

海洋中尺度涡旋在陆架上 衰变的解析模式研究

郑全安 袁业立

(国家海洋局第一海洋研究所, 青岛)

摘 要

观测表明, 进入陆架区的海洋中尺度涡旋的运动迅速衰变。这表现为涡旋表面积随时间不断扩展, 而旋转角速度随时间逐渐衰减。本文从垂直层化, 水平均匀的流体涡度方程出发, 对上述过程进行了动力学分析。在考虑上、下边界层 Ekman pump 效应和侧向摩擦条件下, 得出了涡旋表面积扩展和角速度衰减的解析模式。

关键词: 海洋中尺度涡旋, 涡度方程

一、引言

半个世纪前, Iselin 首先发现了海洋中尺度涡旋的存在, 当时认为这是一种大范围的水温异常现象^[1]。经过 10 余年观测与研究, Iselin 于 1948 年证实了这种温度异常水团存在着转动运动, 并使用了“反气旋式涡旋”这一术语^[2]。由于在大洋环流系统与周围海水的能量与质量交换过程中中尺度涡起着重要作用, 因而受到物理海洋学界的高度重视。在整个 70 年代, 中尺度涡是国际物理海洋学界的研究热点之一^[3-9]。海洋的卫星遥感为中尺度涡的连续观测与动态分析提供了大量的图像信息。例如, 通过 NOAA 气象卫星红外谱段图像, 人们看到了中尺度涡的外观全貌, 并发现了中尺度涡在全球海洋中的广泛存在^[10,11,12]。卫星图像的时间系列不但被用于跟踪中尺度的平移运动和测量平移速度^[13], 而且还被用来测量转动角速度及其随时间变化^[13,14]。至于中尺度涡的外观几何形状(如面积、直径或长、短轴等), 在卫星图像上则更容易测得。

然而, 现有的有关中尺度涡的研究工作所涉及的海区, 绝大部分为深海, 尤其集中在湾流两侧。而对中尺度涡在陆架海区的运动情况的观测报告与研究成果并不多见。实际上, 陆架海区也会出现中尺度涡。按其来源可分为二类: 一类是由局地斜压不稳定性产生的^[15]; 另一类是由强海流(如湾流或黑潮)分离出来后, 通过平移运动由深海进入陆架区的。本文将研究后一类中尺度涡离开母体进入陆架后, 在摩擦耗散作用下的衰变过程。

二、尺度分析

我们依据卫星遥感图像对海洋中尺度涡旋在陆架上的运动进行尺度分析。

图 1 为中尺度涡红外图像的一个例子,由 NOAA-7 气象卫星的“高级甚高分辨力辐射计 (AVHRR)”红外谱段于 1983 年 5 月 3 日拍摄。图像中部示出的近圆形中尺度涡为一暖涡,中心位置约为 $39^{\circ}30'N, 144^{\circ}30'E$, 即日本本州岛东北, 北海道以南的黑潮与亲潮汇流区。该暖涡的外径约 150km。

在其他海区发现的中尺度涡外径通常不超过 300 km。因此, 我们取中尺度涡的水平尺度为 200 km, 即

$$L = 0(200\text{ km}) = 0(2 \times 10^7\text{ cm}).$$

陆架区的水深典型值为 500m, 即

$$D = 0(500\text{ m}) = 0(5 \times 10^4\text{ cm}).$$

卫星观测表明, 中尺度涡进入陆架之后, 其旋转运动迅速衰减, 其半衰期 (角速度衰减为初始值一半的时间) 约为 2 d, 即其时间尺度为

$$T = 0(2\text{ d}) = 0(1.8 \times 10^5\text{ s}).$$

卫星遥感和现场直接测量结果都表明, 中尺度涡的旋转角速度为 $5 \times 10^{-6}\text{ s}^{-1}$ 量级, 因此, 其外缘的对流速度应为 50 cm/s, 即其特征速度

$$U = 0(50\text{ cm/s}).$$

对此类海洋现象, 一般地有

$$A_H = 1 \times 10^7\text{ cm}^2/\text{s}, A_V = 5 \times 10^2\text{ cm}^2/\text{s}, f_0 = 10^{-4}/\text{s}.$$

