_1}, \ldots, \boldsymbol{F_N})^\top \in \mathbb{R}^{N\times r}$.

Bialkowski 等[3] 首先利用文献 [21] 的主成分估计法估计公共部分, 具体细节此处不再赘述, 公共部分 $\boldsymbol{F\Lambda}$ 的估计值记为 $\tilde{\boldsymbol{F}}\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$, 用原始的时间序列减去 $\tilde{\boldsymbol{F}}\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}(t,i,j)$ 得到剩余部分序列 $\tilde{e}_{t,i,j}$.

对于公共部分的预测, Bialkowski 等[3] 利用了前 l 天的历史滚动均值, 即

$$\hat{c}_{t,i+1,j} = \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} \tilde{c}_{t-k,i+1,j}. \tag{2.3}$$

1) 本文将第 $t+1$ 天第 1 部分的交易量视为第 t 天第 I 部分交易量的下一个序列值.

对于剩余部分的预测, Bialkowski 等[3] 分别利用了自回归滑动平均 (autoregressive moving average, ARMA)(1, 1) 和自我激励阈值自回归 (self-exciting threshold autoregressive, SETAR) 两个模型:

$$\tilde{e}_{t,i,j} = \psi_1 \tilde{e}_{t,i-1,j} + \psi_2 + \epsilon_{t,i,j}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{e}_{t,i,j} = (\phi_{11}\tilde{e}_{t,i-1,j} + \phi_{12})\mathbb{I}(\tilde{e}_{t,i-1,j}) + (\phi_{21}\tilde{e}_{t,i-1,j} + \phi_{22})[1 - \mathbb{I}(\tilde{e}_{t,i-1,j})] + \epsilon_{t,i,j}, \tag{2.5}$$

其中,

$$\mathbb{I}(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2.2 乘积模型

本小节介绍 Brownlees 等[9] 提出的乘积模型, 该模型的特点是, 引入乘积误差模型 (MEM) 的思想将交易量分解为日间成分 η、日内周期成分 ϕ、日内非周期成分 μ 和误差项 ε 的积, 故称其为 "乘积模型".

由于该模型仅讨论单一证券, $J = 1$, 故省略 j 下标, 以 $v_{t,i}$ 记第 t 天第 i 时段的交易量, 设其有如下表示:

$$v_{t,i} = \eta_t \phi_i \mu_{t,i} \varepsilon_{t,i}, \tag{2.6}$$

其中误差项 $\varepsilon_{t,i}$ 为非负独立同分布随机变量并且

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{t,i} \mid \mathcal{F}_{t,i-1}) = 1, \quad \mathrm{Var}(\varepsilon_{t,i} \mid \mathcal{F}_{t,i-1}) = \sigma^2, \tag{2.7}$$

这里 $\mathcal{F}_{t,i-1}$ 表示 "预测 $x_{t,i}$ 之前关于它的所有信息", 通常设 $\mathcal{F}_{t,0} = \mathcal{F}_{t-1,I}$.

3 种成分的模型分别如下所示:

$$\eta_t = \alpha_0^{(\eta)} + \beta_1^{(\eta)}\eta_{t-1} + \alpha_1^{(\eta)} v_{t-1}^{(\eta)}, \tag{2.8}$$

$$\phi_i = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{I}i\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{I}i\right)\right], \tag{2.9}$$

$$\mu_{t,i} = \alpha_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)}\mu_{t,i-1} + \alpha_1^{(\mu)} v_{t,i-1}^{(\mu)}, \tag{2.10}$$

其中 $v_{t-1}^{(\eta)}$ 被称为标准化日间交易量, $v_t^{(\eta)} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{v_{t,i}}{\phi_i\mu_{t,i}} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\eta_t\varepsilon_{ti}$; $v_{t,i-1}^{(\mu)}$ 被称为标准化日内交易量, $v_{t,i}^{(\mu)} = \frac{v_{t,i}}{\eta_t\phi_i} = \mu_{t,i}\varepsilon_{ti}$.

此外, 作者还在日间成分 (2.8) 和日内非周期成分 (2.10) 中引入针对收益情形的非对称性:

$$\eta_t = \alpha_0^{(\eta)} + \beta_1^{(\eta)}\eta_{t-1} + \alpha_1^{(\eta)} v_{t-1}^{(\eta)} + \gamma_1^{(\eta)} v_{t-1}^{(-\eta)}, \tag{2.11}$$

$$\mu_{t,i} = \alpha_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)}\mu_{t,i-1} + \alpha_1^{(\mu)} v_{t,i-1}^{(\mu)} + \gamma_1^{(\mu)} v_{t,i-1}^{(-\mu)}, \tag{2.12}$$

其中,

$$v_{t-1}^{(-\eta)} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{v_{t,i}}{\phi_i\mu_{t,i}}[1 - \mathbb{I}(r_{t-1})], \quad v_{t,i-1}^{(-\mu)} = \frac{v_{t,i}}{\mu_t\phi_i}[1 - \mathbb{I}(r_{t-1})],$$

r_t 表示第 t 天的收益率, $\mathbb{I}$ 为上节定义的示性函数.

通过以上介绍可以看出, $v_{t,i}$ 的各个分解成分序列呈现半耦合的形式, 无法分别利用对应数据进行参数估计, 因此文献 [9] 采用广义矩方法 (generalized method of moments, GMM) 对模型参数进行整体估计.

本文根据文献 [22], 在某些正则条件下, 给出了矩条件并进行了估计, 具体细节此处不再赘述.

2.3 分解优化模型

本小节介绍 Satish 等[11] 提出的分解优化模型, 该模型的特点是, 通过原始序列的分解子序列给出不同的预测值, 然后利用所得预测值的线性组合进行进一步优化, 给出最终预测, 因此称其为 "分解优化模型".

同样由于仅涉及单一证券, 本小节省略 j 下标. Satish 等[11] 将每一个小时段 (如第 t 天第 i 时段) 称为一个箱, 分别利用当前箱之前临近的若干箱及此前若干天同一时段的箱的交易量进行预测, 给出 3 个不同的预测结果.

第一个预测值由传统方法的滚动均值给出:

$$\hat{v}_{t,i}^1 = \frac{1}{L_2}\sum_{l=1}^{L_2} v_{t-l,i}, \tag{2.13}$$

其中 L_2 为参数, 可根据实际需要选取, 或用优化方法进行优化.

第二个预测值利用 ARMA 模型基于此前若干天同一时段的交易量数据给出:

$$\hat{v}_{t,i}^2 = \beta_0^1 + \sum_{j=1}^{p_1}\beta_j^1 v_{t-j,i} + \tilde{\varepsilon}_{t,i} + \sum_{k=1}^{q_1}\gamma_j^1\tilde{\varepsilon}_{t-k,i}. \tag{2.14}$$

第三个预测值同样利用 ARMA 模型但基于此前相邻的若干箱的交易量数据给出:

$$\hat{v}_{t,i}^3 = \beta_0^2 + \sum_{j=1}^{p_2}\beta_j^2 v_{t,i-j} + \dot{\varepsilon}_{t,i} + \sum_{k=1}^{q_2}\gamma_j^2\dot{\varepsilon}_{t,i-k}. \tag{2.15}$$

最终预测结果由 (2.16) 给出:

$$\hat{v}_{t,i} = \hat{a}\hat{v}_{t,i}^1 + \hat{b}\hat{v}_{t,i}^2 + \hat{c}\hat{v}_{t,i}^3, \tag{2.16}$$

其中 $\hat{v}_{t,i}^1$,、$\hat{v}_{t,i}^2$ 和 $\hat{v}_{t,i}^3$ 是前述 $v_{t,i}$ 的不同预测值, 而参数 $\hat{a}$、$\hat{b}$ 和 $\hat{c}$ 由以下优化问题给出:

$$\begin{aligned} &\min_{a,b,c}\ \frac{1}{L_1}\sum_{l=1}^{L_1}|a\hat{v}_{t,i-l}^1 + b\hat{v}_{t,i-l}^2 + c\hat{v}_{t,i-l}^3 - v_{t,i-l}| \\ &\text{s.t.}\ \ a+b+c=1, \\ &\qquad a,b,c \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.17}$$

这里 L_1 为参数, 可以根据实际需求设定.

3 局部波动模型

3.1 加和、乘积和分解优化模型辨析

对于上一节介绍的 3 种模型, 基于沪深 300 指数相关数据进行了实证分析 (具体参见第 4.3 小节), 发现在 3 个模型中, 预测效果方面整体表现最好的是乘积模型, 然而该模型对数据要求高, 运算速度

慢, 难以动态化; 分解优化模型运算速度最快, 对数据要求较低, 然而该模型在 VWAP 策略层面的预测误差较大. 基于以上结果的提示, 对乘积模型和分解优化模型进行了细致的对比.

首先对于乘积模型, 将 (2.6) 分别代入 (2.8) 和 (2.10) 有

$$\eta_t = \alpha_0^{(\eta)} + \beta_1^{(\eta)}\eta_{t-1} + \alpha_1^{(\eta)}\frac{1}{I}\eta_{t-1}\sum_{j=1}^{I}\varepsilon_{t-1,j}, \tag{3.1}$$

$$\mu_{t,i} = \alpha_0^{(\mu)} + \beta_1^{(\mu)}\mu_{t,i-1} + \alpha_1^{(\mu)}\mu_{t,i-1}\varepsilon_{t,i-1}. \tag{3.2}$$

如前所述, 乘积模型使用的 3 个子序列均不能够显式表达, 而分解优化模型的子序列则可以. 若将分解优化模型中的第二项预测的 ARMA 模型改为日均值序列的 ARMA 模型, 则两模型运用的 3 个子序列均可分别视为对日间周期、日内周期和日内非周期成分的描述. 其中, 两模型对日内周期成分的处理相同, 下面主要关注日间周期成分和日内非周期成分的模型区别. 为了便于比较, 对分解优化模型同样利用 ARMA(1, 1) 进行分析:

$$\eta_t = \beta_0^1 + \beta_1^1\eta_{t-1} + \tilde{\varepsilon}_{t,i} + \gamma_1^1\tilde{\varepsilon}_{t-1,i}, \tag{3.3}$$

$$\mu_{t,i} = \beta_0^2 + \beta_1^2\mu_{t,i-1} + \dot{\varepsilon}_{t,i} + \gamma_1^2\dot{\varepsilon}_{t,i-1}. \tag{3.4}$$

对比 (3.1) 和 (3.3), 差异在于 (3.1) 的第三项为因变量和误差项乘积, 且误差项为前期误差的平均值, 而 (3.3) 除前期误差外还增加了当期误差项. 若不考虑 (3.1) 出现误差与变量相关的情形, 仅从误差项角度看, (3.3) 的误差项相对更具灵活性, 其估计结果不应显著低于 (3.1) 给出的结果, 乘积模型引入误差与变量的相关性对于其结果当有重要的意义. (3.2) 和 (3.4) 的差异也有类似分析结果.

