

裂缝的张开位移和应变的关系

齐景泰* 蔡树棠

(国家物资总局)(中国科技大学近代力学系)

摘 要

本文采用 Kármán-钱^[1]处理亚音速流动方法的精神,处理了弹塑性断裂力学问题。通过建立的“双弹性”模型,从理论上得到了裂缝端部的张开位移和应变的方程组。实例计算结果表明,理论值全部落在实验结果的分散带内。文中并从理论上解释了实验结果与材料的性质及实验条件的关系。本文的结果不仅为宽板实验所证实,也被文献[2]的实验所证实。同时也表明,公式(37)用于工程,能够分析压力容器上应变裂缝的容许极限。

一、引 言

从断裂安全的要求出发,在压力容器的设计、选材及构件的验收中,需要有一个能够正确确定压力容器上,应变裂缝的最大容许极限的方法,即给出压力容器上,裂缝端部的张开位移和应变的关系,或无量纲张开位移和应变比的关系。有关这类问题的研究,由于实际工程的迫切需要,早已引起人们的注意,文献[3-5]分别提出过经验公式。

$$\Phi = \varepsilon / \varepsilon_s \quad (1)$$

$$\Phi = \varepsilon / \varepsilon_s - 0.25 \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{K} \varepsilon / \varepsilon_s \quad (3)$$

其中 ε ——应变, ε_s ——屈服应变, K ——系数。实际表明,这些公式所算得的结果与宽板实验的结果相差很远。正因与实验差异太大,又缺乏理论根据,所以多年来,人们(包括 Wells 和 Burdekin 等人)就试图从理论上得到一个接近宽板实验结果的关系式。

我们采用 Kármán-钱^[1]处理亚音速流动方法的精神来处理这类问题。所讨论的模型,是无限薄板,板中央有穿透型长度为 $2a$ 的裂缝。板在均匀拉应力 σ_0 的作用下,裂缝的尖端出现塑性区,在塑性区以外仍是弹性区。我们研究这种模型的裂缝端部 δ - ε 的关系,主要方法如下:

1. 我们先解决裂缝外围弹性区内的应力分布。原因是,宽板实验的形变测量,或压力容器上的应变测量,都不是测量裂缝上的应变(实际上也不可能测量裂缝上的应变),而是在离开裂缝足够远的地方测量。

2. 我们认为,试件或压力容器受力后裂缝的长度,已不是原来的长度,而是把塑性区域的长度加在原裂缝上,就是把塑性区看成是裂缝的扩展部分。

3. 由于裂缝长度增加,则裂缝上原来的张力就太小了,因为在扩展长度内,原承受着一部

本文 1978 年 6 月 13 日收到。

* 原在甘肃省天水长城电阻器厂工作。

分张应力。考虑到材料的硬化特性,我们假定,这个张应力就是材料的拉伸极限 σ_b , 并把 σ_b 以某种方式分摊到整个裂缝上。弥补张应力太小的缺陷。显然,这样得到的应力分布,对于离裂缝较远的弹性区是接近实际的。于是,就可以利用现成的裂缝应力分布的公式。

4. 裂缝附近的应力分布,是我们研究的重点。由于小应力状态下,塑性区的范围较小,因此,我们把应力的表达式向塑性区解析延拓过去。不会引起太大的误差。我们认为,可以适用于除原裂缝端点以外的整个塑性区。于是,再把整个塑性区看成是另一种材料的弹性体。这样就消除了用裂缝代替塑性区而产生的不连续问题。最后,求出塑性区的位移和应变的关系式。

5. 在推导塑性区方程的过程中,用到等效弹性模量 $E_i = \sigma_i / \varepsilon_i$; 这个量可以从简单拉伸的应力应变曲线上得到,即在屈服点和断裂点之间用直线的平均斜率代替。

6. 在计算塑性区的 δ - ε 的关系时,需要知道塑性区域的大小,所以要导出开始屈服那一点的坐标 B (或 b/a) 与应力强度 $\frac{\sigma_i}{\sigma_0}$ 之间的关系式。

二、裂缝的张开位移和应变的基本方程

1. 模型

我们所讨论的模型,如图 1。板中央开有一穿透型,长度为 $2a$ 的裂缝,研究板在单向拉应力 σ_0 作用下,裂缝端部的 δ 和 ε 的关系。

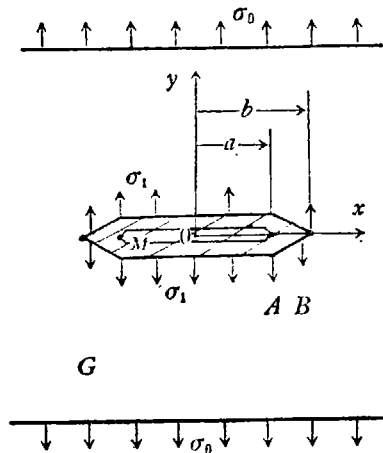


图 1

坐标按图 1 所示。当应力很小时 ($\frac{\sigma_i}{\sigma_0} > 5$), 裂缝两端

尚未达到屈服,仍属于弹性范围,它的解也很容易写出。当应力较高时,裂缝两端出现塑性区,在塑性区的 x 轴上,沿 y 轴方向有一定大小的拉应力。我们把它分摊到整个裂缝上,就是把塑性区和原裂缝看成作用有拉应力 σ_i 的“弹性体” M 。这个“弹性体”与周围的弹性体 G 的边界条件是:

在边界 C 上 $\sigma = \sigma_i$ 。 (4)

因为模型是一薄板,所以在平面应力下,板上沿 y 轴方向作用的均匀拉应力为 σ_0 。当 $\frac{\sigma_i}{\sigma_0} > 1.15$, 表明板在 σ_0 作用下,

没有大范围的屈服。我们已假定,板是由两种材料组成的,于是,按受力情况把板划分两个区域,一个是,包括裂缝及塑性区的区域 M (见图 1 中的阴影部分),另一个是除 M 区外的弹性区域 G 。各区应当满足的关系式如下:

1) G 区域内应满足的关系式。由弹性理论知,应力应变关系为:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial W_y}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial W_x}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

当引入应力函数, 代入协调方程, 有

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (6)$$

(6) 式的解为:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= U(x, y) + iV(x, y) = \frac{\sigma_0 z}{(z^2 - a^2)^{1/2}}, \\ \phi'(z) &= -\frac{\sigma_0 z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

2) M 区域内应满足的关系式

这里 $\nu = \frac{1}{2}$, 引入 $E_i = \frac{\sigma_i}{\epsilon_i}$, 此区域内的应力应变关系为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{1}{E_i} \left(\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y \right), \\ \epsilon_y &= \frac{\partial W_y}{\partial y} = \frac{1}{E_i} \left(\sigma_y - \frac{1}{2} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial W_x}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial x} \right) = \frac{3}{E_i} \tau_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2}, \\ \epsilon_i &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_x - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + \frac{3}{2} \gamma_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

比较关系式 (5) 和 (8) 可见, 其差别只是 E 和 E_i 不同. 若同样引用应力函数, 并代入协调方程, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\frac{1}{E_i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{1}{E_i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(-\frac{3}{E_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

只要 E_i 随着坐标的变化缓慢, (10) 式又回到 (6) 式的形式. 这说明在塑性区域里, 只要 E_i 随坐标的变化比较缓慢, 其应力分布所要满足的方程式和弹性区域是相似的. 因此, 我们把弹性区的应力表达式解析地延拓到塑性区域内, 于是, 板内的应力分量可写成:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= U - y \frac{\partial V}{\partial x} - \sigma_0, \quad \sigma_y = U + y \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \tau_{xy} &= -y \frac{\partial U}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这样做的结果, 其力学性质除原裂缝外, 都被满足.

2. 塑性区域的确定

有了关系式 (11), 就可确定塑性范围的部位.

1) 在 $y = 0$, $-a \leq x < a$ 的线段上, 因 $U = 0$, $V = -\frac{\sigma_0 x}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$; $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial x} =$

$-\frac{a'\sigma_0}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. 代入(11)及(9)式,有

$$\sigma_i = \sigma_0 < \sigma_s. \quad (12)$$

可见,这里是弹性区.

2) 在 $x=0$ 的线段上,因

$$U = \frac{y\sigma_0}{(y^2+a^2)^{1/2}}, V=0, \frac{\partial U}{\partial x}=0, \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{a'\sigma_0}{(y^2+a^2)^{3/2}}.$$

令 $y/a = p$, 代入(11)及(9)式,有

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{6p^2}{p^6+4+3p^4} + 2 + \frac{2p^2}{p^2+1} - \frac{6p}{(p^2+1)^{3/2}} - \frac{2p}{(p^2+1)^{1/2}}}.$$

无论 p 是大于 1 或小于 1, 都有

$$\sigma_i = \frac{\sigma_0}{2} < \sigma_0 < \sigma_s, \quad (13)$$

此处仍是弹性区.

3) 在 $y=0$, $|x| \geq a+\rho$ 处, 因为

$$U = \frac{\sigma_0 x}{(x^2-a^2)^{1/2}}, V=0, \frac{\partial V}{\partial x}=0, \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{a'\sigma_0}{(x^2-a^2)^{3/2}}.$$

代入(11)及(9)式, 又因 $|x| = a+\rho$, 已知 $\rho/a \ll 1$, 经整理有

$$\sigma_i = \sigma_0 \sqrt{1 + \sqrt{\frac{a}{2\rho}} \left(\sqrt{\frac{a}{2\rho}} - 1 \right)} > 4\sigma_0. \quad (14)$$

这里的 ρ 为裂缝端点的曲率半径, $a+\rho$ 表示离开端点以外的部位. 因为 $\frac{a}{\rho} > 50^{11}$, 我们所研究的应力 σ_0 是在 $4 \geq \frac{\sigma_s}{\sigma_0} \geq 1.15$ 的范围内, 就有

$$\sigma_i > \sigma_s, \quad (14)'$$

显然, 这里是塑性区.

