中国科学 A辑: 数学 2009 年 第 39 卷 第 2 期: 247～256
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE IN CHINA PRESS

微积分基础的新视角

张景中 ①②③, 冯勇 ①*

① 成都电子科技大学计算机推理与可信计算实验室, 成都 610054
② 广州大学计算机与教育软件学院, 广州 510006
③ 华中师范大学教育信息技术工程研究中心, 武汉 430079
* E-mail: yongfeng@casit.ac.cn

收稿日期: 2008-01-28; 接受日期: 2008-09-11
国家重点基础研究发展规划基金 (批准号: 2004CB318003) 和中国科学院知识创新基金 (批准号: KJCX2-YW-S02) 资助项目

摘要 微积分是大学数学教学的难点, 也是数学机械化研究的重点. 如能将其初等化, 不仅能解决微积分学教学的难点, 同时也能为微积分学的机械化研究提供另一条切实可行的途径. 目前国内外学者在微积分初等化方面做了一些工作, 但他们所给出的微分与积分定义中的不等式都来源于极限定义所采用的不等式. 本文提出了一个函数差商是另一个函数的中值的概念, 这个概念刻画了原函数与导数的本质特征. 在此基础上, 得到了强可导和一致可导的充分必要条件并给出了积分系统更直观的定义. 由此, 简单完整地建立起了基于初等数学的微积分系统, 为微积分系统机械化作了必要的准备; 另外, 本文的结果也显示了微积分学中许多常用定理的成立不依赖于实数理论的建立.

关键词 微积分初等化 数学机械化 导数 积分

MSC(2000) 主题分类 97-02, 49-02, 44A45

1 引言

从 Newton 和 Leibniz 时代算起, 微积分学已有三百多年的历史. 这段精彩的历史可见文献 [1]. 百余年来, 大学数学教材里一直是按照那时形成的理论讲授微积分的基础内容.

微积分的严格化基于所谓 $\varepsilon-\delta$ 语言的极限概念的引进. 而这样表述的极限概念已经成为初学者学习高等数学之路上的一道关卡. 如何使微积分入门教学变得容易, 是国际数学教育领域的百年难题. 张景中在文献 [2] 中提出了一种 "非 ε 语言的极限概念", 以克服微积分入门教学的困难. 目前已有 3 种教材 [3−5] 采用了文献 [2] 中的方法, 并在教学实践中取得很好的效果 [6]. 但是, 文献 [2] 中仅仅是对极限概念给出一种新的表述方法, 即用一个简单的不等式刻画极限过程, 并没有实现微积分的初等化.

近年来, 林群致力于微积分初等化的努力引人注目 [7−9]. 他发现 (参考文献 [7] 第 32 页), 采用 "一致微商" 的定义可以大大简化微积分基本定理的论证. 把 "一致微商" 的思想和文

献 [2] 中以不等式刻画极限过程的思路结合起来, 就是林群在文献 [10] 所提出的微积分的初等化的方案.

张景中在文献 [11] 中, 用与文献 [12] 不同的方式实现了微分学的初等化. 后来在文献 [13] 中, 又采用公理化的方法实现了定积分的初等化, 从而完整地建立起了基于初等数学的微分系统和积分系统.

本文提出了一个函数的差商是另一个函数的中值的概念, 它刻画了原函数和导函数的本质特征. 在这个概念的基础上, 探索出了最直观的积分系统的定义, 并得到了强可导和一致可导的充分必要条件. 由此, 简单完整地建立起了基于初等数学的微积分系统, 为微积分系统机械化作了必要的准备. 另一方面, 在传统的微积分中, 很多定理的证明要用中值定理, 例如, 导数正则函数增, Taylor 公式等, 而中值定理的证明要用实数理论. 那么, 这些定理的成立是不是依赖实数理论? 本文的结果澄清了这些问题: 它们不依赖实数理论.

2 导数和定积分的初等定义

本节介绍文献 [11, 13] 中所给出的导数和积分系统及其相关的定义.

