任意剖分下的多元样条分析

王　仁　宏
(吉林大学数学系)

摘　　要

本文采用代数几何的方法,研究了在任意剖分下多元样条函数的各种性质.

定理 2—4 给出了一个函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是多元参数型样条的充分必要条件. 定理 1 指出了多元样条函数具有"解析延拓"的特征性质. 文中得到在任意剖分下多元样条的一般表达形式(定理 9 和 10)和多元样条插值的一般理论. 文中也讨论了多元有理样条函数.

作者在文献 [1] 中,从分析光滑性与整除性的关系入手,沟通了多元样条函样与代数几何之间的关系,从而便于我们抓住多元样条函数的几何本质以及逐块"解析"开拓的具体形象,为作理论分析和实际运用提供了方法.

本文在作者另一文[1]的基础上,以多元参数样条为具体背景,指出多元样条函数与代数几何的联系. 并以代数几何为工具,讨论了在给定剖分下,多元样条函数存在的充分必要条件和表现形式.

本文仅就三维空间的多元样条函数进行讨论. 自然,本文所有结果均不受空间维数的限制.

一、基本引理及记号

设 D 是 uv 平面上的一个单连通区域. 考虑三维空间中曲面的一般参数形式:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in D. \tag{1}$$

将曲面 (1) 表成向量形式:

$$\boldsymbol{S}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T, (u, v) \in D. \tag{2}$$

对给定正整数 k, 设

$$\boldsymbol{H}^k = \left\{\boldsymbol{P}(u, v) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} \boldsymbol{c}_{ij} u^i v^j;\ \boldsymbol{c}_{ij} \in E_3\right\}, \tag{3}$$

其中 E_3 为三维欧氏空间,多项式 $\boldsymbol{P}(u, v) \in \boldsymbol{H}^k$ 称为向量多项式或多项式向量.

我们说向量多项式 $\boldsymbol{P}(u, v)$ 可被纯量多项式 $l(u, v)$ 所整除,如果存在某向量多项式 $\boldsymbol{Q}(u, v)$, 使得

$$\boldsymbol{P}(u, v) = l(u, v)\boldsymbol{Q}(u, v). \tag{4}$$

本文 1978 年 6 月 22 日收到.

引理 1. 设 $\boldsymbol{P}(u, v) \in \boldsymbol{H}^k$, $l(u, v) = au + bv + c$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$. 若 $l(u, v)$ 的某 n 个零点 (u_i, v_i) $(i = 1, \cdots, n)$, $n \geqslant k + 1$ 也是 $\boldsymbol{P}(u, v)$ 的零点，则 $\boldsymbol{P}(u, v)$ 一定可被 $l(u, v)$ 所整除.

证. 不妨设 $b \neq 0$. 今将 $\boldsymbol{P}(u, v)$ 按 v 的降幂次序整理为:

$$\boldsymbol{P}(u, v) = \boldsymbol{a}_0(u)v^k + \boldsymbol{a}_1(u)v^{k-1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{k-1}(u)v + \boldsymbol{a}_k(u),$$

其中 $\boldsymbol{a}_j(u)$ 为 u 的次数不超过 j 的多项式:

$$\boldsymbol{a}_j(u) = \sum_{i=0}^{j} \boldsymbol{a}_{ji}u^i, \quad \boldsymbol{a}_{ji} \in E_3. \tag{5}$$

以 $l(u, v)$ 除 $\boldsymbol{P}(u, v)$, 得

$$\boldsymbol{P}(u, v) = l(u, v)\boldsymbol{Q}(u, v) + \boldsymbol{R}(u),$$

其中 $\boldsymbol{Q}(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-1}$, $\boldsymbol{R}(u)$ 为形如 (5) 式的 k 次向量多项式. 由假设条件知

$$u_i \neq u_j \quad (i \neq j),$$

且

$$\boldsymbol{R}(u_i) = \boldsymbol{0}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

从而 $\boldsymbol{R}(u)$ 各分量皆有比其次数 k 为多的零点数. 所以 $\boldsymbol{R}(u) \equiv \boldsymbol{0}$, 从而引理 1 得证.

引理 2. 设 $\boldsymbol{P}(u, v) \in \boldsymbol{H}^k$, 且 $\Gamma: l(u, v) = 0$. 为使

$$\left.\frac{\partial^r}{\partial u^i \partial v^{r-i}} \boldsymbol{P}(u, v)\right|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}, \quad i = 0, \cdots, r; \quad r = 0, \cdots, \mu, \tag{6}$$

必须且只须 $\boldsymbol{P}(u, v)$ 可被 $[l(u, v)]^{\mu+1}$ 所整除.