此外, 在优化方法上, 由于采用了半耦合建模形式, 子序列没有对应数据, 乘积模型需要进行整体优化, 因此对计算速度的要求和对数据的要求较分解优化模型更高. 分解优化模型基于子序列各自的对应数据, 通过引入再一次的优化减少误差, 不需整体优化, 计算速度快.

3.2 模型的改进: 序列分解和局部波动

通过第 3.1 小节辨析, 乘积模型计算速度慢、难以动态化的主要原因在于其所用子序列的半耦合建模方式, 实际上根据第 4.2 小节的有益发现, 为描述日间、日内趋势等特征, 可通过对原始序列进行分解及组合获得新的数据序列对这些趋势进行描述. 这里, 类似分解优化模型, 可以将原始序列分解为两个维度: 同一时段不同日期的交易量 $\{v_{t,i}, t = 1, 2, \ldots, T\}$, 称之为横向序列; 同一日期不同时段的交易量 $\{v_{t,i}, i = 1, 2, \ldots, I\}$, 称之为纵向序列; 再利用两个方向的数据构造预测模型需要的序列. 之后还引入加和模型给出的公共部分序列扩展模型, 以利用更多的信息.

日内交易量数据的波动通常具有一定的聚集性, 从下文第 4.2 小节对实证数据的描述性统计分析中也可以看出这一点. 通过上节分析, 乘积模型预测方面的相对优势看起来应在于误差部分的建模方式, MEM 中误差与因变量的乘积可以捕捉数据聚集性特点. 联系连续时间金融中常用的建模方式, 这自然地使人联想到参数依赖于过程本身的 “局部模型” (如局部波动率模型). 因此具体建模上, 在原有 ARMA(1, 1) 模型的误差部分引入具有局部波动特点的系数, 并简称这样的新模型为局部波动模型.

类似分解优化模型, 采用二次优化进一步减小误差, 预测结果由

$$\hat{v}_{t,i} = \sum_{m=1}^{M}\hat{a}_m\hat{v}_{t,i}^m \tag{3.5}$$

给出, 其中 M 为序列数目. 本文主要考虑 3 个序列, 在扩展形式中加入第 4 个序列.

序列一是横向序列, 预测值即基准模型的历史滚动均值, 这是日内周期成分的代表序列, 描绘交易量在日内的 U 型性质:

$$\hat{v}_{t,i}^{1} = \frac{1}{L_3}\sum_{l=1}^{L_3} v_{t-l,i}. \tag{3.6}$$

序列二是日均值序列, 即 $\{\ldots, \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} v_{t-1,i}, \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} v_{t,i}, \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} v_{t+1,i}, \ldots\}$ (简记为 $\{\ldots, \bar{v}_{t-1}, \bar{v}_t, \bar{v}_{t+1}, \ldots\}$). 该序列是日间趋势的代表序列, 描绘交易量的走势. 预测值 $\hat{v}_{t,i}^{2}$ 由

$$\bar{v}_t = \alpha_0^{(\bar{v})} + \beta_1^{(\bar{v})}\bar{v}_{t-1} + \alpha_1^{(\bar{v})} f(\bar{v}_{t-1})\tilde{\epsilon}_t \tag{3.7}$$

给出, 其中, $\{\tilde{\epsilon}_t\}$ 为独立随机变量列, 并且满足 $\mathrm{E}(\tilde{\epsilon}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{\mu}$, $\mathrm{Var}(\tilde{\epsilon}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{\sigma}^2$.

序列三是纵向序列, 描绘日内非周期变化, 预测值 $\hat{v}_{t,i}^{3}$ 由

$$v_{t,i} = \alpha_0^{(v)} + \beta_1^{(v)} v_{t,i-1} + \alpha_1^{(v)} g(v_{t,i-1})\hat{\epsilon}_{t,i} \tag{3.8}$$

给出, 其中 $\{\hat{\epsilon}_t\}$ 为独立随机变量列, 并且满足 $\mathrm{E}(\hat{\epsilon}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \hat{\mu}$, $\mathrm{Var}(\hat{\epsilon}_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \hat{\sigma}^2$.

在拓展模型中引入第四个序列, 由加和模型给出的公共部分 $c_{t,i,j}$ 组成, 预测值 $\hat{v}_{t,i}^{4}$ 由公共部分的历史均值给出:

$$\hat{v}_{t,i}^{4} = \hat{c}_{t,i} = \frac{1}{L_4}\sum_{k=l}^{L_4} \tilde{c}_{t-l,i}. \tag{3.9}$$

得到以上几组预测值后, 按下式进行优化:

$$\begin{aligned} &\min_{a_1,\ldots,a_M} \frac{1}{L_5}\sum_{l=1}^{L_5}\left|\sum_{m=1}^{M} a_m \hat{v}_{t,i-l}^{m} - v_{t,i-l}\right| \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{m=1}^{M} a_m = 1, \\ &\qquad\quad a_i \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

优化的结果即给出 (3.5) 的交易量预测值.

下面具体考察 (3.7) 和 (3.8) 的估计方法. 为书写简便, 在形式上统一为

$$y_n = \alpha_0 + \beta_1 y_{n-1} + \alpha_1 f(y_{n-1})\epsilon_n, \tag{3.11}$$

其中 $\{\epsilon_t\}$ 为独立随机变量列, 并且满足 $\mathrm{E}(\epsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \mu$, $\mathrm{Var}(\epsilon_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma^2$.

本文采用 GMM 估计和极大似然估计 (maximum likelihood estimate, MLE) 对参数进行估计. 在模型设定上, 不要求误差项为白噪声, 对其均值的设定依估计方法而异, 运用 GMM 求解时采用均值为 0 或 1 的设定; 运用 MLE 方法求解时, 则不对均值进行设定.

首先考虑 GMM 估计. 令

$$\tilde{u}_t = \frac{y_t - \alpha_0 - \beta_1 y_{t-1}}{\alpha_1 f(y_{t-1})} - \mu. \tag{3.12}$$

易验证 $\{\tilde{u}_t\}$ 是鞅差序列.

设任给 t, $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{t}}$ 为关于 $\mathcal{F}_{t-1}$ 可测的任意可积 M 维向量. 令 $\tilde{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{t}} = \tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{t}}\tilde{u}_t$, $\tilde{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{t}}$ 也是鞅差序列. 由文献 [22], 记 $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_0, \beta, \alpha_1)^\top$, $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{t}}$ 的有效选择 $\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{t}}^*$ 由 (3.13) 给出:

$$\tilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{t}}^* = \tilde{\sigma}^{-2}\left[-\frac{1}{\alpha_1 f(y_{t-1})}, -\frac{y_{t-1}}{\alpha_1 f(y_{t-1})}, -\frac{\tilde{\mu}}{\alpha_1}\right]^\top. \tag{3.13}$$

此时

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{t}} = \tilde{\sigma}^{-2}\left[-\frac{1}{\alpha_1 f(y_{t-1})}, -\frac{y_{t-1}}{\alpha_1 f(y_{t-1})}, -\frac{\tilde{\mu}}{\alpha_1}\right]^\top \tilde{u}_t. \tag{3.14}$$

相应矩条件如下:

$$\overline{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{1}} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{t}}. \tag{3.15}$$

随后可以用文中给出的两步估计法求解参数. y_t 的估计值 $\hat{y}_t$ 可由下式给出:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 f(y_{t-1})\mu. \tag{3.16}$$

接下来考虑 MLE 方法. 参照交易量研究文献中常用的误差分布假设, 本文采用 Gamma 分布、Weibull 分布和对数正态分布作为误差的分布假设. 3 类分布的密度函数由 (3.17)–(3.19) 给出:

$$f_1(x;\theta_\beta^1,\theta_\alpha^1) = \frac{(\theta_\beta^1)^{\theta_\alpha^1}}{\Gamma(\theta_\alpha^1)} x^{\theta_\alpha^1 - 1}\mathrm{e}^{-\theta_\beta^1 x}, \quad x > 0, \tag{3.17}$$

$$f_2(x;\theta_\lambda^2,\theta_k^2) = \frac{\theta_k^2}{\theta_\lambda^2}\left(\frac{x}{\theta_\lambda^2}\right)^{\theta_k^2 - 1}\mathrm{e}^{-\frac{x^{\theta_k^2}}{\theta_\lambda^2}}, \quad x > 0, \tag{3.18}$$

$$f_3(x;\theta_\mu^3,\theta_\sigma^3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\theta_\sigma^3}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \theta_\mu^3)^2}{2(\theta_\sigma^3)^2}}, \quad x > 0. \tag{3.19}$$

最大化下式求得参数估计值:

$$\ln F_i(w_t;\alpha_0,\alpha_1,\beta_1,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\ln f_i(y_j;\boldsymbol{\theta}), \quad i = 1,2,3. \tag{3.20}$$

y_t 的估计值 $\hat{y}_t$ 可有以下表示:

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 f(y_{t-1})\frac{\hat{\theta}_\alpha^1}{\hat{\theta}_\beta^1}, \tag{3.21}$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 f(y_{t-1})\hat{\theta}_\lambda^2\Gamma\left(1 + \frac{1}{\hat{\theta}_k^2}\right), \tag{3.22}$$

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}_1 y_{t-1} + \hat{\alpha}_1 f(y_{t-1})\hat{\theta}_\mu^3, \tag{3.23}$$

分别对应 Gamma 分布、Weibull 分布和对数正态分布.

4 实证检验

本文的实证主要基于沪深 300 指数数据, 时间跨度为 2016 年 1 月 4 日至 2018 年 12 月 28 日, 且因熔断剔除 2016 年 1 月 4 日和 2016 年 1 月 7 日两个交易日数据, 本节将每个交易日划分为 16 个时间区间, 每个时间区间长度为 15 分钟, 剔除后共 11664 条数据, 数据来源于 Wind 数据库.