定义 2.1 (函数的一致连续) 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 若对于 $\forall x \in [a,b]$ 和任意的 h, 均有下列不等式成立:

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant d(|h|), \tag{1}$$

其中, $d(h)$ 为在 $(0,A]$ 上与点 x 无关的正值单调不减函数, 并且倒数无界. 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

定义 2.2 (一致可导) 设函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 如果存在一个在 $[a,b]$ 上有定义的函数 $f(x)$ 和正数 M, 使得对 $[a,b]$ 上任意的 x 和 $x+h$, 有下列不等式:

$$|F(x+h)-F(x)-f(x)h| \leqslant M|h|d(|h|), \tag{2}$$

其中, $d(h)$ 为在 $(0,b-a]$ 上与点 x 无关的正值单调不减函数, 并且倒数无界. 则称 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, 并且称 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数, 记作 $F'(x)=f(x)$.

在定义 2.2 中取 $d(x)=x$, 则就是强可导的定义, 可见强可导蕴含一致可导, 且导数相同. 利用以上的定义, 容易证明:

定理 2.1 设 $F(x)$, $G(x)$ 一致 (强) 可导, 并且导数分别是 $f(x)$ 和 $g(x)$, 则

(1) 对任意常数 c, $cF(x)$ 一致 (强) 可导, 且其导数是 $cf(x)$;

(2) $F(x)+G(x)$ 一致 (强) 可导, 且其导数为 $f(x)+g(x)$;

(3) $F(cx+d)$ 一致 (强) 可导, 且其导数是 $cf(cx+d)$.

关于积分系统有如下定义:

定义 2.3 (积分系统) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义; 如果有一个二元函数 $S(u,v)$ $(u\in[a,b], v\in[a,b])$, 满足

(I) 可加性: 对 $[a,b]$ 上任意的 w_1,w_2,w_3, 有 $S(w_1,w_2)+S(w_2,w_3)=S(w_1,w_3)$;

(II) 非负性: 在 $[a,b]$ 的任意子区间 $[w_1,w_2]$ 上, 如果 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 就必然有 $m(w_2-w_1) \leqslant S(w_1,w_2) \leqslant M(w_2-w_1)$;

则称 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个积分系统. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的积分系统 $S(u,v)$, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并称数值 $S(w_1,w_2)$ 为 $f(x)$ 在 $[w_1,w_2]$ 上的定积分, 记作

$S(w_1, w_2) = \int_{w_1}^{w_2} f(x)dx$. 表达式中的 $f(x)$ 称为被积函数, x 称为积分变量, w_1 和 w_2 分别称为积分的下限和上限; 用不同于 w_1, w_2 的其他字母 (如 t) 来代替 x 时, $S(w_1, w_2)$ 数值不变.

上述两个定义都没有用到极限概念, 比传统教材上的导数和 Riemann 积分的定义简明得多, 以此为基础建立起来的微积分学也很容易被学生接受和掌握.

注意在定义 2.3 中, 积分系统要满足的非负性是一个非严格的不等式. 但按照通常定积分的几何意义就是曲线与坐标轴所围成的面积, 当然面积满足严格不等式. 所谓严格不等式就是

定义 2.4 (积分严格不等式) 设 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个积分系统, 在任意的子区间 $[w_1, w_2] \subseteq [a,b]$ 上, 如果 $m < f(x) < M$, 就必有 $m(w_2 - w_1) < S(w_1, w_2) < M(w_2 - w_1)$, 则称积分系统 $S(u,v)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足积分严格不等式.

我们不禁要问, 按照定义 2.3 的积分系统是否一定满足积分严格不等式呢? 回答是否定的. 一个反例就是在区间 $[1,2]$ 上, 定义如下函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为无理数;} \\ \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n}, \text{ 其中 } m, n \text{ 为互素的正整数.} \end{cases}$$

在 $[1,2]$ 上定义二元函数: $S(u,v) = 0$. 可以验证该二元函数满足定义 2.3 中的条件 (I) 和 (II), 因此它是函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的积分系统, 但该积分系统不满足积分严格不等式: 即在 $[1,2]$ 上, 虽然 $0 < f(x)$ 成立, 但是 $S(u,v) = 0$.