A_H, A_V 分别为水平与垂直湍流粘性系数, f_0 为柯氏参数。

于是, 各动力学参数如下:

$$\epsilon = \frac{U}{f_0 L} = 2.5 \times 10^{-2},$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{f_0 T} = 5.5 \times 10^{-2},$$

$$\delta_1 = \frac{D}{L} = 0.25 \times 10^{-2},$$

$$\delta = \frac{L}{r_0} = 3 \times 10^{-2},$$



图 1 黑潮与亲潮汇流区的一个中尺度暖涡红外图像

其中 r_0 为地球半径(6378 km), 而

$$F = \frac{f_0^2 L^2}{g D} = 8 \times 10^{-2},$$

$$\frac{1}{Re} = \frac{A_H}{UL} = 1 \times 10^{-2},$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{A_V}{2f_0 D^2} \right)^{1/2} = 1.3.$$

三、涡度方程

当考虑侧向摩擦效应时, 垂直层化, 水平方向密度均匀的准地转运动可以用如下涡度方程来描述^[16]:

$$\frac{d_0}{dt} (\Delta\phi + \beta y) - \frac{1}{Re} \Delta^2 \phi = w_1(z=1) - w_1(z=0), \quad (1)$$

式中

$$\frac{d_0}{dt} \equiv \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\Delta\phi = \zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_0.$$

在我们考虑的中尺度涡运动的时间尺度内, 可以认为运动过程是绝热的, 即温度场的变化可以忽略; 同时假设海面风应力和压力的作用可以忽略, 在这种情况下, 边界条件简化为

$$w_1(z=1) = F \frac{d_0 \phi}{dt},$$

$$w_1(z=0) = \frac{d_0 \eta_B}{dt} + \frac{\gamma}{2} \Delta\phi,$$

将上式代入(1)式得

$$\frac{d_0}{dt} (\Delta\phi + \beta y) - \frac{1}{Re} \Delta^2 \phi = F \frac{d_0 \phi}{dt} - \frac{d_0 \eta_B}{dt} - \frac{\gamma}{2} \Delta\phi,$$

即

$$\frac{d_0}{dt} (\Delta\phi - F\phi + \beta y + \eta_B) + \frac{\gamma}{2} \Delta\phi - \frac{1}{Re} \Delta^2 \phi = 0, \quad (2)$$

其中

$$\gamma = \frac{E_V^{1/2}}{\varepsilon}.$$

对本文考虑的陆架中尺度涡的衰变问题, 我们有如下条件可用于简化方程(2):

1. 由尺度分析知, $F = 8 \times 10^{-2} \ll 1$, 因此, 方程(2)中的 F 项为小量。

2. 由尺度分析知, $\varepsilon_1 \gg \varepsilon$, 于是

$$\frac{d_0}{dt} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \approx \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t}.$$

3. 中尺度涡在特征时间尺度内, 通常纬向平移运动的范围不大, 因而可不计 β 效应。即方程(2)中的 β 项可忽略。

4. 中尺度涡的水平尺度和特征时间尺度内的平移距离与海底地形变化相比, 可以认为海底近似水平。为简化讨论, 不计海底地形变化的影响, 因而方程(2)中的 η_B 项可以略去。

于是, 我们有方程(2)的简化形式

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi) + \frac{r}{2} \Delta \phi - \frac{1}{Re} \Delta^2 \phi = 0. \quad (3)$$

这样, 讨论中尺度涡在陆架上的衰变问题, 可归结为求解如下定值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi) + A(\Delta \phi) - B(\Delta^2 \phi) = 0, \\ \Delta \phi|_{t=0} = f(r), \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$A = \frac{\varepsilon r}{2\varepsilon_1}, \quad B = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 Re}.$$

下面我们来求解该方程。

假定解是轴对称的, 则(4)式可化简为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \phi) + A(\Delta \phi) - B \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \Delta \phi \right) = 0, \\ \Delta \phi|_{t=0} = f(r). \end{cases} \quad (5)$$

设方程(5)的解具有如下形式:

$$\Delta \phi = e^{-At} \phi(r, t), \quad (6)$$

则 $\phi(r, t)$ 应满足如下方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - B \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0, \\ \phi(r, t=0) = f(r). \end{cases} \quad (7)$$