在具体实证中, 出于需要会同时选用其他指数及个股数据, 数据的时间跨度和区间长度在不另作说明的情况下同前, 并且均来源于 Wind 数据库.

实证中, 基准模型选取相关研究中通常被用作基准的经典交易量预测模型 “21 天历史滚动均值”.

4.1 误差选取

提升 VWAP 策略是预测日内交易量的重要目的之一, 因此本文选取交易量和 VWAP 策略两个层面的误差.

交易量层面的误差度量包括: 绝对值误差, 记为 $e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$; 绝对值比例误差, 记为 $e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$; 二次比例误差, 记为 $e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$; Brownlees 等 [9] 所用误差, 记为 $e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$. VWAP 策略层面的误差度量包括: 绝对值比例误差, 记为 $e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$; 二次比例误差, 记为 $e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$. 各误差对应表达式如下 (省略表示个股的 j 下标):

$$
\begin{aligned}
&e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}|\hat{v}_{t,i}-v_{t,i}|,\quad e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\left|\frac{\hat{v}_{t,i}-v_{t,i}}{v_{t,i}}\right|,\\
&e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{\hat{v}_{t,i}-v_{t,i}}{v_{t,i}}\right)^2,\quad e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{I}w_{t,i}\ln\hat{w}_{t,i},\\
&e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}|\mathrm{VWAP}_t-\overline{\mathrm{VWAP}}_t|=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{I}w_{t,i}p_{t,i}-\sum_{i=1}^{I}\hat{w}_{t,i}p_{t,i}\right|,\\
&e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}(\mathrm{VWAP}_t-\overline{\mathrm{VWAP}}_t)^2=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{i=1}^{I}w_{t,i}p_{t,i}-\sum_{i=1}^{I}\hat{w}_{t,i}p_{t,i}\right)^2.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

4.2 描述性统计

图 1 是沪深 300 指数的原始序列、日均值序列和日内成分 (原始序列与日均值序列之商) 的时间序列图. 可以看到, 原始序列有一定的聚集性和趋势性, 而日内成分虽然还有聚集性, 但趋势性得到很

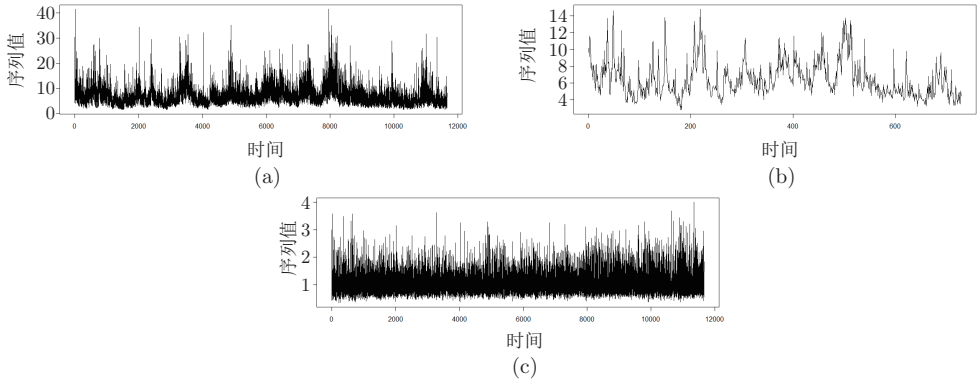

图 1 沪深 300 指数数据的时间序列图 I. (a) 原始序列; (b) 日均值序列; (c) 日内成分

大程度的消除.

将图 1 中的日内成分序列除以日内周期成分 (横向序列均值 $\sum_{j=1}^{T} v_{j,i}/T$, 图 2(b)) 得到日内非周期成分序列 (图 2(c)). 在图 2 中, 日内周期成分呈现出 U 型分布, 即日内交易量的 U 型性质; 对比图 2(a) 和 2(c), 日内非周期成分的周期性和聚集性相比日内成分进一步减少, 趋于白噪声特征. 为验证, 将沪深 300 指数的自相关函数 (autocorrelation function, ACF) 图列为图 3. 从图 3 中看出, (1) 原始序列具有衰减的周期性特征, 说明原始序列具有一定的周期性和趋势性; (2) 日均值序列的 ACF 图的衰减速度较慢, 未呈现出周期性特征, 说明日均值序列具有明显的趋势性; (3) 同理, 日内成分的 ACF 图显示其保留了周期性但不再具有明显的趋势性; (4) 在去除日内周期成分后, 日内非周期成分的 ACF 图不再显示出周期性, 而在一定程度下显示出截尾的特征. 图 4 给出了日内非周期成分的偏自相关函数 (partial autocorrelation function, PACF) 图, 可以看出其 PACF 图也呈现出一定的截尾特征, 因此日内非周期成分在一定程度上具有 ARMA 模型的特点.

通过以上分析, 我们认为沪深 300 指数的日内交易量可以划分为日间趋势成分、日内周期成分和日内非周期成分 3 个部分.

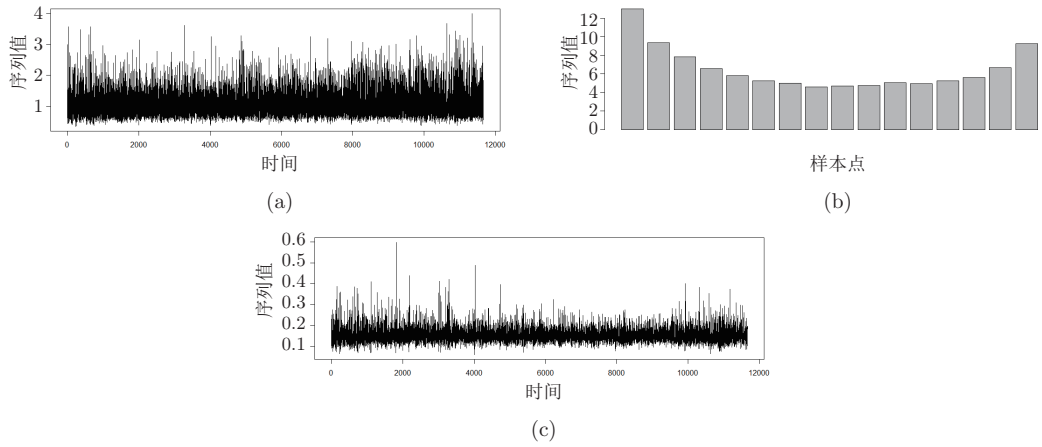

图 2 沪深 300 指数数据的时间序列图 II. (a) 日内成分; (b) 日内周期成分; (c) 日内非周期成分

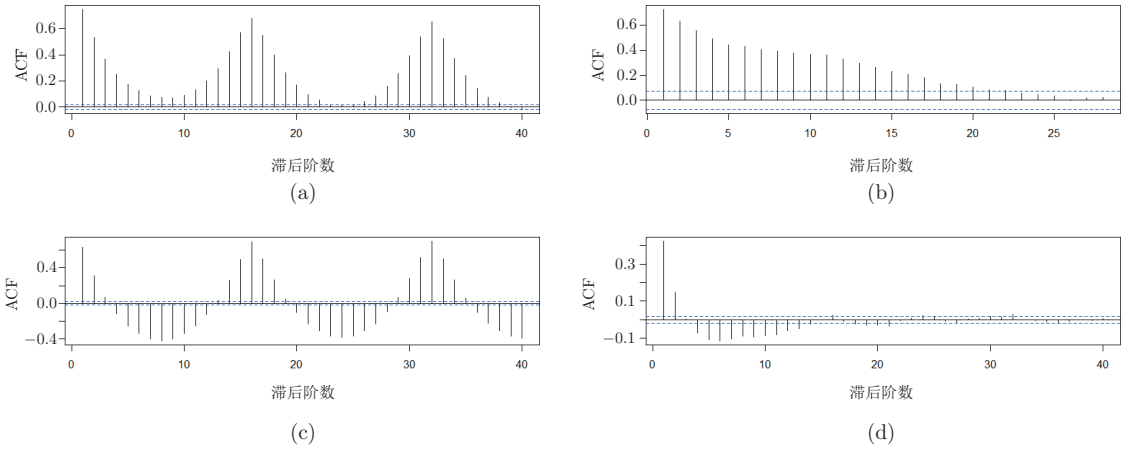

图 3 沪深 300 指数数据的 ACF 图. (a) 原始序列; (b) 日均值序列; (c) 日内成分; (d) 日内非周期成分

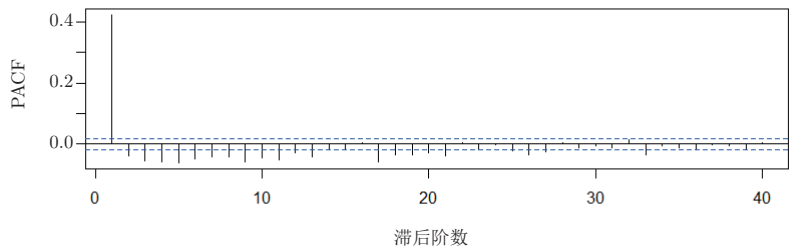

图 4 沪深 300 指数数据日内非周期成分的 PACF 图

4.3 加和、乘积和分解优化模型的实证检验

4.3.1 加和模型

加和模型涉及多只证券交易量的公共部分和剩余部分 (参见第 2.1 小节), 为了与其他模型进行对比, 同样基于沪深 300 指数数据进行实证, 同时引入目前 A 股分析中指数层面常用的指数 (上证综指、深证成指、中小板指、创业板指、上证 50 指数和中证 800 指数) 数据. 数据均来源于 Wind 数据库.

加和模型中的剩余部分应分别用 ARMA 和 SETAR 模型进行估计. 由于实际数据不一定具有 ARMA 效应, 本文将 ARMA 模型改为利用 R 软件中的 auto.arima 函数在差分自回归移动平均 (autoregressive integrated moving average, ARIMA) 模型族中自选择模型. 对 SETAR 模型, 严格采用 setar 函数估计, 考虑一阶滞后, 参数 $m = 2$. 由于 Bialkowski 等 [3] 并未给出采用横向序列还是纵向序列进行预测, 本文对两种情形均进行了考虑.