证. 充分性是显然的. 事实上,因有某 $\boldsymbol{Q}(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-\mu-1}$, 使

$$\boldsymbol{P}(u, v) = [l(u, v)]^{\mu+1}\boldsymbol{Q}(u, v),$$

自然满足 (6) 式了.

再证必要性. $\mu = 0$ 时,由引理 1 有 $\boldsymbol{Q}_1(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-1}$, 使

$$\boldsymbol{P}(u, v) = l(u, v)\boldsymbol{Q}_1(u, v).$$

$0 < \mu \leqslant k - 1$ 时,上式应该仍然成立. 于是由假设

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \boldsymbol{P}(u, v)|_{\Gamma} &= \left.\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial u} l(u, v) + a\boldsymbol{Q}_1\right)\right|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}, \\ \frac{\partial}{\partial v} \boldsymbol{P}(u, v)|_{\Gamma} &= \left.\left(\frac{\partial \boldsymbol{Q}_1}{\partial v} l(u, v) + b\boldsymbol{Q}_1\right)\right|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{7}$$

由于 a, b 不同时为 0, 从而由 (7) 式知

$$\boldsymbol{Q}_1(u, v)|_{\Gamma} = \boldsymbol{0}.$$

根据引理 1, 有 $\boldsymbol{Q}_2(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-2}$, 使

$$\boldsymbol{Q}_1(u, v) = l(u, v)\boldsymbol{Q}_2(u, v).$$

亦即

$$\boldsymbol{P}(u, v) = [l(u, v)]^2\boldsymbol{Q}_2(u, v).$$

再逐步由条件 (6) 可推得

$$\boldsymbol{P}(u, v) = [l(u, v)]^{\mu+1}\boldsymbol{Q}_{\mu+1}(u, v),$$

其中 $\boldsymbol{Q}_{\mu+1}(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-\mu-1}$. 引理 2 得证.

定义 1. 用有限条线段对 $\bar{D}$ 作剖分 T, 则 $\bar{D}$ 被分成有限个子区域. 我们称这些子

区域为 $\bar{D}$ 的胞腔. 全部含于 D 内部的网线称为内网线. 至少有一个端点为内网点的内网线,称为第一类内网线,其集合记为 $\mathrm{I}(T)$. 其它内网线称为第二类内网线,其集合记为 $\mathrm{II}(T)$.

所有以某同一网点 P 为顶点的胞腔的并集称为 P 的相对于剖分 T 的关联区域. 记为 $\mathfrak{R}(P, T)$ 或 $\mathfrak{R}(P)$.

定义 2. 对 $\bar{D}$ 进行剖分 T 之后,如果函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 在每个胞腔上为向量多项式 $\boldsymbol{P}(u, v) \in \boldsymbol{H}^k$, 并且 $\boldsymbol{S}(u, v) \in C^\mu(D)$, 则称 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 为 (k, μ) 阶样条函数. 记 (k, μ) 阶样条函数的集合为 $\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$. 有时也简记为 $\mathfrak{S}_k^\mu$.

类 $\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 是文献 [1] 中类 $\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 的参数形式下的推广. 它不仅常可使曲面形式简化,避免非单值性等等,而且还可概括某些有理函数和无理函数等. 比如,当

$$x = uv, \quad y = u + v, \quad z = v$$

时, z 作为 x 和 y 的函数就是

$$z = \frac{1}{2}\left(y \pm \sqrt{y^2 - 4x}\right).$$

二、光滑性、协调性与结构特征

我们将指出光滑性与整除性之间的本质联系. 由于整除性是一个在仿射(射影)变换下的不变量(参见文献 [2]), 因此反映样条函数特点的光滑性也是一个几何不变量. 从原则上讲,样条函数就是一种特定的几何概念.

从定理 1 可以发现,多元样条函数(一元也如此)实质上还具有一种分片"解析"开拓的性质.

为叙述方便起见,把剖分 T 后所得的胞腔按某任意确定的顺序编号:

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_N. \tag{8}$$

两相邻闭胞腔 $\bar{\Delta}_i$ 与 $\bar{\Delta}_j$ 的公共内网线记为 Γ_{ij}. 如果它们有两条以上的公共网线,则添加上标 $\Gamma_{ij}^{(\nu)}$ 以示区别.