显然

$$uD e^{-u^2 B t} J_0(ur)$$

是方程(7)在 $r = 0$ 和 $r \rightarrow \infty$ 时有有限值的解。更一般地, $\phi(r, t)$ 可写成

$$\phi(r, t) = \int_0^\infty u D(u) e^{-u^2 B t} J_0(ur) du,$$

其中待定系数 $D(u)$ 可由初始条件

$$f(r) = \int_0^\infty u D(u) J_0(ur) du$$

确定。这一关系式恰与 Fourier-Bessel 变换一致。即

$$\begin{aligned} f_H(u) &= \int_0^\infty x f(x) J_p(ux) dx, \\ f(x) &= \int_0^\infty u f_H(u) \cdot J_p(ux) du, \quad (0 < x, u < \infty). \end{aligned}$$

因此, 待定系数

$$D(u) = \int_0^\infty \xi f(\xi) J_0(u\xi) d\xi.$$

于是方程(6)的解可以写成

$$\begin{aligned}\phi(r, t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty u \xi f(\xi) J_0(u\xi) J_0(ur) e^{-u^2 Bt} du d\xi \\ &= \int_0^\infty \xi f(\xi) d\xi \int_0^\infty u J_0(u\xi) J_0(ur) e^{-u^2 Bt} du.\end{aligned}$$

注意到积分关系^[17]

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty e^{-p^2 t^2} J_\nu(at) J_\nu(bt) t dt \\ &= \frac{1}{2p^2} \exp\left\{-\frac{a^2 + b^2}{4}\right\} I_\nu\left(\frac{ab}{2p^2}\right) \\ &\cdot \left[\operatorname{Re}(\nu) > -1, |\arg p| < \frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

其中 I_ν 为 ν 阶第一类变形 Bessel 函数。

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty u J_0(u\xi) J_0(ur) e^{-u^2 Bt} du \\ &= \frac{1}{2Bt} \exp\left\{-\frac{\xi^2 + r^2}{4Bt}\right\} I_0\left(\frac{\xi r}{2Bt}\right),\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\phi(r, t) &= \int_0^\infty \xi f(\xi) \frac{1}{2Bt} \exp\left\{-\frac{\xi^2 + r^2}{4Bt}\right\} I_0\left(\frac{\xi r}{2Bt}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{2Bt} \exp\left\{-\frac{r^2}{4Bt}\right\} \int_0^\infty \xi f(\xi) \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4Bt}\right\} I_0\left(\frac{\xi r}{2Bt}\right) d\xi,\end{aligned}$$

将 $\phi(r, t)$ 代入(6)式, 得方程(5)的解为

$$\Delta\phi = \frac{1}{2Bt} \exp\left\{-\left(At + \frac{r^2}{4Bt}\right)\right\} \int_0^\infty \xi f(\xi) \exp\left\{-\frac{\xi^2}{4Bt}\right\} I_0\left(\frac{\xi r}{2Bt}\right) d\xi. \quad (8)$$

(8)式即为中尺度涡度随时间衰变的理论模式, 其中积分部分由初始条件 $f(\xi)$ 确定。从该式出发, 可以对衰变过程中的各种表现进行理论分析与解译。

四、涡度方程解的应用

如前所述, (8)式是中尺度涡在陆架上的衰变过程满足前述各项假定条件的理论表达。从数学上来说, 只要初始条件 $f(\xi)$ 给定, 则 $\Delta\phi$ 唯一被确定。但是, 只有在 $f(\xi)$ 的函数形式很特殊的情况下, (8)式的定积分才能给出解析结果。

为了直观地说明涡度方程解的意义, 我们假定 $f(\xi)$ 具有简单的、物理意义明确的函数形式, 并且使(8)式中的定积分给出解析表达。

首先, 我们考虑最简单的情况, 即

$$f(\xi) = 0.$$

也就是在初始时刻, 中尺度涡不存在旋转运动。由(8)式我们得出

$$\Delta\phi(r, t) \equiv 0.$$

这就是说, 单靠摩擦作用不会使本来不转的中尺度涡旋转起来。

然后, 我们考虑另一种简单情况:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi r_0} \delta(\xi - r_0),$$