以上分析得知, 在裂缝端部 $|x| \geq a+\rho$ 处是塑性区, 但是我们关心的是开始屈服点 B 的坐标. 显见, 如果 σ_0 不是很小时, 开始屈服的点 B , 一定离裂缝端点比较远. 具体计算将在下面讨论.

3. 基本方程

已知 $y=0$, $|x| \geq a+\rho$ 区域已进入塑性状态, 这里的 $\nu = \frac{1}{2}$. 根据本文模型, 当塑

性区形成后, 在区域内就有一拉应力 σ_1 作用于裂缝上, 考虑到材料的硬化特性, σ_1 是用 σ_b 分摊在裂缝上的值来代替, 由于引进 σ_1 , 就应当对方程(11)进行修正. 在裂缝上附加 σ_1 后, 应力表达式为:

1) 见陈饶等“切口宽度与断裂韧性”一文.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[U - y \frac{\partial V}{\partial x} \right] - (\sigma_0 - \sigma_1), \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[U + y \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \sigma_1, \quad \tau_{xy} = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left(-y \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

代入(8)式,有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_x}{\partial x} &= \frac{1}{E_i} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[\frac{1}{2} U - \sigma_0 - \frac{3}{2} y \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_1} \right], \\ W_x &= \frac{1}{E_i} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[\frac{1}{2} \int U dx - \sigma_0 x - \frac{3}{2} y V - \frac{1}{2} \frac{\sigma_1 \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_1} x \right] + f(y), \\ \frac{\partial W_x}{\partial y} &= \frac{1}{E_i} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[\frac{1}{2} \int \frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{3}{2} V - \frac{3}{2} y \frac{\partial V}{\partial y} \right] + f'(y), \\ \frac{\partial W_y}{\partial y} &= \frac{1}{E_i} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[\frac{1}{2} U + \frac{3}{2} y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma_0 + \frac{\sigma_1 \sigma_0}{\sigma_0 - \sigma_1} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

因 $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, 将(16)式代入 $\frac{\partial W_x}{\partial y} + \frac{\partial W_y}{\partial x} = \frac{3}{E_i} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left(-y \frac{\partial V}{\partial x} \right)$. 经整理,得到位移 W_y 为:

$$W_y = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0} \left[\frac{2}{E_i} \int V dx - \frac{3}{2E_i} y U \right] - f'(y)x + F(y), \quad (17)$$

在 $y = 0$ 处的位移,因 $U = 0$, $V = -\frac{\sigma_0 x}{(b^2 - x^2)^{1/2}}$, 故为:

$$W_y = \frac{2}{E_i} (\sigma_0 - \sigma_1) \sqrt{b^2 - x^2}, \quad (18)$$

应变为

$$\varepsilon = \frac{1}{2E_i} (\sigma_0 + \sigma_1). \quad (19)$$

最后,得到裂缝端点 $x = a$ 处的张开位移

$$\delta = 2W_y = 8a\varepsilon \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \left(\frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \right), \quad (20)$$

或无量纲张开位移为:

$$\Phi = \frac{\delta}{2\pi a \varepsilon_s} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}. \quad (21)$$

4. 关于 E_i 与 δ 的关系

E_i 的定义为:

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}. \quad (22)$$

一般说, E_i 在塑性区并非常数。在开始屈服点 B 处, $E_i(B) = E$ 。在裂缝端点 A 处, E_i 值由 A 点的 $\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}$ 确定。(21)式是在下述假设下得到的。当塑性区范围不太大时 $\left(\frac{b}{a} < 1.5 \right)$, 在塑性段内应力和应变成线性关系, 即: E_i 随坐标的变化很缓慢。(21)式中的 ε 是 E_i 的函数, 同时塑性区域 $\left(\frac{b}{a} \right)$ 也与 E_i 有关。因此, 在为(21)式选取应变 ε 时, 必须考虑到 E_i 的影响。 E_i 可

通过材料的 $\frac{\sigma_i}{\sigma_s} \sim \frac{\epsilon_i}{\epsilon_s}$ 拉伸曲线的塑性阶段来确定,如图 2 所示,可写成:

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_s} = \left(\frac{\epsilon_i}{\epsilon_s} \right)^n. \quad (23)$$