因为任一内网线必为某两胞腔所公有,因此都可记为

$$\Gamma_{ij}:\ l_{ij}(u, v) = 0. \tag{9}$$

虽然 Γ_{ij} 也可以写为 $-l_{ij}(u, v) = 0$ 的形式,但为今后讨论方便起见,在整个讨论过程中恒取定一个符号 $l_{ij}(u, v)$ 或 $-l_{ij}(u, v)$ 而不予改变. 并规定

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}:\ l_{ij}(u, v) \equiv l_{ji}(u, v). \tag{10}$$

定理 1. 设某函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 在相邻两胞腔 Δ_i, Δ_j 上的表达式分别为

$$\boldsymbol{P}_i(u, v), \quad \boldsymbol{P}_j(u, v) \in \boldsymbol{H}^k.$$

为使 $\boldsymbol{S}(u, v) \in C^\mu(\bar{\Delta}_i \cup \bar{\Delta}_j)$, 必须且只须存在 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-\mu-1}$, 使得

$$\boldsymbol{P}_i(u, v) - \boldsymbol{P}_j(u, v) = [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v), \tag{11}$$

其中 Γ_{ij}: $l_{ij}(u, v) = 0$ 为 Δ_i 与 Δ_j 的公共网线.

事实上,只须令 $\boldsymbol{P}(u, v) = \boldsymbol{P}_i(u, v) - \boldsymbol{P}_j(u, v)$, 则由引理 2 可知定理 1 为真.

定义 3. 由 (11) 式所确定的 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)$ 称为 Γ_{ij} 上的光滑因子. 若一个多元样条函数有非 **0** 的光滑因子存在,则称之为非蜕化的多元样条函数. 否则,称之为蜕化的多元样

条函数，此即各胞腔同为一多项式者．

由(10)和(11)式可知，Γ_{ij} 上的光滑因子与 Γ_{ji} 上的光滑因子有下列关系

$$-\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v) \equiv \boldsymbol{Q}_{ji}(u, v). \tag{12}$$

设 A 为任一给定的内网点，按下法将所有过 A 的内网线 $\{\Gamma_{ij}\}$ 中各 i, j 的顺序作如下调整：使当一动点以 A 为心按逆时针方向转动而越过 Γ_{ij} 时，恰好是从 Δ_j 跨入 Δ_i．(13)

有了上述规定和(10)，(12)式，就可给出"协调条件"

$$\sum_A [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1} \boldsymbol{Q}_{ij}(u, v) \equiv \boldsymbol{0}, \tag{14}$$

其中 $\sum\limits_A$ 表示对一切以 A 为端点的内网线所作的和，而 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)$ 为按(13)调整后的 Γ_{ij} 所对应的光滑因子．

设将所有内网点列出为 $A_1, A_2, \cdots, A_M$，则称

$$\sum_{A_\nu} [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1} \cdot \boldsymbol{Q}_{ij}(u, u) \equiv \boldsymbol{0}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, M, \tag{15}$$

为全局协调条件．

定义 4. 设区域 D 的边界 ∂D 由一些折线所组成，若把它们也作为网线，则得到整个平面区域 R^2 的一个剖分．我们称之为整体剖分，记为 $\bar{T}$．

定理 2. 对于给定剖分 T，$\boldsymbol{S}(u, v)$ 是 $\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 中的多元样条函数，必须且只须 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 在每一内网线上均有一光滑因子存在，并且满足全局协调条件(15)式．若使 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是非蜕化的，必须且只须除上述条件外，再要求有非零的光滑因子存在．

定理 3. 对于整体剖分 $\bar{T}$，$\boldsymbol{S}(u, v)$是 $\mathfrak{S}_k^\mu(R^2, \bar{T})$ 中的多元样条函数，必须且只须对每根网线而言，$\boldsymbol{S}(u, v)$ 均有光滑因子存在，并且满足全局协调条件1)．欲使 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是非蜕化的，必须且只须在上述条件外，再要求有非零的光滑因子存在．

定理 2 和定理 3 的证明是完全类似的．事实上，由定理 1 知 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 的光滑性连接是没有问题的．因而只须证明单值性．显然(15)式可保证在每个内网点 A 的关联区域 $\mathfrak{K}(A)$ 内的单值性．关键是要证明相邻两内网点 A_1, A_2 的关联区域的并集

$$\mathfrak{K}(A_1) \cup \mathfrak{K}(A_2)$$

上的单值性．而这点完全可由(10)，(12)，(14)式所保证[1]．

定理 2 和定理 3 给出了判定 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是否为多元样条函数的充分必要条件．下述定理 4 则给出了在已知剖分下，多元样条函数存在的条件．