这种情况的物理含义是在初始时刻, 只有在中度涡外缘(即 $\xi = r_0$) 存在一环状转动运动。此时, 由(8)式可以得出

$$\Delta\phi = \frac{1}{4\pi Bt} \exp \left\{ - \left(At + \frac{r^2 + r_0^2}{4Bt} \right) \right\} I_0 \left(\frac{r_0 r}{2Bt} \right), \quad (9)$$

式中

$$A = \frac{\varepsilon r}{2\varepsilon_1} = \frac{Ev^{1/2}}{2\varepsilon_1} = \frac{T}{2\tau},$$

其中

$$\tau = \frac{D}{(2Av_0)^{1/2}}$$

为 Spin-up 时间尺度。而

$$B = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1 \text{Re}} = \frac{UT}{L} \cdot \frac{1}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{UL}{A_H},$$

即 A, B 二个参数分别与 A_v 和 A_H 有关。

下面我们从(9)式出发, 来探讨中尺度涡在衰变过程的某些表现。

1. 表面积的扩展

中尺度涡的表面积定义为外缘(即是速度边界也是温度边界)包括的面积。从涡度角度来看, 外缘所在位置正是涡度变化最大的位置。假定中尺度涡为圆形, 那么由涡度变化最大的半径(外缘)随时间的变化即可推出其表面积扩展过程。

由(9)式知, 涡度变化最大的半径应满足

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\Delta\phi) = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[\exp \left\{ - \frac{r^2 + r_0^2}{4Bt} \right\} I_0 \left(\frac{r_0 r}{2Bt} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

注意到第一类变形 Bessel 函数的性质:

$$I'_0(z) = I_1(z),$$

$$I'_v(z) = I_{v-1}(z) - \frac{v}{2} I_v(z).$$

由(10)式得

$$\begin{aligned} & I_0 \left(\frac{r_0 r}{2Bt} \right) \left[\frac{r^2}{2Bt} - 1 \right] - I_1 \left(\frac{r_0 r}{2Bt} \right) \left(2 \frac{r_0 r}{2Bt} \right) \\ & + \frac{r_0^2}{2Bt} \left[I_0 \left(\frac{r_0 r}{2Bt} \right) - \frac{1}{\frac{r_0 r}{2Bt}} I_0 \left(\frac{r_0 r}{2Bt} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

第一类变形 Bessel 函数近似式为

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ -\frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} \right.$$

$$-\frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \}, \quad \left(|\arg z| < \frac{\pi}{2} \right).$$

其中

$$\mu = 4\nu^2.$$

将 $I_0(z)$ 和 $I_1(z)$ 的一级近似式代入 (11) 式得

$$r^2 = r_0^2 + (8r_0^2 B t)^{1/2}.$$

对圆形中尺度涡, 则其表面积 A 与半径 r 有如下关系:

$$A = \pi r^2.$$

于是, 我们有 $A = A_0 + (8\pi A_0 B t)^{1/2}$, 即

$$A = A_0 + 2U(2\pi A_0 A_H t_*)^{1/2}, \quad (12)$$

其中 t_* 为有量纲时间.

从 (12) 式可以看出, 中尺度涡表面积的扩展主要取决于水平湍流粘性系数 A_H .

2. 涡度的衰减

(1) 任一半径上的涡度衰减 由 (9) 式可直接得出涡度 $\Delta\phi$ 在任一半径 r_a 上的衰减过程, 即

$$\Delta\phi(r_a, t) = \frac{1}{4\pi B t} \exp \left\{ - \left(At + \frac{r_a^2 + r_0^2}{4Bt} \right) \right\} I_0 \left(\frac{r_0 r_a}{2Bt} \right), \quad (13)$$

式中 r_0 表征涡度为极大值的半径.

如前所述, 应用 $I_0(z)$ 的大数近似得

$$\Delta\phi(r_a, t) = \frac{1}{4\pi^{3/2} (r_0 r_a B t)^{1/2}} \exp \left\{ - \left[At + \frac{(r_a - r_0)^2}{4Bt} \right] \right\}. \quad (14)$$

(14) 式表明, r_a 处的涡度随时间大致呈指数形式衰减.