对于一般的低中强度钢,它的 n 值大约在 0.1—0.2 范围. 改写 (23) 式,

$$\frac{\epsilon_i}{\sigma_i} = \frac{\epsilon_s}{\sigma_s} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_s} \right)^{\frac{1}{n}-1}. \quad (24)$$

假定裂缝已由 A 点扩展到 B 点 (图 1). 由于裂缝是沿着最大主应力方向扩展的,所以说,沿扩展方向的应力已达到 σ_b , 故 $\sigma_i = \sigma_b$. 又因刚开始屈服有 $\sigma_s = E\epsilon_s$, 于是就有关系

$$\frac{1}{E_i} = \frac{1}{E} \left[\frac{\sigma_b}{\sigma_s} \right]^{\frac{1}{n}-1}. \quad (25)$$

(25) 式给出了 $E_i = \varphi(E, \sigma_b, \sigma_s)$ 间的关系. 这里用到 $\frac{\sigma_b}{\sigma_s}$, 这个比值与应力状态无关, 只与材料的应力应变曲线的形状有关, 可由简单拉伸实验确定. 对于低强度钢 (软钢) 大约在 2.4 以内, 对于中强度钢大约在 1.8 以内, 一般说不小于 1.3.

有了关系式 (25), 再考察 (19) 式, 得到塑性区的应变表达式:

$$\epsilon = \frac{1}{2E} \left[\frac{\sigma_b}{\sigma_s} \right]^{\frac{1}{n}-1} (\sigma_0 + \sigma_1), \quad (26)$$

用屈服应变 $\epsilon_s = \sigma_s/E$ 除上式, 又得到

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \frac{1}{2\sigma_s} \left[\frac{\sigma_b}{\sigma_s} \right]^{\frac{1}{n}-1} (\sigma_0 + \sigma_1). \quad (27)$$

方程 (27) 表明, 对于塑性状态裂缝张开位移的计算, 其应变比 $\frac{\epsilon}{\epsilon_s}$ 的值不能任意选取, 它不仅与材料有关, 也与裂缝的几何尺寸及作用应力等有关. 这一问题, 文献 [3—5] 给出的公式中, 都无法反映出来.

5. 关于 σ_1 的确定

σ_1 是定义为作用在等效裂缝上的应力. 我们知道, 裂缝的张开主要是由绕着等效裂缝端

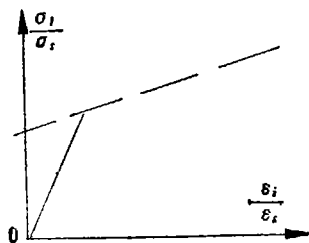


图 2

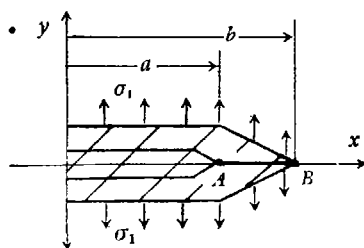


图 3

点 B 的力矩起作用 (图 3). 根据定义, σ_1 为整个裂缝上的应力, 因已假定, 从裂缝端部 B 到原裂缝的端点 A 之间是裂缝的扩展段. 考虑到金属变形过程的硬化特征, 用 $\sigma_b = \alpha\sigma_s$ 代替沿裂缝扩展方向的应力, 这里的 α 称为材料的硬化系数. 以 B 点为参考点, 它的力矩平衡关系为:

$$p = \sigma_1 \int_0^b x dx = \alpha\sigma_s \int_0^{b-a} x dx. \quad (28)$$

令 $m = \frac{\sigma_t}{\sigma_0}$, 积分 (28) 式得到 σ_1 的表达式为:

$$\sigma_1 = \alpha \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2 m \sigma_0 \quad (29)$$

关于金属材料的硬化问题, 文献 [5, 6, 7] 都讨论过, 实践证明, 研究金属材料的断裂问题, 不考虑它的硬化特性是不符合实际的. 所谓硬化, 是指变形从开始屈服后, 材料进入塑性变形直至断裂为止, 这个过程中应力还在不断增加 (见图 4), 取塑性变形应力增加过程引伸硬化系数 α 为:

$$\alpha = \left[\frac{\varepsilon_p E_i}{\sigma_s} \right]^n, \quad (30)$$

其中 ε_p 是对应于应力达到最大值 σ_p 时的应变.

关于硬化指数 n , 文献 [6] 根据实验给出的 $n = \phi(\sigma_s)$ 曲线, 我们整理成表 1.

由 (29) 式可见, σ_1 不仅与塑性区域的大小有关, 而且与材料的力学性质及韧带尺度有关.