定理 4. 设 μ 为一给定的非负整数，$0 \leqslant \mu \leqslant k-1$．为使在剖分 T 下，非蜕化的多元样条函数 $\boldsymbol{S}(u, v) \in \mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 存在，必须且只须下述两条件之一满足：

1) $\Pi(T)$ 非空．

2) $\Pi(T) = \phi$ (空)，但在(10)，(12)，(13)式下，由(15)式所示的全局协调方程有不全为 $\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)$ 存在．

所述条件的必要性是定理 2 的直接推论．

---

1) 此时 $A_1, \cdots, A_M$ 应为相应于 $\bar{T}$ 的一切网点．

证明充分性. 2)成立, 则由定理 2 知充分性成立. 若 1) 成立, 则对任何给定的 $\Gamma_{ij}\in \mathrm{II}(T)$, 可任取非零向量多项式 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)\in \boldsymbol{H}^{k-\mu-1}$ 作为 Γ_{ij} 的光滑因子. 并于 (15) 式中取平凡解, 即取各 $\Gamma_{ij}\in I(T)$的光滑因子恒为 $\boldsymbol{0}$. 如此所确定的任何 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 一定非蜕化且属于 $\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$.

推论 1. 设剖分 T 无内网点 ($\mathrm{I}(T)=\phi$), 则只要 $0\leqslant\mu\leqslant k-1$, 非蜕化的多元样条函数 $\boldsymbol{S}(u, v)\in\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 一定存在, 其中各内网线 $\Gamma_{ij}\in \mathrm{II}(T)$ 上的光滑因子可以是 $\boldsymbol{H}^{k-\mu-1}$ 中的任何向量多项式 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)$.

从以上推论可知, 一元非蜕化样条函数, 对于任何剖分都是存在的. 因为没有"内网点"存在. 但是一元周期样条相当于首尾两区间重合的情况. 因此它们理应满足"协调条件":

$$\sum_{j=1}^{N} c_j(x-x_j)^n\equiv 0.$$

三、异度样条函数

(k, μ) 阶样条函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 在各相邻胞腔上都以 μ 阶光滑度相连接. 有些实际问题和理论问题,还常要求构造各相邻胞腔之间连接的光滑度不尽相同的样条函数,甚至要求各胞腔内的函数类也不尽相同,本节只就前一问题略作讨论.

定义 5. 设 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 于各胞腔上为 k 次向量多项式, 在内网线 Γ_{ij} 上的光滑度为 μ_{ij} ($\mu_{ij}=\mu_{ji}$), 则称 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 为异度样条函数. 记为 $\boldsymbol{S}(u, v)\in\mathfrak{S}_k^{\bar\mu}(D, T)$, 其中 $\bar\mu$ 为所有 μ_{ij} 的集合:

$$\bar\mu=\{\mu_{ij}, \mu_{\alpha\beta}, \cdots\}.$$

显然,只须将 (14), (15) 式分别换成

$$\sum_{A}[l_{ij}(u, v)]^{\mu_{ij}+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)\equiv\boldsymbol{0}, \tag{14'}$$

$$\sum_{A_\nu}[l_{ij}(u, v)]^{\mu_{ij}+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)\equiv\boldsymbol{0},\quad \nu=1, \cdots, M, \tag{15'}$$

则定理 2, 定理 3 和定理 4 的类似结论是照样成立的. 事实上,由于我们采用的是代数几何方法,因而对于异度样条的研究并不会产生任何新的困难.

四、带权样条函数

求解数学物理问题时,常会遇到边界条件

$$\boldsymbol{W}(u, v)|_{\partial D}=\boldsymbol{\varphi}(u, v). \tag{16}$$

设 ∂D 的方程为:

$$\sigma(u, v)=0,$$

对任何 $\boldsymbol{P}(u, v)\in\boldsymbol{H}^k$, 函数 $\sigma(u, v)\boldsymbol{P}(u, v)+\boldsymbol{\varphi}(u, v)$ 将自动满足边界条件 (16) 式.

进而,对于任何 $g(t)$,只要 $g(0)=0$,则 $g(\sigma(u, v))\,\boldsymbol{P}(u, v)+\boldsymbol{\varphi}(u, v)$ 必满足(16)式.

我们考虑分片为形如

$$G(u, v)\boldsymbol{P}_i(u, v)+\boldsymbol{\varphi}(u, v),\quad (u, v)\in\Delta_i \tag{17}$$

的样条函数,其中 $G(u, v)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}(u, v)$ 是给定的函数, $\boldsymbol{P}_i(u,v) \in \boldsymbol{H}^k$.