(2) 初始最大涡度圆上的涡度衰减 最大涡度圆即为满足圆

$$\frac{\partial}{\partial r} (\Delta\phi) = 0.$$

此时有

$$\Delta\phi(r_0, t) = \frac{1}{4\pi^{3/2} r_0 (B t)^{1/2}} \exp \left\{ - \left(A + \frac{B}{4r_0^2} \right) t \right\}, \quad (15)$$

由上式可知, $\Delta\phi(r_0, t)$ 也呈指数衰减.

五、讨 论

本文在对陆架中尺度涡衰变过程进行动力学分析时, 采用了如下假设:

(1) 在涡度方程建立中, 以垂直层化、水平方向密度均匀的准地转运动流体为模型, 考虑了侧向摩擦效应, 而忽略了温度场变化、海面风应力和压力的作用.

(2) 为了得出涡度方程解的解析形式, 以便对中尺度涡衰变过程中的典型表现进行物理机制探讨, 我们假设初始条件为

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi r_0} \delta(\xi - r_0).$$

即涡度只在中尺度涡外缘存在. 由此, 导出了中尺度涡度表面积扩展模式 [即 (12) 式] 和涡度

衰减模式[即(14)与(15)式].

由上述理论抽象得出的结果,是否具有典型性?对此,我们以测量数据与理论结果进行了对比,结果如下:

1. 关于表面积扩展

我们收集了湾流北侧中尺度涡表面积随时间扩展的测量结果.这些测量数据与本文导出的解析模式[(12)式]的对比见图2.

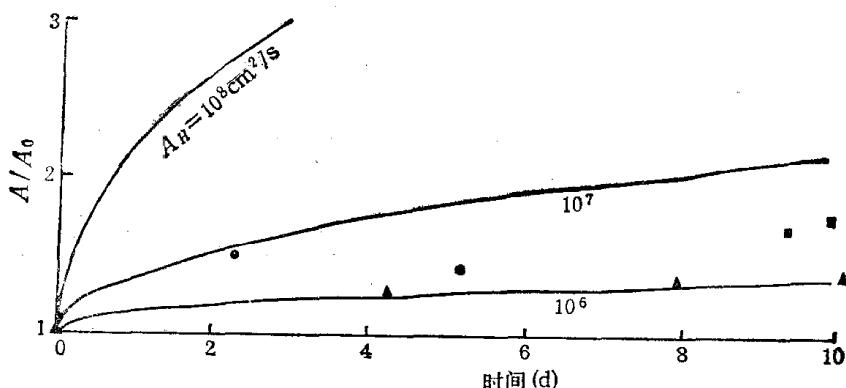


图 2 中尺度涡表面积扩展理论模式与测量数据的对比

(数据点系对湾流北侧三个中尺度暖涡(分别出现于 1978.5, 1980.4 和 1982.3)的测量结果)

从图2可以看出,测量数据点的变化趋势与理论曲线一致,并且均落在 A_H 为 10^6 和 10^7 cm^2/s 两曲线之间.这说明,理论模式可以概括实际例子的变化过程.

2. 关于涡度衰减

对中尺度涡而言,涡度与旋转角速度有相同物理意义.因此,我们用角速度的测量结果与涡度衰减理论模式进行对比.其中测量数据是对1979年5月下旬出现在东海陆架上的中尺度暖涡 ESE 795 的测量结果.该暖涡是从黑潮北侧分离产生的,外观呈椭圆形,长轴约 130 km, 短轴 90 km, 观测时的中心位置在 $30.5^\circ\text{N}, 129^\circ\text{E}$. 暖涡的角速度用 GMS 静止气象卫星图像的时间系列求得.测量结果与解析模式[本文(15)式]的对比见图3.

图3中标有 $\alpha = 1$ 的两条曲线是按(15)式绘出的,它们分别代表 A_H 为 10^6 和 $10^7 \text{cm}^2/\text{s}$.可以看出,这两条曲线的变化趋势与测量数据是一致的,但定量地说,它们之间不够吻合.理论曲线衰减过快.这说明,本文在动力分析中采用的模式,特别是导出(15)式时采用的初始条件表达不能精确地概括这一实际例子,但它们之间相差不大.