对于参数 $r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Bialkowski 等 [3] 未明确如何选取, 本文采用了穷举法. 由于篇幅所限, 此处仅列出其中表现较好的 $r = 5$ 的结果, 其中首行为基准模型 21 天历史滚动均值的估计误差, 其余为相对基准模型的误差增加比率 (下文同此), 见表 1.

从结果上看, 加和模型预测效果总体并不出色, 交易量误差层面仅有 $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$ 的预测效果稍优于 21 天历史滚动均值, 但从后文的实证看, $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$ 指标一般变动不大, 且常与其他误差的度量结果不同; VWAP 层面的预测效果在采用 ARIMA 模型时较好, 但与参数 r 有很大关系.

图 5 给出了在采用 ARIMA 模型预测的情形下, 参数 r 对误差度量的影响 (注: 各误差对应颜色如下. $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{v}}$: 灰; $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{ab}}$: 黄; $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{MSE}}$: 浅蓝; $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$: 绿; $e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{ab}}$: 深蓝; $e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{MSE}}$: 红). 在加和模型中选取 ARIMA 模型进行估计时, 除 $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$ 几乎没有变化外, 其余误差度量均随参数 r 的增加呈现一定的下降趋势, 但这种趋势在 r 增加到一定程度后不再明显.

表 1 $r = 5$ 时加和模型相比基准模型的误差变动情形

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{v}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{MSE}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{MSE}}$
21 天历史滚动均值	2.11E−4	0.29	0.14	0.17	0.07	0.27
纵向序列, ARIMA	1.33%	1.72%	4.16%	0.00%	−0.22%	−0.80%
纵向序列, SETAR	14.53%	20.39%	715.64%	−2.37%	10.56%	148.38%
横向序列, ARIMA	1.46%	2.18%	4.76%	0.00%	−0.02%	−1.27%
横向序列, SETAR	27.83%	32.99%	1055.81%	−0.15%	13.51%	321.04%

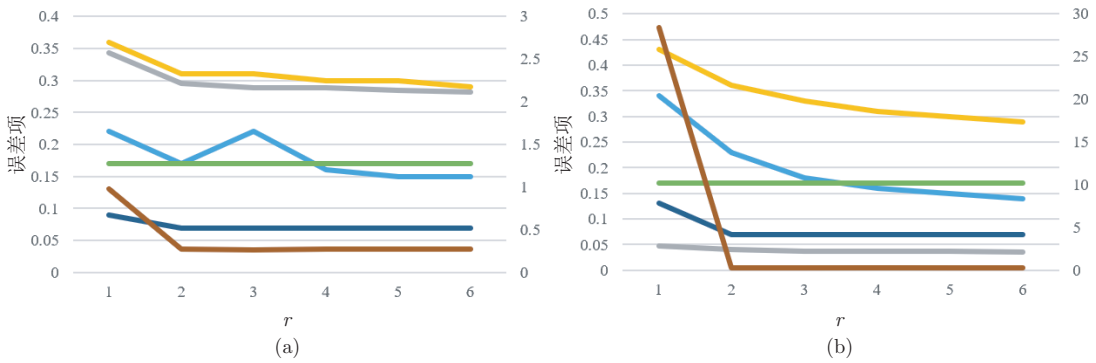

图 5　沪深 300 指数数据的 ACF 图. (a) ARIMA 模型、纵向序列; (b) ARIMA 模型、横向序列

加和模型在本节数据集中表现不佳, 交易量和 VWAP 两个层面的预测效果均未显著超越历史滚动均值. 随着参数 r 的增大, 加和模型的效果逐步改善, 但 r 增加到一定程度后, 其改善效果不再明显, 且随 r 增大, 计算时间大幅增加.

4.3.2　乘积模型

关于乘积模型的实证, 本文主体思路方面基本遵照文献 [9], 在不加入非对称效应和加入对称效应两种情形下, 采用前 500 天的数据估计参数, 再利用参数的估计值给出全部区间预测结果; 但我们在运算过程中将原文矩阵处理方法中求逆改为求伪逆和矩阵加载后求伪逆的方法, 增强预测稳健性; 另外, 文献 [9] 属静态预测, 我们还尝试了半动态预测.

表 2 给出了不加入非对称效应时 ((2.8)–(2.10)) 的预测误差相比基准模型的变动情形, 而表 3 给出了加入非对称效应后 ((2.11)–(2.12)) 的预测误差相比基准模型的变动情形.

从表 2 中可以看出, 在交易量层面, 无论哪种方法在全部区间的表现均不理想; 而在 VWAP 层面, 求伪逆和矩阵加载的误差均大幅下降. 经查模型的具体预测值发现, 无论采用哪种方法, 期初几日的预测值与真实值之间均存在量级上的差异, 但预测值会很快收敛到真实值附近. 基于以上原因, 本文对乘积模型在样本外的表现进行了检验, 结果总结为表 4 和 5.

从表 4 中可以看出, 在利用求伪逆和矩阵加载方法提升模型的稳健性后, 乘积模型对样本外数据的预测误差相较历史滚动均值的预测误差大幅降低.

比较表 3 和 5, 在求伪逆和矩阵加载两种较稳健的估计方式下, 加入非对称效应整体上与不加入非对称效应预测效果相当, 这说明本文所采用的数据可能未含有明显的非对称效应.

整体而言, 我们的改进方法比 Brownlees 等 [9] 使用的方法给出的预测误差更小, 且矩阵加载方法给出的预测误差在 3 种方法中最小.

表 2　不加入非对称效应的乘积模型预测结果 (全部区间)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	1.64	0.27	0.13	0.17	1.00	3.83
求逆	1.43E+9	1.42E+9	1.77E+20	−0.61%	−6.19%	282.01%
求伪逆	−34.13%	11.55%	7823.36%	0.01%	−41.17%	−72.87%
矩阵加载	31.61%	7.45%	7818.30%	0.05%	−43.86%	−75.08%

接下来本文尝试利用前 21 天数据、不含非对称效应的模型对样本进行训练得到参数, 并对下一天进行预测. 为与每个点都更新参数的动态预测相区别, 称此为半动态预测, 结果见表 6.

在采用文献 [9] 的求逆方法时, 估计次数增多导致不稳定性增强, 预测误差出现了量级上的差异, 而采用求伪逆和矩阵加载方法得到的预测效果较稳定且在所有指标上均超越了历史滚动均值, 说明这两种方法对预测效果的提升有意义. 另一方面, 求逆方法的交易量层面 $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$ 误差与其他交易量层面误差在效果度量上给出了相反的结果, 可能提示了 $e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$ 作为误差度量的不合理性. 半动态预测在交易量层面的预测效果相比静态预测有一定提升, 但在 VWAP 层面的预测效果反而下降. 我们分析这是由于使用 VWAP 策略时主要关注日内交易量对当日总交易量的占比, 交易量预测同方向的偏差在

表 3 加入非对称效应的乘积模型预测结果 (全部区间)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	e^{v}_{v}	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{MSE}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{MSE}}$
21 天历史滚动均值	1.64	0.27	0.13	0.17	1.00	3.83
求逆	2.36E+9	1.51E+9	5.60E+9	0.02%	−24.21%	−23.06%
求伪逆	35.79%	30.45%	7828.49%	0.06%	−37.20%	−69.88%
矩阵加载	34.03%	7.91%	7839.20%	0.15%	−40.24%	−70.89%

表 4 不加入非对称效应的乘积模型预测结果 (样本外)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{v}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{MSE}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{MSE}}$
21 天历史滚动均值	1.52	0.28	0.13	0.17	1.52	6.57
求逆	1049.27%	1110.00%	2728.84	−0.52%	−29.73%	−1.31%
求伪逆	−28.00%	−31.15%	−54.99%	−0.03%	−59.14%	−87.01%
矩阵加载	−29.74%	−33.94%	−57.95%	0.00%	−60.03%	−87.23%

表 5 加入非对称效应的乘积模型预测结果 (样本外)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	e^{v}_{v}	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{MSE}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{MSE}}$
21 天历史滚动均值	1.52	0.28	0.13	0.17	1.52	6.57
求逆	−28.02%	−38.83%	−65.41%	0.13%	−46.57%	−78.32%
求伪逆	−27.05%	−29.44%	−53.11%	0.02%	−53.83%	−84.00%
矩阵加载	−36.73%	−36.73%	−60.12%	0.10%	−53.98%	−83.89%

表 6 不加入非对称效应的乘积模型半动态预测结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{v}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{MSE}}$	$e^{\mathrm{v}}_{\mathrm{Slicing}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{ab}}$	$e^{\mathrm{VWAP}}_{\mathrm{MSE}}$
21 天历史滚动均值	1.68	0.28	0.14	0.17	1.03	3.94
求逆	5.22E+77	2.49E+77	1.19E+158	−0.93%	−293.22%	−49194.63%
求伪逆	−31.67%	−35.15%	−56.85%	−0.11%	−44.24%	−80.40%
矩阵加载	−33.85%	−38.23%	−61.94%	−0.11%	−45.56%	−81.53%

相除时会被抵消, 从而使比值更接近于真实值.

4.3.3 分解优化模型

对于第 2.3 小节中的第 1 个估计值, 选择横向序列的 21 天历史滚动均值, 即直接采用基准模型的结果. 对于第 2 和 3 个估计值, 横向序列的 ARMA 模型选取了 5 天的序列作为输入值, 纵向序列的 ARMA 模型选取前 5 个日内交易量作为输入值. 采用 30 天的预测值进行二次优化.

由于原文未明确参数的更新频率, 尝试每日更新参数和每点更新参数 (即半动态预测和动态预测). 为提升准确性, 仍使用 R 软件中的 auto.arima 函数代替 ARMA 模型. 本文尝试了直接利用估计结果和沿用前一模型的预测结果两种方法处理优化过程中 Hesse 矩阵元法求逆的问题, 并将后一种称为控制 Hesse 矩阵方法.

预测结果见表 7, 该模型在交易量层面的表现比基准模型好, 而在 VWAP 层面表现较差. 这说明二次优化过程确实能减小样本外预测误差, 但同时带来的问题是增大了 VWAP 层面的预测误差. 从模型更新情形看, 动态预测相较半动态预测的误差更小, 而是否控制 Hesse 矩阵对结果影响不大.

总体而言, 虽然分解优化模型在 VWAP 层面的预测效果不是很好, 但在交易量层面表现良好, 且由于预测速度快, 实际应用中仍很有价值.