设 $G(u, v) \in C^\mu(D)$, 并设

$$Z[G] = \{(u, v) \in D \mid G(u, v) = 0\}.$$

今假定对给定剖分 T, 每条内网线 Γ_{ij} 上点集 $\Gamma_{ij} - Z[G]$ 的点数不少于 $k+1$:

$$NP(\Gamma_{ij} - Z[G]) \geqslant k + 1. \tag{18}$$

定义 6. 在给定剖分 T 下, 形如 (17) 式且于 D 上具有 μ 阶连续偏导数的函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 称为带权多项式样条,简称带权样条. 记为 $G\mathfrak{S}_k^\mu(D, T, \boldsymbol{\varphi})$ 或 $G\mathfrak{S}_k^\mu(\boldsymbol{\varphi})$.

由引理 1 和引理 2, 并注意假设条件 (18) 式,我们有

定理 5. 设 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 在两相邻胞腔 Δ_i 和 Δ_j 上的表达式分别为 $\boldsymbol{S}_i(u, v)$ 和 $\boldsymbol{S}_j(u, v)$, 为使 $\boldsymbol{S}(u, v) \in G\mathfrak{S}_k^\mu(\bar{\Delta}_i \cup \bar{\Delta}_j)$, 必须且只须存在 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v) \in \boldsymbol{H}^{k-\mu-1}$, 使得

$$\boldsymbol{S}_i(u, v) - \boldsymbol{S}_j(u, v) = [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)G(u, v), \tag{19}$$

其中 Γ_{ij}: $l_{ij}(u, v) = 0$ 为 Δ_i 与 Δ_j 的公共网线.

协调条件和全局协调条件分别为:

$$G(u, v) \sum_A [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v) \equiv \boldsymbol{0}, \tag{20}$$

$$G(u, v) \sum_{A_\nu} [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1} \cdot \boldsymbol{Q}_{ij}(u, v) \equiv \boldsymbol{0}, \quad \nu = 1, \cdots, M. \tag{21}$$

同样地,有

定理 6. 对给定剖分 T, $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是 $G\mathfrak{S}_k^\mu$ 中的带权样条函数, 必须且只须对每一内网线而言, $\boldsymbol{S}(u, v)$ 均有一光滑因子存在,并且满足全局协调条件 (21) 式. 欲使 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是非蜕化的,必须且只须在上述条件外再要求有非零的光滑因子存在.

定理 7. 对给定的整体剖分 $\bar{T}$, $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是 $G\mathfrak{S}_k^\mu$ 中多元带权样条函数, 必须且只须对每根网线而言, $\boldsymbol{S}(u, v)$ 均有光滑因子存在, 并且满足全局协调条件 (21) 式. 欲再使 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是非蜕化的,必须且只须在上述条件外再要求有非零的光滑因子存在.

定理 8. 设 μ 为一给定的非负整数, $0 \leqslant \mu \leqslant k-1$, 为使在剖分 T 下, 非蜕化的多元带权样条函数 $\boldsymbol{S}(u, v) \in G\mathfrak{S}_k^\mu$ 存在,必须且只须下述两条件之一满足:

1) $\Pi(T)$ 非空.

2) $\Pi(T) = \phi$ (空), 但在(10),(12),(13)式下, 由(21)式所示的全局协调方程有不全为 $\boldsymbol{0}$ 的解 $\boldsymbol{Q}_{ij}(u, v)$ 存在.

它们的证明和定理 2, 3 和 4 的证明是类似的[1].

五、多元样条函数的表现

多元样条的逐片开拓性质, 使得我们十分便于给出多元样条函数的表达式. 今仅就带权样条函数来叙述.

设区域 D 被剖分 T 分成有限个胞腔 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_N$, 在其中任意选定一个胞腔作为"源胞腔",不妨设 Δ_1 为源胞腔. 从源胞腔 Δ_1 出发,画一个流向图(如图 1 所示). 使得有向流线 $\boldsymbol{C}$ 满足下列条件:

1) $\boldsymbol{C}$ 流进、流出所有胞腔各一次;

2）C不允许通过网点；

3）C穿过每条内网线的次数不多于1.

我们所作的有向流线C允许有分支出现，即并不要求是“一笔画”.

定义7. 流线C所经过的内网线称为相应于流线C的本性网线，其它内网线均称为相应于流线C的可去网线.

显然，本性网线与可去网线均与流线C的选取有关，而流线C的选择是不唯一的，因此它们都只是一个相对概念.