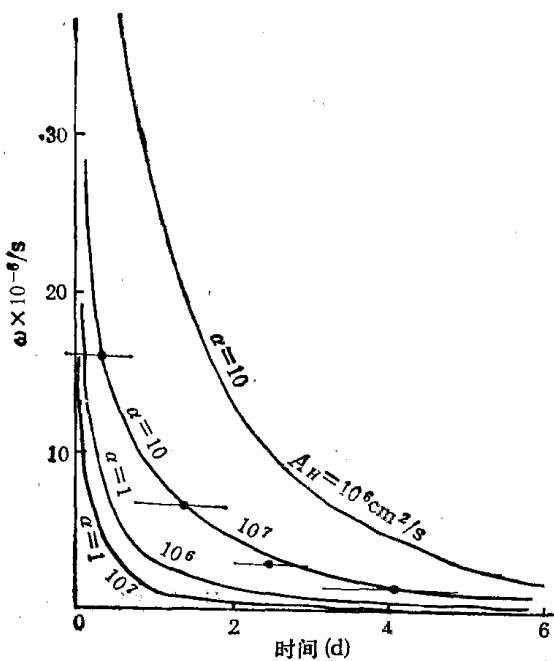


图 3 中尺度涡涡度衰减理论模式与测量数据的对比

(数据点系对东海陆架中尺度涡 ESE795 的测量结果)

模式,特别是导出(15)式时采用的初始条件表达不能精确地概括这一实际例子,但它们之间相差不大.

为了弥补理论模式的缺欠，我们引入了一个参数 α ，对原模式进行线性校正，此时涡度衰减的量纲形式为

$$\Delta\phi(r_0, t) = \frac{\alpha U/L}{4\pi^{3/2}(Bt)^{1/2}} \exp \left\{ - \left(A + \frac{B}{4r_0^2} \right) t \right\}. \quad (16)$$

当 $\alpha = 1$ 时，即为原模式。我们将 $\alpha = 10$ 的两条曲线（对应于 A_H 为 10^6 和 $10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$ ）也绘在图 3 中。可以看出 $\alpha = 10$, $A_H = 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$ 的一条曲线与测量结果完全吻合。

这说明，本文导出的中尺度涡涡度衰减解析模式 [(15) 式]，概括了实际过程的主要趋势，只要进行简单修正便可与测量数据吻合。

本工作是在导师毛汉礼研究员指导下进行的。苏纪兰教授、周晓平教授、冯士筰教授、方国洪教授、陈则实研究员和张庆华副研究员曾给予热诚帮助与指正。潘增弟、陈晓红、纪育强、于衍桂和吴伟同志在打字与绘图等方面给予大力支持。作者在此深表谢意！

参 考 文 献

- [1] Isetin, C. O., D., *PaP. Phys. Oceanogr. Meteor.*, 4(1936), 4: 1—101.
- [2] Iselin, C. O., D., *J. Marine Res.*, 7(1948), 317—327.
- [3] Parker, C. E., *Deep-Sea Res.*, 18(1971), 981—993.
- [4] Gotthardt, G. A. and Potocsky, C. J., *J. of Phys. Oceanography*, 4(1974), 131—134.
- [5] Schmitz, J. E. and Vastano, A. C., *ibid.*, 5(1975), 93—97.
- [6] Cheney, R. E. and Richardson, P. L., *Deep-See Res.*, 23(1976), 143—155.
- [7] Nilson, C. S., *J. of Phys. Oceanography*, 7(1977), 659—669.
- [8] Hagan, D. E. et al., *ibid.*, 8(1978), 6: 977—1008.
- [9] Ssandy, G. T., *J. G. R.*, 84(1979), C2: 771—780.
- [10] 郑全安, 海洋学报, 1(1979), 2: 342—357.
- [11] Stumpf, H. G. and Legeckis, R. V., *J. of Phys. Oceanography*, 7(1977), 648—658.
- [12] The Ring Group, *Science*, 212(1981), 1091—1100.
- [13] Spence, T. W. and Legeckis, R., *J. G. R.*, 86(1986), C3 1945—1953.
- [14] Zheng, Q. A., Klemas, V. and Huang, N. E., *Remote Sensing of Environment*, 15(1984), 135—153.
- [15] Thomson, R. E., *J. of Phys. Oceanography*, 14(1984), 1326—1348.
- [16] Pedlosky, J., *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1979, 314—329.
- [17] Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1979, 528.