综合 3 个模型的实证结果, 加和模型参数 r 较大时在 VWAP 层面的表现尚能接受, 但随之增加的运算量使得预测速度变慢; 乘积模型无论在交易量层面还是 VWAP 层面均表现最优, 但其半耦合形式使得只能对参数进行整体估计, 需要大量数据进行训练, 速度较慢, 动态预测难度高; 分解优化模型在交易量层面的表现较好, 运算速度快于其他两个模型, 但在 VWAP 层面预测误差较大.

4.4 局部波动模型的实证检验

本小节考察我们提出的局部波动模型的预测效果, 横向序列求均值的参数、日均值的训练参数及二次优化的时间长度均取为 21 天; 纵向序列的训练参数取为 32 个点, 即 2 天. 对于局部波动函数 $f(\cdot)$, 本小节考虑一次函数 (包含及不含常数项)、二次函数、平方根函数和指数函数.

表 8 给出 $f(x)=x$ 时的预测结果, 可以看出除均值为 0 的 GMM 估计外, 局部波动模型在交易量层面和 VWAP 层面均取得了较好的预测效果; 相比分解优化模型, 预测效果在交易量层面并没有显著下降, 但在 VWAP 层面却有很大提升. GMM 估计的结果与均值的选取关系密切, 若均值选取得当, 则可以获得比 MLE 方法更好的效果; 但若均值选取不当, 则其预测误差会出现量级上的差异.

表 9 给出 $f(x)=x+a$ 时的预测结果, 均值为 0 的 GMM 估计结果因不稳定予以略去. 相比 $f(x)=x$ 的情形, $f(x)=x+a$ 在局部波动率的基础上增加了整体波动率, 其预测效果在交易量层面

表 7 分解优化模型预测结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	1.76	0.29	0.14	0.17	1.07	4.12
动态预测	−10.95%	−12.27%	−24.23%	0.19%	3.73%	5.27%
动态预测, 控制 Hesse 矩阵	−10.94%	−12.27%	−24.22%	0.18%	3.72%	5.26%
半动态预测	−10.37%	−11.58%	−23.59%	0.19%	3.95%	5.93%
半动态预测, 控制 Hesse 矩阵	−10.31%	−11.53%	−23.32%	0.19%	3.98%	5.95%

有一定提升, 但在 VWAP 层面的预测效果未有改善, 这说明局部误差主要对 VWAP 层面预测效果的改善有意义.

表 10 给出 $f(x)=\sqrt{x}$ 时的预测结果, GMM 估计依旧具有均值依赖性, MLE 方法预测结果较稳定.

表 11 列出采用二次函数 $f(x)=x^2+ax$ 和指数函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 时较为稳定的结果, 由于使用 Weibull 分布时, 预测值超出了 Gamma 函数的范围, 因此未能预测.

综合来看, 局部波动模型的预测效果与函数的选取有一定的关系, 函数过于复杂, 会造成结果的不稳定或不可求解性.

从实证结果看, 在预测结果稳定的前提下, 局部波动模型的确能在保持较高运算速度的同时, 在交易量和 VWAP 层面均达到良好的预测效果. 由于 GMM 估计的预测效果依赖于均值的选取, 故稳健性检验部分仅选取了 MLE 方法给出的结果.

表 8 局部波动模型预测结果 ($f(x)=x$)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	1.76	0.29	0.14	0.17	1.07	4.12
GMM 均值为 0	1.34E+48	6.46E+47	3.27E+98	−584.95%	−631.78%	−5702.26%
GMM 均值为 1	−6.73%	−10.78%	−21.88%	0.14%	0.00%	−5.32%
MLE Gamma	−2.68%	−11.21%	−22.70%	0.00%	−0.13%	−0.59%
MLE Weibull	−3.05%	−11.85%	−23.72%	0.00%	−0.39%	−1.10%
MLE 对数正态	−3.12%	−11.04%	−22.15%	0.00%	−0.35%	−2.20%
分解优化模型 (动态)	−10.95%	−12.27%	−24.23%	0.19%	3.73%	5.27%

表 9 局部波动模型预测结果 ($f(x)=x+a$)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	1.76	0.29	0.14	0.17	1.07	4.12
GMM 均值为 1	−6.30%	−10.12%	−20.44%	0.16%	0.90%	3.67%
MLE Gamma	−1.95%	−13.19%	−29.84%	0.01%	1.05%	2.47%
MLE Weibull	−1.57%	−12.53%	−26.86%	0.01%	0.94%	2.51%
MLE 对数正态	−2.22%	−11.69%	−25.94%	0.01%	0.70%	2.28%

表 10 局部波动模型预测结果 ($f(x)=\sqrt{x}$)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	1.76	0.29	0.14	0.17	1.07	4.12
GMM 均值为 1	−6.72%	−10.91%	−22.15%	0.14%	0.36%	−4.80%
MLE Gamma	−2.60%	−11.07%	−22.32%	−0.00%	−0.23%	−0.91%
MLE Weibull	−2.58%	−11.15%	−22.47%	0.00%	−0.26%	−1.19%
MLE 对数正态	−3.06%	−11.59%	−23.93%	0.00%	−0.42%	−1.89%

表 11　局部波动模型预测结果 (其他函数)

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
MLE Gamma $f(x)=x^2+ax$	−3.70%	−12.77%	−25.47%	0.00%	−0.55%	−2.47%
MLE 对数正态 $f(x)=x^2+ax$	−3.67%	−12.54%	−25.40%	0.00%	−0.46%	−1.69%
MLE Gamma $f(x)=\mathrm{e}^x$	−4.06%	−13.13%	−26.24%	0.00%	−0.43%	−2.92%
MLE 对数正态 $f(x)=\mathrm{e}^x$	113.52%	29.52%	9496.19%	0.67%	10.55%	21.34%

接下来将加和模型给出的公共部分作为第 4 个序列对模型进行拓展, 选取中信证券和贵州茅台两只个股对局部波动模型及其扩展形式进行分析 (参见表 12 和 13). 可以看到局部波动模型对个股的预测效果比对指数的预测效果有显著提升; 加入公共部分后, 交易量层面的预测效果有所降低, VWAP 层面的预测效果得到提升.

下面对局部波动模型及其扩展形式的误差情形进行分析. 需要说明的是, 横向序列的预测天数也为 21 天, 因而与基准的 21 天历史滚动均值结果相同; 最后一列的平均占比表示对应序列预测值的加权值 (即 $\hat{a}_m\hat{v}_{t,i}^m$) 在最终线性组合中的平均占比.

分析表 14 可以看出, 3 个序列单独预测表现均未超过基准, 而其线性最优组合的表现超过基准,

表 12　局部波动模型及扩展形式预测结果 (中信证券, 600030.SH)

	度量	交易量层面				VWAP 层面	
		$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
局部波动模型	21 天历史滚动均值	0.03	0.72	1.08	0.17	0.02	1.43E+3
	MLE Gamma	−11.28%	−29.37%	−52.51%	−0.19%	−13.50%	−28.03%
	MLE Weibull	−10.14%	−28.81%	−52.04%	−0.09%	−7.38%	−14.60%
	MLE 对数正态	−11.01%	−27.53%	−47.62%	−0.14%	−14.50%	−27.91%
扩展形式	21 天历史滚动均值	4.44E−4	0.74	1.21	0.17	0.02	1.44E−3
	MLE Gamma	−8.83%	−23.36%	95.36%	−0.09%	−14.97	−29.11%
	MLE Weibull	1249.45%	2485.37%	3.09E+6	0.31%	−19.46%	−32.75%
	MLE 对数正态	−11.83%	−27.70%	−47.86%	−0.15%	−17.99%	−35.72%

表 13　局部波动模型及扩展形式预测结果 (贵州茅台, 600519.SH)

	度量	交易量层面				VWAP 层面	
		$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
局部波动模型	21 天历史滚动均值	10.93	0.60	0.81	0.17	0.55	0.97
	MLE Gamma	−5.34%	−21.21%	−39.01%	0.00%	−0.48%	−1.34%
	MLE Weibull	−6.11%	−22.03%	−40.80%	−0.00%	−1.75%	−4.95%
	MLE 对数正态	−6.06%	−21.88%	−40.35%	0.00%	−2.07%	−4.96%
扩展形式	21 天历史滚动均值	2.42E−4	0.60	0.80	0.17	0.55	0.97
	MLE Gamma	8.72%	−5.16%	145.19	0.16%	−16.52%	−29.43%
	MLE Weibull	387.53%	827.98%	3.50E+5	0.40%	−24.08%	−46.65%
	MLE 对数正态	516.03%	767.83%	15792.50	0.81%	−20.35%	−40.33%

表 14 局部波动模型预测误差分析 ($f(x)=x$)

模型		交易量层面				VWAP 层面		平均占比
		$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$	
21 天历史滚动均值		1.76	0.29	0.14	0.17	1.07	4.12	–
GMM	日均值序列	41.81%	52.76%	145.54%	1.92%	34.68%	12.94%	1.96%
均值为 1	横向序列	–	–	–	–	–	–	98.04%
	纵向序列	32.06%	10.45%	17.36%	17.00%	37.34%	23.29%	0.00%
MLE	日均值序列	259.54%	242.35%	580.94%	1.92%	34.68%	12.94%	0.31%
Gamma	横向序列	–	–	–	–	–	–	99.79%
	纵向序列	2.56%	237.96%	562.48%	12.06%	87.13%	91.75%	0.17%
MLE	日均值序列	218.30%	197.18%	433.23%	1.92%	34.68%	12.94%	0.96%
Weibull	横向序列	–	–	–	–	–	–	98.93%
	纵向序列	249.94%	232.74%	557.49%	6.71%	122.63%	293.33%	0.11%
MLE	日均值序列	135.43%	109.92%	222.73%	1.92%	34.68%	12.94%	3.03%
对数正态	横向序列	–	–	–	–	–	–	95.68%
	纵向序列	209.01%	186.08%	395.61%	3.41%	85.22%	159.57%	1.29%

这说明两步优化对提升预测结果有重要意义. 另一方面, 日均值序列用于描述数据的趋势性成分, 而纵向序列用于描述数据的非周期性成分, 两者的波动较横向序列描述的 U 型成分的波动更大, 因而我们对日均值和纵向序列引入局部波动性的模型, 而对 U 型则直接用历史滚动均值. 两步优化方法在一定程度上可以提取出相应序列对应成分中的特定部分, 从而使整体的预测结果比基准结果更好.