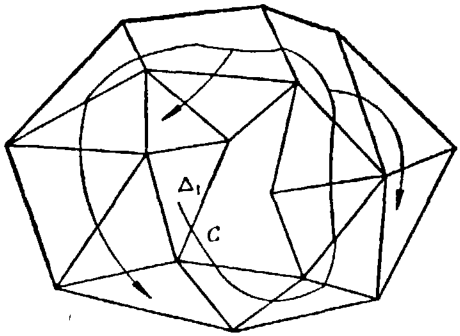

图 1

定义8. 设C为给定的流线，Γ_{ij}为C的任一条本性内网线

$$\Gamma_{ij}:\ l_{ij}(u,v)=0.$$

我们把从源胞腔出发沿C前进时，只有越过Γ_{ij}之后才可能到达的所有闭胞腔的并集记为$U(\Gamma_{ij}^{+})$，把C在越过Γ_{ij}之前所经过各闭胞腔的并集记为$U(\Gamma_{ij}^{-})$. 而称$U(\Gamma_{ij}^{+})-U(\Gamma_{ij}^{-})$为$\Gamma_{ij}$的前方，记为$f_r(\Gamma_{ij})$.

定义9. 设Γ_{ij}: $l_{ij}(x,y)=0$为相应于流线C的任一条本性内网线. 定义多元非乘积型截断多项式为：

$$[l_{ij}(u,v)]_+^m=\begin{cases}[l_{ij}(u,v)]^m, & 当\ (u,v)\in f_r(\Gamma_{ij}),\\ 0, & 当\ (u,v)\in \overline{D}-f_r(\Gamma_{ij}).\end{cases}\tag{22}$$

定理9. 带权样条函数类$G\mathfrak{S}_k^\mu(D,T)$中任一多元样条函数$\boldsymbol{S}(u,v)$，均可唯一地表现为：

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\boldsymbol{\varphi}(u,v)+G(u,v)\left\{\boldsymbol{P}(u,v)+\sum_{C}[l_{ij}(u,v)]_+^{\mu+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u,v)\right\},\quad (u,v)\in D,\tag{23}$$

其中$\boldsymbol{P}(u,v)\in \boldsymbol{H}^k$为$\boldsymbol{S}(u,v)$于源胞腔中的表达式，$\sum\limits_{C}$表示对$C$的所有本性内网线求和，而当$C$越过$\Gamma_{ij}$时恰好从$\Delta_j$跨入$\Delta_i$，并且$\boldsymbol{Q}_{ij}(u,v)$为$\Gamma_{ij}$: $l_{ij}(u,v)=0$上的光滑因子.

如果取

$$\boldsymbol{\varphi}(u,v)\equiv\boldsymbol{0},\quad G(u,v)\equiv 1,\quad (u,v)\in D,$$

则从定理9推得

定理10. $\mathfrak{S}_k^\mu(D,T)$中的任一多元样条函数$\boldsymbol{S}(u,v)$，均可唯一地表现为：

$$\boldsymbol{S}(u,v)=\boldsymbol{P}(u,v)+\sum_{C}[l_{ij}(u,v)]_+^{\mu+1}\boldsymbol{Q}_{ij}(u,v),\quad (u,v)\in D,\tag{24}$$

其中$\boldsymbol{P}(u,v)$，$l_{ij}(u,v)$和$\boldsymbol{Q}_{ij}(u,v)$的意义同定理9.

定理9与定理10的证明是不难的. 事实上，只须根据定义10和定理1中光滑因子的涵义，采用数学归纳法即可证得.

（23）与（24）式中的$\boldsymbol{P}(u,v)$是没有什么限制的，但是$\boldsymbol{Q}_{ij}(u,v)$一定是要满足全局

协调条件 (21) 和 (15) 式的.

综合定理 10 和定理 2, 定理 9 和定理 6, 则可分别建立下述两定理:

定理 11. 对于给定的剖分 T 和确定的流线 $\boldsymbol{C}$, 多元函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是 $\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 中的样条函数,必须且只须 (24) 与 (15) 式同时被满足.

定理 12. 对于给定的剖分 T 和确定的流线 $\boldsymbol{C}$, 多元函数 $\boldsymbol{S}(u, v)$ 是 $G\mathfrak{S}_k^\mu(D, T)$ 中的带权样条函数,必须且只须 (23) 与 (21) 式同时被满足.

上述四条定理,对于多元样条的插值理论、最佳逼近理论以及高维数值积分等方面的研究和应用提供了必要的前提.