关于 α 的值, 文献 [6, 7, 11] 都指出, 对于中低强度钢, 大约在 2 左右. 许多实验使用的材料, 其 α 值均在 $1.3 \leq \alpha \leq 2.4$ 之间. 宽板实验用的材料是硅正火镇静软钢, α 值在 $1.5 \leq \alpha \leq 2.2$ 范围. 实际表明 α 值的影响必须考虑, 否则张开位移 δ 将偏大, 对中低强度钢, δ 的偏差更大 [6, 7]. 这一点可从本文的结果中看到.

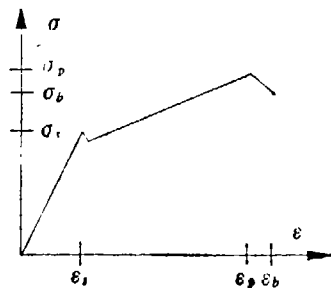


图 4

表 1

n	0.1	0.111	0.125	0.143	0.167	0.2	0.22
σ_s	110—170	100—160	80—150	60—110	50—95	25—70	—50

6. 关于塑性区域 $\frac{a}{b}$ 的计算

从方程 (21) 和 (29) 可见, 当计算 σ_1 或 Φ 时, 必须事先给出 $\frac{a}{b}$ 的值. 另外, 在讨论 E_i 时也提到过, 当塑性区不太大时 ($\frac{b}{a} < 1.5$) 才得到 (21) 式. 因此, 需要给出 $\frac{a}{b}$ 的表达式. 已知在 $y = 0$, $|x| \geq a + \rho$ 的塑性区里的应力表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0 x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - \left(\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right) \sigma_1 - \sigma_0, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_0 x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - \left(\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right) \sigma_1, \quad \tau_{xy} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

为了书写方便, 令

$$\sigma = \frac{\sigma_0 x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - \left(\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right) \sigma_1,$$

于是 (31) 式又可写成:

$$\sigma_x = \sigma - \sigma_0; \quad \sigma_y = \sigma, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (9) 式第一式, 得到

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma^2 - \sigma\sigma_0}. \quad (32)$$

又令 $\sigma = \sigma_0\beta_k$, 即得

$$\beta_k = \frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - \left(\frac{x}{(x^2 - a^2)^{1/2}} - 1 \right) \frac{\sigma_1}{\sigma_0}. \quad (33)$$

当出现塑性区时, 开始屈服的点 x 处的应力 σ_i 已达到全面屈服状态, 即 $\sigma_i = \sigma_s$, 将 $\sigma = \sigma_0\beta_k$ 代入 (32) 式, 有

$$\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0} \right)^2 = 1 + \beta_k^2 - \beta_k. \quad (34)$$

由 (34) 式解出

$$\beta_k = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0} \right)^2 - 0.75}. \quad (35)$$

若开始屈服的点在 B 处, 此点以外仍为弹性区, 将 $x=b$ 代入 (33) 式, 就得到塑性区域的方程:

$$\beta_k = \frac{b}{(b^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{a^2}{(b^2 - a^2)^{1/2}(b + \sqrt{b^2 - a^2})} \frac{\sigma_1}{\sigma_0}. \quad (35)$$

令 $\frac{a}{b} = t$, 将 (29) 式的 σ_1 代入 (35) 式, 由 (33)' 及 (35) 式就得到屈服点 $\frac{a}{b}$ 的方程为:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}(1+\sqrt{1-t^2})} [1 + \sqrt{1-t^2} - t^2(1-t)^2\alpha m] - \frac{1}{2} - \sqrt{m^2 - 0.75} = 0. \quad (36)$$

方程 (36) 的解, 可用数值解法, 已知 $0.5 < t < 1$ 和 $4 \geq m \geq 1.15$. 所以, 很容易求得对应于某一 m 值的 t 值. 取 $\alpha = 1, 1.5, 2, 2.5$, 计算结果列入表 2 中.

表 2 $t = f(\alpha, m)$

$\alpha \backslash m$	4	3.5	3	2.5	2	1.75	1.5	1.30	1.25	1.20
1	0.9739	0.9666	0.9555	0.9365	0.9030	0.873	0.818	0.750	0.723	0.687
1.5	0.9740	0.9667	0.9557	0.9370	0.9045	0.876	0.824	0.757	0.731	0.698
2	0.9741	0.9668	0.9558	0.9385	0.9060	0.878	0.830	0.764	0.739	0.708
2.5	0.9742	0.9669	0.9559	0.9388	0.9060	0.880	0.834	0.770	0.746	0.717

表 2 中的 t 值表明, 当 $1.2 \leq m \leq 4$ 时, 塑性区域 $\frac{b}{a}$ 均小于 1.5. 满足了假定塑性区不太大的条件.