对定义 2.3 进一步研究可知, 若 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个积分系统, 令 $G(x) := S(a,x)$, 由于它满足可加性, 所以 $S(u,v)$ 可以写成如下的等价形式:

$$S(u,v) = S(a,v) - S(a,u) = G(v) - G(u).$$

在文献 [13] 中, 估值定理的证明要求 $f(x)$ 一致连续, 本文证明: 如果积分系统满足积分严格不等式, 则可以得到估值定理.

定义 2.2 (估值定理) 假设 $S(x,y) = G(y) - G(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 定义的积分系统, 并且满足积分严格不等式. 则对于任意的子区间 $[u,v] \subseteq [a,b]$, 都存在 $x_1, x_2 \in [u,v]$ 使得下式成立:

$$f(x_1)(v-u) \leqslant G(v) - G(u) \leqslant f(x_2)(v-u). \tag{3}$$

证明 用反证法证明定理. 假设不存在 $x_1 \in [u,v]$, 使得不等式 $f(x_1)(v-u) \leqslant G(v) - G(u)$ 成立, 这意味着对任意的 $x \in [u,v]$, 恒有

$$f(x) > \frac{G(v) - G(u)}{v-u}. \tag{4}$$

将区间 $[u,v]$ 等分成 2 段, 中点记为 w. 由积分系统 $S(u,v)$ 满足积分严格不等式可知:

$$G(w) - G(u) > \frac{1}{2}(G(v) - G(u)),$$
$$G(v) - G(w) > \frac{1}{2}(G(v) - G(u)).$$

将上两式相加可得:

$$G(v) - G(u) > G(v) - G(u).$$

矛盾, 即证明了在区间 $[u,v]$ 上, 不可能恒有不等式 (4) 成立, 从而证明了存在 $x_1 \in [u,v]$, 使得不等式 (3) 成立. 同理可证存在 $x_2 \in [u,v]$, 使得不等式 $G(v) - G(u) \leqslant f(x_2)(v-u)$ 成立. 定理证毕.

3 积分与微分的新视角

首先回顾高等数学中的定积分. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数, 如图 1 所示. $f(x)$ 在 $[u,v]$ 上积分的几何意义就是 $f(x)$、x 轴, 直线 $x=u$、$x=v$ 所围的面积. 若记 $[a,x]$ 上曲边梯形面积为 $F(x)$, 则在 $[u,v]$ 上这块面积为 $F(v)-F(u)$. 如果把这块面积去高补低折合成长为 $v-u$ 的矩形, 则矩形的高应当在 $[u,v]$ 上的某两个变量值对应的 $f(x)$ 的值之间. 也就是说, 存在 $[u,v]$ 上的点 p 和 q, 使得下面的不等式成立:

$$f(p) \leqslant \frac{F(v)-F(u)}{v-u} \leqslant f(q). \tag{5}$$

接下来再看一看高等数学中定义的导数. 设函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 如图 2 所示, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 任意点的导数, 其几何意义就是函数在这一点的切线的斜率, 对区间 $[a,b]$ 上任意两点 u,v, 过 $(u,F(u)),(v,F(v))$ 的割线的斜率一定介于区间 $[u,v]$ 上的某两点 p,q 的切线斜率之间. 同样地, 若将导数看成是物体在某一时刻的速度, 则物体在时间段 $[u,v]$ 内有快有慢, 但在这一段的平均速度一定介于某两个时刻的速度之间. 即, 一定存在某个时刻 p 的速度不大于其平均速度, 也一定存在某个时刻 q 的速度不小于其平均速度. 写成数学表达式仍为不等式 (5).