对于第三节中所说的异度样条函数的相应定理也是容易建立的.

顺便指出,一元样条函数的表达式恰为 (24) 式的简单特例.

六、多元有理样条函数

本文仅讨论"纯量"形式有理样条函数. 设以 H^n 记如下 n 次多项式的集合

$$P(u, v) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} c_{ij} u^i v^j.$$

以 R_m^n 记如下有理分式类

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)},$$

其中 $P(u, v) \in H^n$, $Q(u, v) \in H^m$, 且 $Q(u, v)$ 于 D 内处处不为零.

对给定剖分 T, 若 $R(u, v)$ 于每个胞腔上属于 R_m^n, 且 $R(u, v) \in C^\mu(D)$, 则称 $R(u, v)$ 是多元有理样条函数,记为 $R(u, v) \in \mathfrak{S}_{n/m}^\mu(D, T)$.

定理 13. 设某函数 $R(u, v)$ 于两相邻胞腔 Δ_i, Δ_j 上的表达式分别为

$$\frac{P_i(u, v)}{Q_i(u, v)}, \quad \frac{P_j(u, v)}{Q_j(u, v)} \in R_m^n.$$

为使 $R(u, v) \in C^\mu(\bar{\Delta}_i \cup \bar{\Delta}_j)$, 必须且只须存在 $M_{ij}(u, v) \in H^{m+n-\mu-1}$, 使得

$$\frac{P_i(u, v)}{Q_i(u, v)} - \frac{P_j(u, v)}{Q_j(u, v)} = \frac{[l_{ij}(u, v)]^{\mu+1} M_{ij}(u, v)}{Q_i(u, v) Q_j(u, v)}, \tag{25}$$

其中 Γ_{ij}: $l_{ij}(u, v) = 0$ 为 Δ_i 与 Δ_j 的公共内网线.

证. 充分性是显然的. 再证必要性. 根据 $R(u, v)$ 的连续性,

$$\frac{P_i(u, v)}{Q_i(u, v)} - \frac{P_j(u, v)}{Q_j(u, v)} = \frac{P_i(u, v) Q_j(u, v) - P_j(u, v) Q_i(u, v)}{Q_i(u, v) Q_j(u, v)} \tag{26}$$

于 Γ_{ij} 上处处为 0. 因而其分子必于 Γ_{ij} 上处处为零. 由引理 1, 其分子一定可被 $l_{ij}(u, v)$ 所整除. 即有 $M_{ij}^1(u, v) \in H^{m+n-1}$, 使

$$\frac{P_i(u, v)}{Q_i(u, v)} - \frac{P_j(u, v)}{Q_j(u, v)} = \frac{l_{ij}(u, v) M_{ij}^1(u, v)}{Q_i(u, v) Q_j(u, v)}.$$

又因它们一阶偏导数于 Γ_{ij} 上处处为 0, 于是可直接推知 $M_{ij}^1(u, v)$ 必在 Γ_{ij} 上处处为 0. 又由引理 1, 再推得

$$\frac{P_i(u, v)}{Q_i(u, v)} - \frac{P_j(u, v)}{Q_j(u, v)} = \frac{[l_{ij}(u, v)]^2 M_{ij}^2(u, v)}{Q_i(u, v) Q_j(u, v)},$$

其中 $M^{?}_{ij}(u, v) \in H^{m+n-2}$. 依此类推,即可证得 (25) 式成立. 定理 13 得证.

我们称 $M_{ij}(u, v)$ 为内网线 Γ_{ij}: $l_{ij}(u, v) = 0$ 上的光滑因子.

在多元有理样条的理论研究中,代替 (14), (15) 式的依次为:

$$\sum_{A} [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1} \cdot \frac{M_{ij}(u, v)}{Q_i(u, v)Q_j(u, v)} \equiv 0, \tag{27}$$

$$\sum_{A_v} [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1} \cdot \frac{M_{ij}(u, v)}{Q_i(u, v)Q_j(u, v)} \equiv 0, \quad v = 1, \cdots, M, \tag{28}$$

其中 $Q_i(u, v)$, $Q_j(u, v)$ 分别为在胞腔 Δ_i, Δ_j 上的有理分式之分母.

定理 14. 对于给定剖分 T, $R(u, v)$ 是 $\mathfrak{S}^{\mu}_{n/m}(D, T)$ 中的有理样条函数,必须且只须 $R(u, v)$ 在每一内网线上均有光滑因子存在, 并且满足全局协调条件 (28) 式. 为再使 $R(u, v)$ 是非蜕化的, 必须且只须在上述条件外再要求有非零的光滑因子存在.