综合表 15–18 可知, 局部波动模型并不总是主要依赖横向序列预测结果. 在日均值序列中加入局部波动性, 预测结果在 VWAP 层面一般表现较好. 但由于纵向序列的预测结果一般不太稳定, 在交易量层面的误差过大, 最终导致了模型在交易量层面的预测误差上升.

从表 12 和 13 可以看出, 一般局部波动模型的预测效果相较基准模型在两个层面均上升. 拓展形式的局部波动模型的预测效果在交易量层面有一定下降, 但在 VWAP 层面有提升.

表 15 局部波动模型预测误差分析 (中信证券, 600030.SH)

模型		交易量层面				VWAP 层面		平均占比
		e_{v}^{v}	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$	
21 天历史滚动均值		0.03	0.72	1.08	0.17	0.02	1.43E−3	–
MLE	日均值序列	57.91%	14.84%	580.94%	1.46%	−6.12%	−16.29%	4.80%
Gamma	横向序列	–	–	–	–	–	–	85.45%
	纵向序列	328.92	450.51	1.43E+5	25.52%	−26.73%	−56.96%	9.75%
MLE	日均值序列	67.85%	25.54%	−21.71%	1.46%	−6.12%	−16.29%	3.07%
Weibull	横向序列	–	–	–	–	–	–	96.71%
	纵向序列	216.22	304.90	2.34E+5	24.28%	−26.73%	−60.11%	2.17%
MLE	日均值序列	39.11%	−4.91%	−50.08%	1.46%	−6.12%	−16.29%	10.06%
对数正态	横向序列	–	–	–	–	–	–	79.18%
	纵向序列	223.89	299.57	2.09E+5	21.47%	−23.77%	−54.96%	10.76%

表 16　局部波动模型预测误差分析 (中信证券, 600030.SH)

模型		交易量层面				VWAP 层面		平均占比
		$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$	
21 天历史滚动均值		4.44E−4	0.74	1.21	0.17	0.02	1.44E−3	–
MLE	日均值序列	38.95%	−6.62%	−48.93%	1.46%	−6.17%	−16.33%	11.28%
Gamma	横向序列	–	–	–	–	–	–	38.55%
	纵向序列	1.61E+6	2.00E+5	5.46E+12	60.46%	−24.74%	−56.53%	11.35%
	公共部分	−0.02%	−0.07%	−0.24%	−0.01%	−0.05%	−0.17%	38.82%
MLE	日均值序列	1312.48%	778.63%	15038.31	1.46%	−6.17%	−1.63%	0.62%
Weibull	横向序列	–	–	–	–	–	–	4.28%
	纵向序列	1.59E+6	1.99E+6	5.54E+12	66.77%	−24.70%	−56.52%	90.73%
	公共部分	−0.02%	−0.07%	−0.24%	−0.01%	−0.05%	−0.17%	4.37%
MLE	日均值序列	33.07%	−9.97%	−56.74%	1.46%	−6.17%	−16.33%	14.36%
对数正态	横向序列	–	–	–	–	–	–	35.94%
	纵向序列	1.41E+6	1.67E+6	3.32E+12	60.75%	−24.79%	−56.65%	13.75%
	公共部分	−0.02%	−0.07%	−0.24%	−0.01%	−0.05%	−0.17%	35.95%

表 17　局部波动模型预测误差分析 (贵州茅台, 600519.SH)

模型		交易量层面				VWAP 层面		平均占比
		$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$	
21 天历史滚动均值		10.93	0.60	0.81	0.17	0.55	0.97	–
MLE	日均值序列	100.11%	48.89%	3.38%	2.23%	−6.35%	−29.43%	0.63%
Gamma	横向序列	–	–	–	–	–	–	99.22%
	纵向序列	114.33%	65.49%	21.83%	24.15%	159.75%	558.08%	0.14%
MLE	日均值序列	71.81%	21.15%	−24.18%	2.23%	−6.35%	−29.43%	0.96%
Weibull	横向序列	–	–	–	–	–	–	98.93%
	纵向序列	111.50%	63.67%	19.48%	44.01%	310.42%	13.18	0.11%
MLE	日均值序列	47.85%	2.62%	−35.62%	2.23%	−6.34%	−29.44%	5.15%
对数正态	横向序列	–	–	–	–	–	–	94.22%
	纵向序列	105.44%	57.67%	11.36%	13.90%	206.82%	717.60%	0.63%

对比表 15–18 可以发现, 一般局部波动模型横向序列的平均占比较大, 且日均值序列和纵向序列在交易量层面的预测效果优于带公共部分的拓展模型, 因而模型整体的预测误差相比拓展模型在交易量层面较小.

从参数服从对数正态分布的拓展形式局部波动模型对中信证券的预测结果可以发现, 二次优化的引入在一定程度上可以克服纵向序列在交易量层面预测误差过高的现象.

综合表 14–18 可知, 局部波动性的引入对模型在 VWAP 层面预测效果的提升有重要意义, 且二次优化可以平衡交易量层面和 VWAP 层面的预测误差, 使模型的整体误差相较基准模型在两个层面均有提升. 纵向序列给出的预测误差在交易量层面的大幅增加提示我们可以对不稳定序列设置一定的比例上限, 从而先验地控制结果. 限于篇幅, 本文不再对这一现象进行更深入研究.

表 18 局部波动模型预测误差分析 (贵州茅台, 600519.SH)

模型		交易量层面				VWAP 层面		平均占比
		$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$	
21 天历史滚动均值		2.42E−4	0.60	0.80	0.17	0.55	0.97	–
MLE	日均值序列	5.90%	8.15%	−38.25%	2.22%	−6.35%	−29.43%	10.27%
Gamma	横向序列	–	–	–	–	–	–	34.31%
	纵向序列	3.03E+6	3.18E+6	1.14E+13	60.46%	30.49%	22.80%	21.06%
	公共部分	0.01%	0.04%	0.05%	0.00%	−0.01%	0.12%	34.36%
MLE	日均值序列	101.05%	51.39%	4.33%	2.23%	−6.35%	−29.43%	0.86%
Weibull	横向序列	–	–	–	–	–	–	12.30%
	纵向序列	3.61E+6	3.79E+6	1.49E+13	86.91%	30.76%	23.37%	74.54%
	公共部分	0.01%	0.04%	0.05%	0.00%	−0.01%	0.12%	12.30%
MLE	日均值序列	69.66%	15.68%	−33.06%	2.23%	−6.35%	−29.43%	2.29%
对数正态	横向序列	–	–	–	–	–	–	10.02%
	纵向序列	2.93E+6	3.15E+6	1.12E+13	77.77%	30.76%	23.37%	77.67%
	公共部分	0.01%	0.04%	0.05%	0.00%	−0.01%	0.12%	10.02%

5 稳健性检验

本节给出指数和个股层面的稳健性检验以验证局部波动模型是否具有广泛的适用性及稳定的预测结果. 为了对比, 本文也对加和、乘积和分解优化模型进行了检验. 在不失准确性的前提下, 如不另作说明, 模型的参数和数据选取与实证检验部分相同. 对加和模型选取 ARIMA 族模型的结果进行展示, 对乘积模型选取矩阵加载和样本外误差展示, 对分解优化模型选取动态、不控制 Hesse 矩阵的结果展示; 局部波动模型考虑 MLE 方法的几种情形.

同样, 本节仅列出基准的 21 天历史滚动均值预测误差的数值, 剩余部分仅给出各模型相对基准的误差增加百分比.

5.1 指数层面的稳健性检验

指数层面的稳健性检验主要涉及两个方面, 一是基于沪深 300 指数数据, 考察改变时间跨度和交易区间长度时, 预测结果是否具有稳健性; 二是利用上证 50 指数数据和中证 800 指数数据代表大盘风格数据和小盘风格数据, 考察改变股票股本的情形下, 模型的预测结果是否具有稳健性.

5.1.1 时间跨度的稳健性检验

本小节选取的数据集为沪深 300 指数数据, 时间跨度为 2005 年 4 月 8 日到 2015 年 12 月 31 日, 区间长度选取 15 分钟, 数据来源 Resset 高频数据库. 模型的训练结果见表 19. 由于加和模型涉及其他证券的长期数据, 考虑到数据可获得性和时间成本, 本文暂未检验; 乘积模型旁标注的数值表示用于训练参数的天数.

从表 19 可以看出, 乘积模型的预测效果随时间跨度增长而下降, 这表示长期使用同一参数进行预测存在一定问题, 但增加其参数的更新频率对计算机的运算能力有较高要求. 局部波动模型在交易量

层面和 VWAP 层面均有较好的表现, 且采用 Weibull 分布和对数正态分布的预测效果相比分解优化模型的预测效果有很大提升. 整体来看, 局部波动模型在较长时间内仍有好的预测效果.

5.1.2 区间长度的稳健性检验

本小节基于沪深 300 指数数据, 区间长度为 5 分钟和 30 分钟的检验结果分别见表 20 和 21. 5 分钟数据的时间跨度为 2016 年 2 月 1 日到 2019 年 1 月 30 日, 30 分钟数据的时间跨度与第 4 节相同, 数据均来源于 Wind 数据库. 基于同样的原因, 本小节未考虑加和模型.