7. 应变比 $\frac{\epsilon}{\epsilon_s}$ 的计算

有了 $t = f(\alpha, m)$ 的结果, 就可以用 (27) 式计算 $\frac{\epsilon}{\epsilon_s}$, 将 (29) 式代入 (27) 式, 有

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_s} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_b}{\sigma_s} \right]^{\frac{1}{n}-1} \left[\frac{1}{m} + (1-t)^2\alpha \right]. \quad (27)'$$

下面是应用(27)式做的一些计算,为了与宽板实验结果比较,因为宽板实验的资料中只有 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 小于等于4的结果,所以本算例中只做了 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} < 5$ 的部分。另外,由于中低强度钢的 $\frac{\sigma_b}{\sigma_s}$ 是在2.1以内,宽板实验用的材料, $\frac{\sigma_b}{\sigma_s}$ 值在1.5—2.0之间,所以,在计算中取 $\frac{\sigma_b}{\sigma_s}$ 由2.1起每间隔0.1取一值,直至1.2为止。取硬化指数 $n = 0.2, 0.167, 0.143, 0.125, 0.111, 0.1$, 算出每一 n 和 $\frac{\sigma_b}{\sigma_s}$ 所对应于一组 m 的 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 值¹⁾。计算的结果表明,对同一 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$, 可以出现在几种不同的状态中。如 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} = 3.3$, 在 $n = 0.2, \frac{\sigma_b}{\sigma_s} = 1.9, m = 2$ 中出现,而在 $n = 0.147, \frac{\sigma_b}{\sigma_s} = 1.4, m = 1.5$ 中,也出现 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} = 3.3$ 。象这样的情况还可列举很多。它说明,不同的材料在不同的应力 σ_0 作用下,有相同的 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$, 另外,相同的材料在相同的外力作用下,由于裂缝几何尺寸的不同, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 也不同。因此,在计算裂缝张开位移时, $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 的值不能任意选用,也不能用 $\Phi = f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)$ 这种简单关系,应当根据材料的力学性能和受力状态,韧带尺度等因素,通过(27)'式确定。

8. 裂缝端部的张开位移和应变的方程

将(29)式代入(21)式,利用(36)和(27)式的关系,就得到塑性区裂缝端点的张开位移和应变的关系式

$$\Phi = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \left\{ \frac{1}{\alpha} - \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2 \cdot m \right\} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \quad (37)$$

到此,得到了方程(37), (36), (27)'及辅助方程(30)。我们就可以通过计算分析给出应变区裂缝的容许极限。在检验压力容器时,应变比 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 常常是由实地测量给出。在这种情况下,有关参数 $E, \sigma_s, \varepsilon_b, \sigma_b, \sigma_0, a, \sigma_p$ 都是已知的,根据表1查得对应的 n 值,按(30)式求出 α 值,由(36)式求出 $\frac{a}{b}$,最后通过(37)式得到了对应于 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 的 Φ 值。应当指出,本文提供的方法,包括 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 值在内均可通过计算得到。

三、理论与实验结果的比较

1. 同宽板实验比较 ($\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 是由实测得到)

本文从理论上提出了弹塑性体裂缝端点的张开位移和应变的关系式(37)。为验证理论的正确程度,把它同宽板实验结果相比较。为此,应用理论公式(37), (36), 对文献[8—10]的宽板实验进行了算例。结果列于图5。图5中同时列出了文献[8—10]的实验结果,还列出