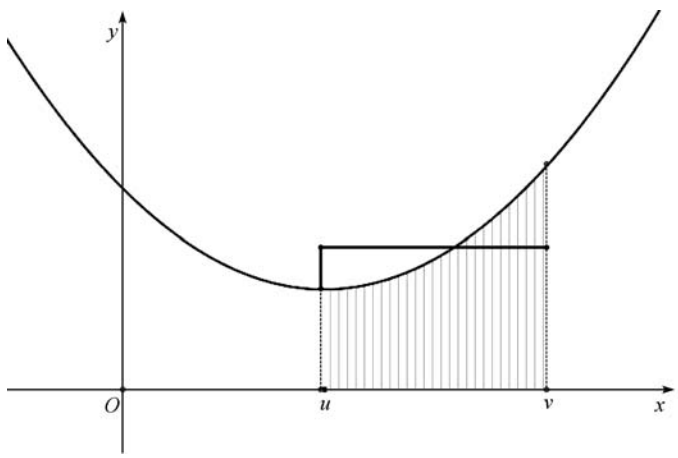

图 1 积分的几何意义

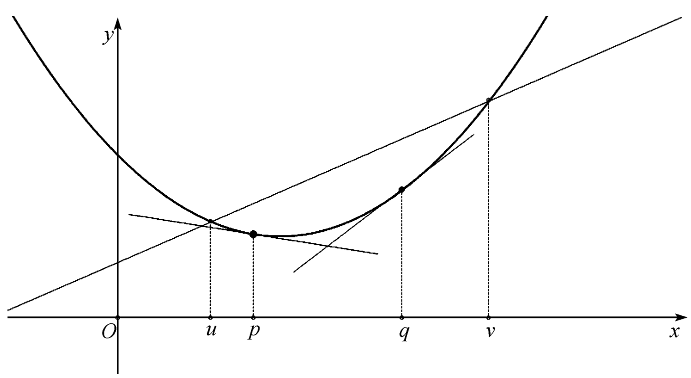

图 2 割线与切线

根据以上的分析, 关系式 (5) 反映了导数和积分的本质特征, 为方便引入以下定义.

定义 3.1 设 $F(x)$ 和 $f(x)$ 为在 $[a,b]$ 上定义的两个函数, 对任意区间 $[u,v]\subseteq[a,b]$ 均存在 $p\in[u,v]$ 和 $q\in[u,v]$ 满足不等式 (5). 则称 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值.

若 $f(x)$ 的差商是 $g(x)$ 的中值, 求导数和求积分的问题实际上就是知道了一个函数, 求另一个函数的问题.

有了以上的定义, 下面用一个函数的差商是另一个函数的中值来刻画积分和微分. 首先有如下定理:

定理 3.1 设 $S(u,v)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分系统, 并且满足积分严格不等式. 在 $[a,b]$ 上取一点 c, 令 $F(x)=S(c,x)$, 则在 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值; 反之, 若在 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 令 $S(u,v)=F(v)-F(u)$, 则 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个积分系统, 并且满足积分严格不等式.

证明 由估值定理 2.2, 可知定理的前半部分正确. 关于定理后半部分的证明, 只需注意到 $S(u,v)=F(v)-F(u)$ 满足可加性, 以及在 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值蕴含了 $S(u,v)$ 的非负性, 且满足严格的不等式. 于是就完成了证明.

在定义 2.3 中, 积分系统不一定满足积分严格不等式, 但常用的积分系统都满足积分严格不等式. 如果我们只对满足积分严格不等式的积分系统感兴趣, 由定理 3.1 知, 可用下面更直观的定义来代替以前所给出的积分系统的定义:

定义 3.2 (积分系统和定积分) 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 如果存在一个二元函数 $S(x,y),x\in[a,b],y\in[a,b]$, 满足

(I) 可加性: 对 $[a,b]$ 上任意的 u,v,w 有 $S(u,v)+S(v,w)=S(u,w)$;

(II) 中值性: 对 $[a,b]$ 上任意的 $u<v$, 在 $[u,v]$ 上必有两点 p 和 q, 使得

$$f(p)(v-u)\leqslant S(u,v)\leqslant f(q)(v-u);$$

则称 $S(x,y)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个积分系统. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一的积分系统 $S(x,y)$, 则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 并称数值 $S(u,v)$ 是 $f(x)$ 在 $[u,v]$ 上的定积分, 记作 $S(u,v)=\int_u^v f(x)dx$, 表达式中的 $f(x)$ 称为被积函数, x 为积分变量, u 和 v 分别为积分的下限和上限. 用不同于 u,v 的其他字母 (如 t) 来代替 x 时, $S(u,v)$ 数值不变.

以下来探讨 $f(x)$ 在什么条件下, 它存在唯一积分系统, 该积分系统就是它的定积分.