可以看出, 分解优化模型的稳健性较好. 乘积模型和局部波动模型对处理频率较高的数据比较有优势. 局部波动模型在 VWAP 策略上的表现较分解优化模型有一定提升. 从 MLE 方法使用的分布

表 19 时间长度的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.02	5.08	1298.93	0.17	1.87	12.82
乘积模型 (500 天)	6.57%	−12.88%	−32.14%	1.68%	−19.49%	−29.01%
乘积模型 (1000 天)	−0.16%	−13.54%	−31.99%	2.67%	−24.44%	−47.90%
乘积模型 (1500 天)	6.37%	−8.54%	−23.36%	2.00%	−15.15%	−30.02%
分解优化模型	−11.19%	−19.86%	−33.44%	0.04%	1.20%	−3.98%
局部波动模型 (Gamma)	−1.48%	−2.63%	−2.15%	0.02%	−0.43%	−1.88%
局部波动模型 (Weibull)	−1.42%	−6.26%	−10.40%	0.00%	−6.52%	−12.54%
局部波动模型 (对数正态)	−5.13%	−5.79%	−11.86%	−0.05%	−10.63%	−23.20%

表 20 区间长度为 5 分钟的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.62	0.31	0.17	0.08	1.14	4.21
乘积模型	−35.38%	−39.07%	−63.68%	−0.19%	−73.67%	−94.78%
分解优化模型	−10.06%	−11.81%	−23.93%	0.12%	3.91%	7.99%
局部波动模型 (Gamma)	−3.18%	−12.74%	−26.08%	−0.02%	−2.76%	−5.88%
局部波动模型 (Weibull)	−4.19%	−14.37%	−28.94%	−0.04%	−5.54%	−13.52%
局部波动模型 (对数正态)	−4.60%	−14.35%	−28.37%	−0.05%	−7.15%	−18.57%

表 21 区间长度为 30 分钟的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	3.35	0.27	0.12	0.25	1.02	3.68
乘积模型	−21.95%	−24.68%	−46.16%	0.17%	−39.37%	−70.92%
分解优化模型	−11.19%	−12.39%	−24.01%	0.33%	4.40%	3.64%
局部波动模型 (Gamma)	−2.32%	−10.31%	−20.84%	0.00%	0.11%	−0.24%
局部波动模型 (Weibull)	−2.22%	−10.42%	−21.26%	0.00%	0.36%	0.86%
局部波动模型 (对数正态)	−2.78%	−10.89%	−22.05%	0.00%	−0.18%	−0.91%

来看, 对数正态分布给出的拟合效果好.

5.1.3 大小盘风格的稳健性检验

本小节利用上证 50 指数数据和中证 800 指数数据分别代表大盘风格数据和小盘风格数据对各模型进行稳健性检验 (结果见表 22 和 23). 加和模型的设定与实证检验部分相同.

可以看出, 加和模型在大盘风格数据上比较有优势. 乘积模型对大小盘风格数据的预测效果比较稳定, 没有出现太大差异. 分解优化模型同样表现基本稳定, 但其交易量层面的预测效果在大盘风格数据上稍有优势. 局部波动模型在大小盘风格数据上基本能保持稳定的预测效果, 在大盘风格数据的预测上相对有优势.

5.2 个股层面的稳健性检验

个股层面的稳健性检验主要考察价格波动、交易量波动和行业变化对模型预测效果的影响. 本部分数据的时间跨度均为 2016 年 1 月 4 日至 2018 年 12 月 28 日, 区间长度为 15 分钟, 因熔断、停牌等原因删除某些数据. 对于加和模型, 本文选取上证 50 的成分股作为输入测算公共部分, 因数据长度问题剔除工业富联 (601138.SH)、上海银行 (601229.SH)、三六零 (601360.SH) 和药明康德 (603259.SH) 4 只股票, 数据均来源于 Wind 数据库.

表 22 上证 50 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.68	0.38	0.26	0.17	1.02	3.58
加和模型 (纵向, $r=5$)	−0.44%	−0.73%	−1.84%	0.00%	−0.07%	0.23%
加和模型 (横向, $r=5$)	1.46%	−2.68%	−5.66%	0.00%	−0.01%	0.44%
乘积模型	−32.51%	−37.15%	−63.03%	0.08%	−59.55%	−89.42%
分解优化模型	−12.00%	−14.15%	−28.44%	0.27%	5.97%	13.87%
局部波动模型 (Gamma)	−5.66%	−17.52%	−36.91%	−0.02%	−4.79%	−14.33%
局部波动模型 (Weibull)	−6.28%	−18.54%	−35.42%	−0.06%	−7.14%	−19.34%
局部波动模型 (对数正态)	−6.80%	−19.29%	−36.45%	−0.06%	−6.81%	−21.30%

表 23 中证 800 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	2.57	0.25	0.10	0.17	1.05	4.37
加和模型 (纵向, $r=5$)	0.35%	0.12%	0.33%	0.00%	0.37%	0.38%
加和模型 (横向, $r=5$)	2.94%	4.77%	9.65%	0.00%	−0.70%	−1.28%
乘积模型	−25.89%	−30.19%	−52.64%	0.04%	−57.80%	−84.98%
分解优化模型	−10.83%	−11.78%	−22.07%	0.13%	3.08%	1.85%
局部波动模型 (Gamma)	−1.91%	−8.68%	−18.52%	0.00%	0.05%	−0.10%
局部波动模型 (Weibull)	−2.24%	−9.27%	−19.62%	0.00%	−0.21%	−0.97%
局部波动模型 (对数正态)	−2.54%	−9.41%	−19.60%	0.00%	−0.10%	−1.52%

5.2.1 价格波动的稳健性检验

本文利用价格的方差除以均值作为价格波动的衡量指标, 在上证 50 成分股中选取高价格波动的绿地控股 (600606.SH) 和低价格波动的招商银行 (600036.SH) 作为考察对象, 结果见表 24 和 25. 此处对加和模型列举了预测效果较好的 $r = 40$ 的情形.

从表 24 和 25 中可以看出, 加和模型更适用于高价格波动的绿地控股. 分解优化模型在高价格波动股票 (绿地控股) 上的表现优于低价格波动股票 (招商银行), 且对两只个股的预测效果在交易量层面能战胜历史滚动均值, 但在 VWAP 层面的表现不及历史滚动均值. 乘积模型和局部波动模型在两只股票上的表现均比较稳定, 乘积模型的预测效果依旧优于局部波动模型, 但其具有计算时间较长的劣势. 乘积模型和局部波动模型在两只个股的预测效果上并不存在较大的差异, 因此在价格波动层面均具有稳健性.

5.2.2 交易量波动的稳健性检验

类似地, 本文利用交易量的方差除以均值作为交易量波动的衡量指标, 在上证 50 成分股中选取高交易量波动的贵州茅台 (600519.SH) 和低交易量波动的中国铁建 (601186.SH) 作为考察对象, 结果见表 26 和 27. 加和模型同样选取 $r = 40$ 时的结果.

表 24 绿地控股 (600606.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.02	0.77	1.31	0.17	0.01	5.76E−4
加和模型 (纵向, $r = 40$)	0.00%	−0.01%	−0.02%	0.00%	0.00%	0.00%
加和模型 (横向, $r = 40$)	0.00%	−0.01%	−0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
乘积模型	−26.34%	−35.48%	−60.59%	0.41%	−42.68%	−80.17%
分解优化模型	−11.55%	−24.49%	−47.85%	0.74%	0.06%	1.71%
局部波动模型 (Gamma)	−12.40%	−29.47%	−52.64%	−0.04%	−12.27%	−23.08%
局部波动模型 (Weibull)	−11.87%	−30.40%	−54.75%	−0.06%	−13.78%	−25.16%
局部波动模型 (对数正态)	−14.79%	−30.28%	−54.12%	0.00%	−19.24%	−40.59%

表 25 招商银行 (600036.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.01	0.65	0.93	0.17	0.02	2.48E−4
加和模型 (纵向, $r = 40$)	2.76%	3.79%	8.94%	−0.28%	5.84%	37.72%
加和模型 (横向, $r = 40$)	−0.10%	0.10%	0.04%	−0.01%	1.11%	4.86%
乘积模型	−28.36%	−41.11%	−64.80%	0.19%	−53.64%	−88.52%
分解优化模型	−5.76%	−14.83%	−32.06%	0.31%	1.35%	9.70%
局部波动模型 (Gamma)	−7.28%	−22.79%	−45.04%	−0.16%	−10.31%	−26.04%
局部波动模型 (Weibull)	−8.12%	−23.20%	−44.70%	−0.11%	−11.00%	−15.53%
局部波动模型 (对数正态)	−10.39%	−23.91%	−45.16%	−0.16%	−13.16%	−20.27%

表 26 贵州茅台 (600519.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	10.93	0.60	0.81	0.17	0.55	0.97
加和模型 (纵向, $r=40$)	0.09%	0.14%	0.37%	0.00%	0.04%	0.38%
加和模型 (横向, $r=40$)	−0.03%	−0.04%	−0.05%	0.00%	−0.01%	0.10%
乘积模型	−23.34%	−40.99%	−73.70%	0.48%	−52.75%	−79.78%
分解优化模型	−3.50%	−9.91%	−20.61%	0.28%	−1.39%	−8.13%
局部波动模型 (Gamma)	−5.34%	−21.21%	−39.01%	0.00%	−0.48%	−1.34%
局部波动模型 (Weibull)	−6.11%	−22.03%	−40.80%	0.00%	−1.75%	−4.95%
局部波动模型 (对数正态)	−6.06%	−21.88%	−40.35%	0.00%	−2.07%	−4.96%

表 27 中国铁建 (601186.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.02	0.78	1.31	0.17	0.02	1.01E−3
加和模型 (纵向, $r=40$)	0.14%	0.33%	0.86%	0.00%	0.04%	0.04%
加和模型 (横向, $r=40$)	−0.03%	0.81%	0.11%	0.00%	0.00%	−0.04%
乘积模型	−25.10%	−35.29%	−58.72%	−0.05%	−48.52%	−81.97%
分解优化模型	−9.26%	−33.67%	−43.05%	0.68%	10.18%	10.18%
局部波动模型 (Gamma)	−10.88%	−28.52%	−51.65%	−0.18%	−15.52%	−30.61%
局部波动模型 (Weibull)	−9.57%	−28.46%	−52.14%	−0.16%	−12.13%	−20.04%
局部波动模型 (对数正态)	−14.34%	−29.74%	−53.05%	−0.17%	−18.43%	−37.70%

从表 26 和 27 中可以发现, 相比采用纵向序列, 加和模型更适于用横向序列进行预测. 但即便如此, 其预测结果也仅能与历史滚动均值相当. 分解优化模型更适用于高交易量波动的个股. 在贵州茅台的预测上, 分解优化模型两个层面的预测效果基本强于历史滚动均值; 而在中国铁建的预测上, 其预测结果仅在交易量层面有较大提升. 虽然乘积模型、分解优化模型和局部波动模型的预测效果都比较稳定, 但都对高交易量波动的数据进行预测更具优势, 而局部波动模型同时在低交易量波动的数据表现良好. 因而在对不同交易量波动程度数据的处理上, 局部波动模型具有一定的独特性.