1) 篇幅所限,略去数值表。

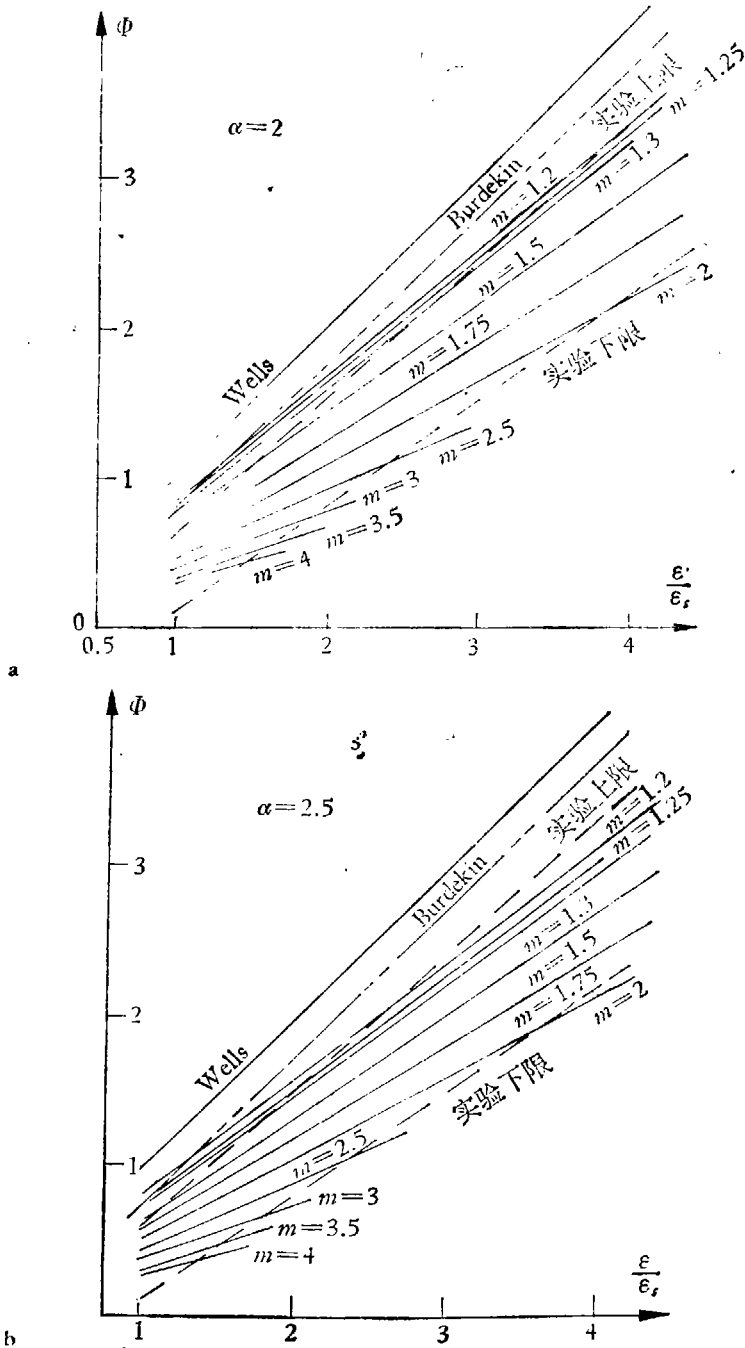


图 5

了按照 Burdekin 等人的公式 (1) — (3) 计算的结果。

宽板实验使用的钢材, 是含 0.15% C, 1.15% Mn, 0.15% Si 的硅正火镇静软钢^[8-9]。这种钢的 $\sigma_s \leq 50$ 公斤/毫米², 它的 n 值由表 1 查得在 0.167—0.23 之间, Rice^[7] 和陈旒^[6] 等人认为, 这种钢的 α 值在 1.5—2.4 之间, Rice 的计算结果 $\alpha = 2.03$, 我们取这种钢的典型参数 $E = 2 \times 10^4$ 公斤/毫米², $\epsilon_s = 33\%$, $\sigma_s = 30$ 公斤/毫米², $\sigma_b = 45$ 公斤/毫米², 对 $n = 0.167$ 和 $n = 0.2$ 都

做了计算, 得到 $\alpha = 1.8$ 和 $\alpha = 2.13$ 。这个结果与 Rice 及陈镜的结果是一致的。我们取 $\alpha = 1, 1.5, 2, 2.5$, 每种情况下的各种 m 值进行了计算, 结果列于图 5 中。由图 5 可清楚看到, 对于 $\alpha = 2$ 和 2.5 这两种材料, 理论值完全落在宽板实验结果的分散带内, 并且分布的形式也与实验结果一致。

2. 同宽板实验比较 ($\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 是通过 (27)' 式计算的)

有了公式 (37), (36), (27)', 我们也可以不通过实地测量 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}$ 的办法, 直接从理论上计算构件裂缝端点的张开位移。从而减少费用很大的实验。我们选用文献 [8—10] 中给出的宽板实验所用的六种试件做为算例, 这六种试件的材料是相同的, 只是裂缝的切口方式, 长度 $2a$ 及加载大小不同, 由于实验是控制着应变 ε_p 。于是, 韧带参数的影响都包含在作用应力 σ_0 内, 计算的结果列入图 6 中。图中只取 $n = 0.167$ 时的 $\varepsilon/\varepsilon_s$ 的结果, 显见, 两者是一致的。