定理 3.2 设在 $[a,b]$ 上, $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 且 $f(x)$ 一致连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有唯一积分系统 $S(x,y)=F(y)-F(x)$, 其中 $x,y\in[a,b]$.

证明 (反证法) 假设存在 $G(x)$ 满足关系式 (5) 和 $u,v\in[a,b]$, 使得 $G(v)-G(u)\neq F(v)-F(u)$. 即有常数 $c>0$, 使得 $c=|G(v)-G(u)-F(v)+F(u)|>0$. 将 $[u,v]$ n 等分, 令 $h=(v-u)/n$, 等分点分别记为 $u=x_0,x_1,\dots,x_n=v$. 对于任意等分点 x_i, 由公式 (5) 可得:

$$f(\xi_1^i)h\leqslant F(x_i+h)-F(x_i)\leqslant f(\xi_2^i)h,$$

$$f(\eta_1^i)h\leqslant G(x_i+h)-G(x_i)\leqslant f(\eta_2^i)h,$$

其中 $\xi_1^i,\xi_2^i,\eta_1^i,\eta_2^i\in[x_i,x_i+h]$. 从而有

$$h\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_1^i)\leqslant F(v)-F(u)\leqslant h\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_2^i),\tag{6}$$

$$h\sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_1^i) \leqslant G(v)-G(u) \leqslant h\sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_2^i). \tag{7}$$

这样, 我们推导出

$$h\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_1^i)-f(\eta_2^i)) \leqslant F(v)-F(u)-G(v)+G(u) \leqslant h\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_2^i)-f(\eta_1^i)).$$

因而下式成立:

$$\begin{aligned} c &= |F(v)-F(u)-G(v)+G(u)| \\ &\leqslant \max\left\{\left|h\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_1^i)-f(\eta_2^i))\right|, \left|h\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_2^i)-f(\eta_1^i))\right|\right\}. \end{aligned}$$

注意到公式 (1) 可得:

$$\begin{aligned} \left|h\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_1^i)-f(\eta_2^i))\right| &\leqslant h\sum_{i=0}^{n-1}(|f(\xi_1^i)-f(\eta_2^i)|) \leqslant h\sum_{i=0}^{n-1}(d(|\eta_2^i-\xi_1^i|)) \\ &\leqslant h\sum_{i=0}^{n-1} d(h) = hnd(h) = (v-u)d(h), \\ \left|h\sum_{i=0}^{n-1}(f(\xi_2^i)-f(\eta_1^i))\right| &\leqslant h\sum_{i=0}^{n-1}(|f(\xi_2^i)-f(\eta_1^i)|) \leqslant h\sum_{i=0}^{n-1}(d(|\xi_2^i-\eta_1^i|)) \\ &\leqslant h\sum_{i=0}^{n-1} d(h) = hnd(h) = (v-u)d(h). \end{aligned}$$

因此, $c \leqslant (v-u)d(h)$, 矛盾. 这样证明了 $S(x,y)=F(y)-F(x)$ 是 $f(x)$ 唯一的积分系统.

定理 3.2 与文献 [13] 中的定理 1 一致.

下面来考察强可导函数和一致可导函数的性质. 有如下定理:

定理 3.3 在 $[a,b]$ 上, $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 且 $f(x)$ 的差商有界 (即存在正数 $M>0$, 使得 $|f(x+h)-f(x)|<M|h|$), 当且仅当 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上强可导 (即满足不等式 $|F(x+h)-F(x)-f(x)h| \leqslant Mh^2$).

证明 必要性的证明. 由于在 $[a,b]$ 上 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 对于任意的 x 和 $x+h$, 存在 $p,q\in[x,x+h]$, 使得以下不等式成立

$$f(p) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant f(q),$$

两边同时减去 $f(x)$ 得到

$$f(p)-f(x) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x) \leqslant f(q)-f(x).$$

利用 $f(x)$ 差商的有界性, 可得

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| \leqslant Mh,$$

两边同乘以 h 得到强可导的关系式.