5.2.3 不同行业的稳健性检验

由于不同行业中不同个股的交易情形存在较大差异, 因此本小节在前两小节的基础上选取中国石化 (600028.SH)、中信证券 (600030.SH)、三安光电 (600703.SH) 作为补充. 综合前两小节所选取的个股, 本文选取的个股所涉及的相关行业已遍布周期、消费、成长和金融地产几个板块. 表 28–30 给出 3 只个股的预测结果.

结合前几小节的结果看, 加和模型对个股的预测效果相较对指数的预测效果有所提升, 但其对个股的预测效果在交易量和 VWAP 两个层面均很难明显超越历史滚动均值. 乘积模型的预测效果一直比较稳定, 但其在全部区间的预测效果依赖于数据的量级, 对于量级较大的数据, 其给出的预测较差.

表 28　中国石化 (600028.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.04	0.76	1.39	0.17	0.05	9.81E−5
加和模型 (纵向, $r=40$)	−0.01%	−0.04%	−0.12%	0.00%	0.02%	0.13%
加和模型 (横向, $r=40$)	−0.02%	−0.05%	−0.09%	0.00%	0.03%	0.12%
乘积模型	−27.46%	−38.20%	−66.81%	0.34%	−47.68%	−84.11%
分解优化模型	−7.56%	−18.12%	−38.96%	0.55%	4.56%	9.54%
局部波动模型 (Gamma)	−8.39%	−26.25%	−50.69%	−0.08%	−6.92%	−8.78%
局部波动模型 (Weibull)	−8.62%	−28.34%	−55.13%	−0.09%	−8.62%	−12.61%
局部波动模型 (对数正态)	−9.71%	−26.52%	−51.28%	−0.07%	−14.99%	−43.21%

表 29　中信证券 (600030.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	0.03	0.72	1.08	0.17	0.02	1.43E−3
加和模型 (纵向, $r=40$)	−0.04%	−0.13%	−0.11%	0.00%	−0.01%	−0.06%
加和模型 (横向, $r=40$)	0.00%	0.25%	0.00%	0.00%	−0.01%	−0.04%
乘积模型	−23.45%	−35.68%	−61.25%	0.08%	−61.54%	−85.44%
分解优化模型	−9.13%	−20.82%	−41.02%	0.57%	1.80%	3.03%
局部波动模型 (Gamma)	−10.88%	−28.52%	−51.65%	−0.18%	−15.52%	−30.61%
局部波动模型 (Weibull)	−9.57%	−28.46%	−52.14%	−0.16%	−12.13%	−20.04%
局部波动模型 (对数正态)	−14.34%	−29.74%	−53.05%	−0.17%	−18.43%	−37.70%

表 30　三安光电 (600703.SH) 的稳健性检验结果

度量	交易量层面				VWAP 层面	
	$e_{\mathrm{v}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{Slicing}}^{\mathrm{v}}$	$e_{\mathrm{ab}}^{\mathrm{VWAP}}$	$e_{\mathrm{MSE}}^{\mathrm{VWAP}}$
21 天历史滚动均值	–	0.65	0.91	0.17	0.03	–
加和模型 (纵向, $r=40$)	0.01%	0.00%	−0.02%	0.00%	−0.01%	0.00%
加和模型 (横向, $r=40$)	−0.01%	0.02%	0.03%	0.00%	0.00%	0.00%
乘积模型	−27.78%	−43.23%	−71.85%	0.03%	−56.51%	−85.15%
分解优化模型	−5.36%	−13.02%	−27.70%	0.32%	1.04%	3.99%
局部波动模型 (Gamma)	−6.45%	−25.33%	−45.85%	−0.14%	−17.69%	−36.22%
局部波动模型 (Weibull)	−9.17%	−25.56%	−45.38%	−0.19%	−20.40%	−40.85%
局部波动模型 (对数正态)	−8.66%	−23.04%	−43.12%	−0.17%	−16.88%	−35.14%

分解优化模型的预测效果随个股的变化有所差异, 但总体而言, 相比历史滚动均值, 分解优化模型仍然表现出了在交易量层面的优越性.

局部波动模型的预测效果随个股的变化有一定的差异, 但对所有个股的预测无论在交易量层面还是 VWAP 层面一般均能战胜历史滚动均值. 局部波动模型在交易量层面的效果不会比分解优化模型差很多, 且在某些个股上还能超越分解优化模型给出的结果.

6 结论

本文对加和模型 [3]、乘积模型 [9] 和分解优化模型 [11] 进行了细致的比较并利用中国股票市场的日内交易量数据进行了实证检验. 在此基础上, 提出局部波动模型并利用同样的数据进行了实证检验.

结果表明, 本文提出的局部波动模型在交易量层面和 VWAP 层面的预测效果均能稳定超越基准模型历史滚动均值, 在精度上优于加和模型 (交易量和 VWAP 层面) 和分解优化模型 (交易量层面不明显弱于分解优化模型, VWAP 层面明显优于分解优化模型), 其精度虽不及乘积模型, 但其在运算速度上较乘积模型有大幅提升, 且能够实现动态预测. 局部波动模型的稳健性介于乘积模型和分解优化模型之间, 对处理频率较高的数据、大盘风格数据和低交易量波动数据更具优势.

参考文献

1 Admati A R, Pfleiderer P. A theory of intraday patterns: Volume and price variability. Rev Financ Stud, 1988, 1: 3–40

2 Amihud Y. Illiquidity and stock returns: Cross-section and time-series effects. J Financial Markets, 2002, 5: 31–56

3 Białkowski J, Darolles S, Le Fol G. Improving VWAP strategies: A dynamic volume approach. J Bank Finance, 2008, 32: 1709–1722

4 Funahashi H, Kijima M. An analytical approximation for pricing VWAP options. Quant Finance, 2017, 17: 1119–1133

5 Orchel M. Support vector regression with a priori knowledge used in order execution strategies based on VWAP. In: International Conference on Advanced Data Mining and Applications. Berlin-Heidelberg: Springer, 2011, 318–331

6 Iuhasz G, Tirea M, Negru V. Neural network predictions of stock price fluctuations. In: Proceedings of the 14th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing. Timisoara: IEEE, 2012, 505–512

7 Huptas R. Point and density prediction of intra-day volume using Bayesian linear ACV models: Evidence from the Polish stock market. Quant Finance, 2018, 18: 749–760

8 Lo A W, Wang J. Trading volume: Definitions, data analysis, and implications of portfolio theory. Rev Financ Stud, 2000, 13: 257–300

9 Brownlees C T, Cipollini F, Gallo G M. Intra-daily volume modeling and prediction for algorithmic trading. J Financial Econom, 2011, 9: 489–518

10 Humphery-Jenner M L. Optimal VWAP trading under noisy conditions. J Bank Finance, 2011, 35: 2319–2329

11 Satish V, Saxena A, Palmer M. Predicting intraday trading volumeand volume percentages. JOT, 2014, 9: 15–25

12 Chen R, Feng Y, Palomar D. Forecasting intraday trading volume: A Kalman filter approach. SSRN J, 2018, 1: 16

13 Markov V, Vilenskaia O, Rashkovich V. Quintet volume projection. JOT, 2017, 12: 28–43

14 Liu Q, Gu L. Analysis on the characteristics and amplitude of stock intraday trading data (in Chinese). Statist Res, 2001, 4: 36–42 [刘勤, 顾岚. 股票日内交易数据特征和波幅的分析. 统计研究, 2001, 4: 36–42]

15 Tian X, Shen X. Research on futures intraday price fluctuation based on trading volume and position (in Chinese). Res Economics Manag, 2005, 78–80 [田新民, 沈小刚. 基于交易量和持仓量的期货日内价格波动研究. 经济与管理研究, 2005, 78–80]

16 Li Y. Decomposing and modeling of intraday volume of Chinese stock market based on VWAP benchmarks. J Beijing Institute Technol (Soc Sci Ed), 2008, 10: 41–43, 83 [李晔. 基于 VWAP 基准的中国股市日内交易量的分解与建模研究. 北京理工大学学报 (社会科学版), 2008, 10: 41–43, 83]

17 Zhou R, Chen X. The volume weighted average price strategy based on instantaneous volume and return adjusted dynamically (in Chinese). J Shanghai Jiaotong Univ, 2013, 47: 459–464 [周仁才, 陈晓雯. 基于瞬时交易量及收益率动态调整的交易量加权平均价格策略. 上海交通大学学报 (自然版), 2013, 47: 459–464]

18 Liu X, Lai K K. Intraday volume percentages forecasting using a dynamic SVM-based approach. J Syst Sci Complex, 2017, 30: 421–433

19 Xia H, Yang C. An improved VWAP strategy based on the volume decomposition model (in Chinese). Oper Res Manag Sci, 2017, 26: 146–152 [夏晖, 杨岑. 基于成交量分解模型的改进 VWAP 策略. 运筹与管理, 2017, 26: 146–152]

20 Yao H, Ru S, Zhang W. VWAP algorithm selling strategy based on dynamic trading volume forecast (in Chinese). Oper Res Manag Sci, 2015, 24: 215–220 [姚海博, 茹少峰, 张文明. 基于动态交易量预测的 VWAP 算法交易卖出策略. 运筹与管理, 2015, 24: 215–220]

21 Bai J. Inferential theory for factor models of large dimensions. Econometrica, 2003, 71: 135–171
22 Wooldridge J M. Estimation and inference for dependent processes. Handb Econom, 1994, 4: 2639–2738

A local volatility model for intraday volume prediction and its empirical study

Yixuan Ji, Ziyi Xu & Xue Cheng

Abstract Based on clarifying the theoretical points of three intraday trading volume forecasting models, the additive model, the product model and the decomposition-optimization model, and conducting the empirical tests using intraday volume data from China stock market, a new intraday trading volume prediction model, the so-called local volatility model was proposed. In terms of transaction volume forecasting and VWAP (volume weighted average price) strategy, the local volatility model is more stable than the historical average estimation. Compared to its fast calculation speed and compatibleness with dynamic forecasting, it has satisfactory prediction accuracy. Its robustness lies between the product model and the decomposition-optimization model, which is better than the production model. Moreover, the model excels at large-cap data and the data with high frequency and low transaction volume fluctuation.

Keywords **intraday volume prediction, VWAP strategy, decomposition-combination technique, local volatility**

MSC(2020) **60G25, 62M20, 62P05**

doi: 10.1360/SSM-2020-0315