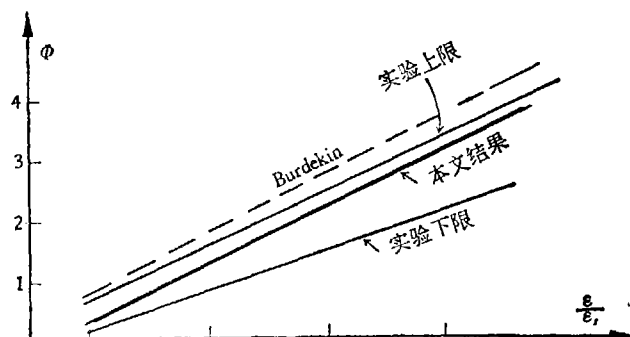


图 6

3. 结果分析

分析图 5 中有关 $\alpha = 2$ 的结果, 显然, 宽板实验结果的上限对应着 $m \leq 1.2$, 实验结果的下限。当应变比 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \leq 4$ 时对应着 $m \leq 2$, 当 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \leq 2.5$ 时, 对应于 $m \leq 2.5$, 当 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \leq 2$ 时, 对应于 $m \leq 3$, 当 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \leq 1.7$ 时, 对应于 $m \leq 3.5$, 当 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \leq 1.5$ 时对应于 $m \leq 4$, 当 $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \leq 1.3$ 时, 对应于 $m \geq 4$ 。可见分散带中间对应的应力强度 $\frac{\sigma_s}{\sigma_0}$ 在 1.2—5 之间, 由文献 [10] 的图 1 已知, 由于裂缝长度 a 的改变, 对相同变形来说应力 σ_0 是不同的。所以说, 受力状态对同一材料的试件而言, 由于韧带尺度 $\frac{a}{W}$ 的不同而异, 因此, 分散带内的结果是表示着不同韧带尺度的影响。

已知 Wells 等人的宽板实验使用的试件, 材料是相同的, 板宽均为 915 毫米, 而裂缝的半长 a 是在 13 毫米—229 毫米之间。即 $\frac{a}{W}$ 在 $\frac{1}{90} - \frac{1}{4}$ 之间变化。所以, 实验结果分散在一个范围内。

因 $m = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}$, 当我们引用断裂韧度因子 K_{Ic} 时, 有 $\sigma_0 = K_{Ic} \frac{1}{\sqrt{a}}$; 于是得到 $m = \left(\frac{\sigma_s}{K_{Ic}} \right) \sqrt{a}$ 。

对于同一材料的各试件, 它们的 σ_s 为常数, K_{Ic} 的变化也不大, 一般在 5% 以内. 将宽板实验试件的裂缝最大半长 $a_{\max}$ 及最小半长 $a_{\min}$ 的值代入 $m = \left(\frac{\sigma_s}{K_{Ic}} \right) \sqrt{a}$. 有 $\frac{m_{\max}}{m_{\min}} = \frac{15}{3.61} \approx 4$. 由此可见, 宽板实验的上限与宽板实验的下限, 其 m 值相差 4 倍. 在本文中最小 $m = 1.15$, 最大 $m = 4$, 由图 5 可见, 当 $m > 2.5$ 后都是在小应变中出现. 这个结果说明, 当裂缝较长、塑性区很小时就发生了韧带屈服.

由图 5 可见, Burdekin 的公式, 是由实验结果归纳的一种经验公式, 实验结果又是在宽板裂缝长度 a 很小的情况下得到的, 相当于 $m < 1.3$. 由此可见, 他的公式是有条件的, 不是在任意宽板裂缝几何尺寸下都适用. 本文的这个结论也被文献 [12] 的实验结果证实了.

四、结 语

本文从理论上提出的 $\Phi = f\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}, m, t, \alpha\right)$ 关系式, 经过用宽板实验的结果验证, 不仅理论结果与实验结果相当一致, 而且又能圆满地解释实验结果的物理力学性质和实验条件.

Wells 等人的公式 (1), (2), (3), 都是 $\delta = F\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s}\right)$ 的简单关系, 但是, 几乎所有的实验都证明了, 裂缝的张开位移并非唯一取决于应变. 另外, 用 Wells 等人的公式算出的结果都偏离实验结果很远. 应强调指出, 工程中的条件性是很重要的因素, 不考虑条件随意使用 Burdekin 等人的公式, 肯定说是不适宜的.

最后指出, 应用本文提出的理论公式, 可以不用或少做实验, 直接用公式 (37), (36), (27) 计算构件在已知受力状态、裂缝尺寸及材料的力学性能下的 Φ 值. 从而为构件的设计、选材及检验等方面提供了依据.

参 考 文 献

- [1] Tsien, H. S., *Jour. of the Aero. Sci.*, **6**(1936); Kármán, Th. Van., *ibid.*, **8**(1941), 337.
- [2] 蔡其巩, 金属学报, **13** (1977), 4. 1.
- [3] Wells, A. A., *British Welding Jour.*, **10**(1963), 563, **13**(1965), 2, **16**(1968), 221.
- [4] Burdekin, F. M., et al., *Conf. Pract. Appl. Fracture Mechanics to Pressure-Vessel Technology*, 1971, 28.
- [5] 蔡其巩, 金属学报, **12** (1976), 1.
- [6] 陈旂等, 金属学报, **11** (1975), **13** (1977), 3.
- [7] Rice, J. R., *Proc. 3-rd International Conf Fract*, 1973.
- [8] Wells, A. A., et al., *British Welding Jour.*, **12**(1965), 145.
- [9] Burdekin, F. M., et al., *Jour. Strain Analysis*, **1**(1966).
- [10] Egan, G. R., *Second International Conference on Pressure Vessel Technology*, Pt II, 1973, 1037.
- [11] 力学参考资料(一)断裂力学, 科技文献出版社重庆分社, 1975.