充分性证明. 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上强可导, 即在 x 上满足不等式 $|F(x+h)-F(x)-f(x)h| \leqslant Mh^2$, 写成等价形式为

$$F(x+h)-F(x) = f(x)h + M_1(x,h)h^2.$$

在 $x+h$ 上, 存在关系式

$$F(x)-F(x+h)=-f(x+h)h+M_2(x,h)h^2.$$

两式相加得到

$$f(x+h)-f(x)=(M_1(x,h)+M_2(x,h))h.$$

由于 $M_1(x,h)<M$, $M_2(x,h)<M$, 所以

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant(|M_1(x,h)|+|M_2(x,h)|)h=2Mh.$$

这证明了 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上差商有界. 由文献 [11] 中的估值定理 (命题 8) 可知 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值. 定理证毕.

关于一致可导的问题, 有如下定理:

定理 3.4 函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, 其导函数为 $f(x)$, 当且仅当 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 并且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明 充分性证明. 当 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 即不等式 (5) 成立, 从而可得

$$\begin{aligned}&hf(x_1)\leqslant F(x+h)-F(x)\leqslant f(x_2)h\\&\quad\Rightarrow hf(x_1)-hf(x)\leqslant F(x+h)-F(x)-f(x)h\leqslant(f(x_2)-f(x))h.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续可得到不等式 (1), 从而有 $|f(x_1)-f(x)|\leqslant d(|x_1-x|)\leqslant d(h)$ 和 $|f(x_2)-f(x)|\leqslant d(|x_2-x|)\leqslant d(h)$, 因此有 $|F(x+h)-F(x)-f(x)h|\leqslant hd(h)$.

必要性的证明. 反之, 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, 其导数为 $f(x)$, 即 $F(x)$ 和 $f(x)$ 满足关系式 (2), 写成等价形式

$$F(x+h)-F(x)=f(x)h+M(x,h)hd(|h|).\tag{8}$$

对于 $x+h$, 有

$$F(x)-F(x+h)=-f(x+h)h+M'(x+h,h)hd(|h|).\tag{9}$$

上两式相加并除以 h 得

$$f(x+h)-f(x)=(M(x,h)+M'(x+h,h))d(|h|),$$

注意到 $-1\leqslant M(x,h)\leqslant 1$ 和 $-1\leqslant M'(x+h,h)\leqslant 1$, 即得

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant 2d(|h|).$$

这与不等式 (1) 等价, 这证明了 $f(x)$ 一致连续. 剩下的就是要证明 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值. 这可由文献 [11] 中命题 18 得到. 定理证毕.

4 微积分系统的基本定理

本节将在新定义的基础上证明微积分系统的基本定理, 从而建立起微积分体系. 由定义 3.2 非常显然可以得到以下定理:

定理 4.1 设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, 其导数为 $f(x)$. 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$, 则 $F(x)$ 单调增; 若在 $[a,b]$ 上恒有 $f(x)\leqslant 0$, 则 $F(x)$ 单调减. 当不等式中的等号不成立时, 则 $F(x)$ 是严格单调增或者严格单调减.

证明 直接由定理 3.4, 可知 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 即不等式 (5) 成立, 从而得到本定理的证明.

定理 4.2 (微积分基本定理) 设函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, $F'(x)=f(x)$, 则有 Newton-Leibniz 公式:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a). \tag{10}$$

证明 由于函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, 由定理 3.4, $f(x)$ 一致连续, 并且 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中值, 由定理 3.2 可知, $F(x_2)-F(x_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的定积分. Newton-Leibniz 公式就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分的记号而已, 定理证毕.

定理 4.3 (变上限定积分的可导性) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续并且其定积分存在, 定义 $G(x):=\int_a^x f(t)dt$, 则 $G(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致可导, 并且 $G'(x)=f(x)$.

证明 由函数 $G(x)$ 的定义可知, $S(u,v)=G(v)-G(u)$ 就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上唯一的积分系统, $G(x)$ 的差商就是 $f(x)$ 的中值. 即 $f(x)$ 和 $G(x)$ 满足关系式 (5). 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续和定理 3.4, 可知 $G(x)$ 一致可导并且导函数就是 $f(x)$. 这样就证明了定理.

下面来证明 Taylor 公式, 首先有如下定理:

定理 4.4 (Taylor 公式的预备定理) 若 H 在 $[a,b]$ 上 n 阶一致 (强) 可导 (n 为正整数), 且有

(1) $k=0,1,\ldots,n-1$ 时, $H^{(k)}(a)=0$;

(2) 在 $[a,b]$ 上有 $m\leqslant H^{(n)}(x)\leqslant M$;

则在 $[a,b]$ 上有

$$\frac{m(x-a)^n}{n!}\leqslant H(x)\leqslant\frac{M(x-a)^n}{n!}.$$

证明 采用数学归纳法证明: $m(x-a)^k/k!\leqslant H^{(n-k)}(x)\leqslant M(x-a)^k/k!$, 其中 $k=1,2,\ldots,n$, 当 $k=1$ 时, 由定理 3.4 得

$$H^{(n)}(x_1)\leqslant\frac{H^{(n-1)}(x)-H^{(n-1)}(a)}{x-a}\leqslant H^{(n)}(x_2),$$

其中 $x_1,x_2\in[a,x]$. 从而有

$$m(x-a)\leqslant H^{(n-1)}(x)\leqslant M(x-a);$$

假设 $k<n$ 时成立, 即有

$$\frac{m(x-a)^k}{k!}\leqslant H^{(n-k)}(x)\leqslant\frac{M(x-a)^k}{k!}.$$

下证 $k+1$ 时成立, 作 $G_1(x)=m(x-a)^{k+1}/(k+1)!$, $G_2=M(x-a)^{k+1}/(k+1)!$. 考察

$$\frac{G_2(x_2)-G_2(x_1)}{x_2-x_1}=M\frac{\sum_{i=0}^{k}(x_2-a)^{k-i}(x_1-a)^i}{(k+1)!}. \tag{11}$$

在上式中, 假设 $(x_2-a)>(x_1-a)>0$, 则有

$$M\frac{(x_1-a)^k}{k!}\leqslant M\frac{\sum_{i=0}^{k}(x_2-a)^{k-i}(x_1-a)^i}{(k+1)!}\leqslant M\frac{(x_2-a)^k}{k!}. \tag{12}$$

另一方面, 令 $f_2(x)=M\frac{(x-a)^k}{k!}$, 类似于等式 (11), 我们推出

$$\frac{f_2(x_2)-f_2(x_1)}{x_2-x_1}=M\frac{\sum_{i=0}^{k-1}(x_2-a)^{k-1-i}(x_1-a)^i}{k!}.$$

由于 $0\leqslant x_2-a\leqslant(b-a)$ 和 $0\leqslant x_1-a\leqslant(b-a)$, 则有

$$\left|\frac{f_2(x_2)-f_2(x_1)}{x_2-x_1}\right|=\left|M\frac{\sum_{i=0}^{k-1}(x_2-a)^{k-1-i}(x_1-a)^i}{k!}\right|\leqslant\frac{M(b-a)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

这验证了 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上差商有界, 从而 $G_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致 (强) 可导, 其导数就是 $f_2(x)$. 由定理 2.1 知, $H^{(n-k-1)}(x)-G_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致 (强) 可导, 其导数就是 $H^{(n-k)}(x)-f_2(x)$, 从而存在 $x_2\in[a,x]$, 使得

$$\frac{H^{(n-k-1)}(x)-G_2(x)-H^{(n-k-1)}(a)+G_2(a)}{x-a}\leqslant H^{(n-k)}(x_2)-f_2(x_2),$$

由归纳假设知 $H^{(n-k)}(x)-f_2(x)\leqslant 0$. 因此, $H^{(n-k-1)}(x)-G_2(x)\leqslant 0$. 同理可证 $H^{(n-k-1)}(x)-G_1(x)\geqslant 0$. 定理证毕.

定理 4.5 (Taylor 公式) 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上 n 阶一致 (强) 可导, 且在 $[a,b]$ 上有 $|F^{(n)}(x)|\leqslant M$, 对 $[a,b]$ 上任意点 c 和 x, 记

$$T_n(x,c)=F(c)+F^{(1)}(c)(x-c)+\frac{F^{(2)}(c)(x-c)^2}{2!}+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(c)(x-c)^{n-1}}{(n-1)!},$$

则有 $|F(x)-T_n(x,c)|\leqslant M|x-c|^n/n!$

证明 由 Taylor 公式预备定理的证明, 知道 $(x-c)^k/k!(k>1)$ 在 $[c,b]$ 上强可导, 并且导数就是 $(x-c)^{k-1}/(k-1)!$. 作 $H(x)=F(x)-T_n(x,c)$, 由定理 2.1 可验证 $H(x)$ 满足 Taylor 公式预备定理的条件, 从而对 $x\in[c,b]$, 成立 $|F(x)-T_n(x,c)|\leqslant M|x-c|^n/n!$.

当 $x\in[a,c]$ 时, 取 $u=-x$, 利用与证明 $(x-c)^k/k!$ $(k>1)$ 强可导相同的方法, 可证明 $(u-(-c))^k/k!$ $(k>1)$ 在 $[-c,-a]$ 上强可导, 而且导数就是 $(u-(-c))^{k-1}/(k-1)!$, 然后令 $G(u)=F(-u)$, 对 $G(u)$ 在 $[-c,-a]$ 上应用已经获证的结果, 再将 G 代回为 F, 就完全证明了所要的结论. 证毕.

5 结论

本文提出了一个函数的差商是另一个函数的中值的概念, 这个概念刻画了函数与其导数和函数与其积分关系的本质特征. 在这个概念的基础上, 探索出了最直观的积分系统的定义, 并得到了强可导和一致可导的充分必要条件, 这些充分必要条件也可作为强可导和一致可导的另一等价定义. 由此, 将微分、积分系统统一成一个系统. 而不是象以前那样, 微分系统与积分系统被人为的割裂开来, 学生通常是先学习微分系统, 然后再学习积分系统; 微积分学机械化是一个重要的研究领域, 本文将微积分学初等化了, 如果再代数化后, 就能采用在不等式定理机器证明的有关成果来研究微积分学机械化问题, 因此, 本文为微积分系统机械化研究提供了必要的准备.

我们知道, 在传统的微积分中, 很多定理的证明要用中值定理, 例如, 导数正则函数增, Taylor 公式等, 而中值定理的证明要用实数理论. 那么, 这些定理的成立是不是依赖实数理论? 本文的推导过程澄清了这些问题: 它们不依赖实数理论.

需要指出的是由于没有实数理论, 不可能一般地讨论定积分的存在问题. 若要讨论, 至少需要一条有关实数的公理, 例如 “有上界的数集合必有最小上界”.

致谢 感谢中国科学院数学与系统科学研究院的林群院士对本文工作提出宝贵的意见.

参考文献

1 李文林. 数学史概论 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2002, 186–187, 247–255
2 张景中, 曹培生. 从数学教育到教育数学. 成都: 四川教育出版社, 1989
3 刘宗贵. 非 ε 语言一元微积分学. 贵阳: 贵州教育出版社, 1993
4 萧治经. D 语言数学分析 (上下册). 广州: 广东高等教育出版社, 2004
5 陈文立. 新微积分学 (上下册). 广州: 广东高等教育出版社, 2005
6 刘宗贵. 试用非 ε 语言讲解微积分. 高等数学研究, **3**: 22–24 (2002)
7 林群. 数学也能看图识字. 光明日报, 1997 年 6 月 27 日 (4); 人民日报, 1997 年 8 月 6 日 (4)
8 林群. 画中漫游微积分. 南宁: 广西师范大学出版社, 1999
9 林群. 微分方程与三角测量. 北京: 清华大学出版社, 2005
10 Lin Q. A Rigorous Calculus to Avoid Notions and Proofs. Singapore: World Scientific Press, 2006
11 张景中. 微积分学的初等化. 华中师范大学学报 (自然科学版), **40**: 475–484 (2006)
12 林群. 新概念微积分. 大学数学课程报告论坛 2005 论文集. 北京: 高等教育出版社, 2005, 27–32
13 张景中. 定积分的公理化定义方法. 广州大学学报, **6**: 1–5 (2007)