它的证明与定理 2 的证明类似. 同样地,我们有

定理 15. $\mathfrak{S}^{\mu}_{n/m}(D, T)$ 中的任一有理样条函数 $R(u, v)$ 均可唯一地表现为:

$$R(u, v) = R_0(u, v) + \sum_{C} [l_{ij}(u, v)]^{\mu+1}_{+} \frac{M_{ij}(u, v)}{Q_i(u, v)Q_j(u, v)}, \tag{29}$$

其中 $R_0(u, v) \in R^n_m$ 为 $R(u, v)$ 在源胞腔中的表达式, $Q_i(u, v)$ 和 $Q_j(u, v)$ 分别为 Δ_i 和 Δ_j 中有理分式的分母, $M_{ij}(u, v)$ 为 Γ_{ij} 上的光滑因子.

为了得到一系列实际可行的有理样条插值方法, 看来采用作者和吴顺唐[3] 给出的类似形式是可以办得到的.

七、多元样条插值

现就纯量多项式样条函数来讨论多元样条插值的问题.

把全局协调条件 (15) 式写成矩阵形式

$$BQ \equiv 0, \tag{30}$$

其中 Q 为由各内网线上的光滑因子的系数 c_{ij} 作为分量所组成的向量. B 中各元素由各 $[l_{ij}(u, v)]^{\mu+1}$ 展开式的系数组成. (30) 式中未知量的个数为 $md(k-\mu-1)$, 其中 m 为内网线总数,

$$d(r) = \frac{(r+1)(r+2)}{2}.$$

设 B 的秩数为 τ, 则 (30) 式的解空间的维数为 $\lambda = md(k-\mu-1) - \tau$.

取定 (30) 式的一个基础解系

$$q_1, q_2, \cdots, q_\lambda. \tag{31}$$

则 (30) 式的通解为:

$$Q = \alpha_1 q_1 + \cdots + \alpha_\lambda q_\lambda,$$

其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_\lambda$ 为实数.

引入记号

$$X^k = (u^k, u^{k-1}v, \cdots, uv^{k-1}, v^k).$$

因内网线总数为 m, 如果我们视 (24) 式是对一切内网线求和, 但规定相应可去内网线的

截断多项式恒为零，则 (24) 式仍然成立．为叙述方便起见，给所有内网线编号：

$$l_1(u, v), \cdots, l_m(u, v).$$

于是 (24) 式成为

$$S(u, v) = P(u, v) + \sum_{j=1}^{m} [l_j(u, v)]_+^{\mu+1} Q_j(u, v). \tag{32}$$

记

$$\omega_1(u, v) = (X^0, X^1, \cdots, X^k),$$
$$\omega_2(u, v) = ([l_1(u, v)]_+^{\mu+1} X^0, \cdots, [l_1(u, v)]_+^{\mu+1} X^{k-\mu-1}, \cdots,$$
$$[l_m(u, v)]_+^{\mu+1} X^0, \cdots, [l_m(u, v)]_+^{\mu+1} X^{k-\mu-1}),$$
$$\omega(u, v) = \omega_1(u, v) + \omega_2(u, v),$$

则 (32) 式可写为：

$$S(u, v) = \omega(u, v) \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \omega_1(u, v)P + \omega_2(u, v)Q$$

$$= (\omega_1(u, v), \omega_2(u, v)q_1, \cdots, \omega_2(u, v)q_\lambda) \begin{pmatrix} P \\ \alpha \end{pmatrix}, \tag{33}$$

其中 P 是以 $P(u, v)$ 的系数 c_{ij} 为分量的向量，而 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\lambda)^T$.

从 (33) 式可知，$S(u, v)$ 中真正独立的自由度为：

$$\delta = d(k) + md(k - \mu - 1) - \tau.$$

设 $\mathscr{L}_1, \cdots, \mathscr{L}_\delta$ 是给定的线性算子，它们是允许有重复的．它们可以是恒等算子、偏微商算子和积分泛函等等：

$$\mathscr{L} S(u,v) \equiv S(u, v),$$

$$\mathscr{L} S(u, v) \equiv \frac{\partial^n}{\partial u^i \partial v^{n-i}} S(u, v),$$

$$\mathscr{L} S(u, v) = \int_D \rho(u, v) S(u, v) du dv,$$

其中权函数 $\rho(u, v)$ 满足

$$\rho(u, v) \geqslant 0, \quad (u, v) \in D,$$

$$\int_D \rho(u, v) du dv > 0.$$

取插值节点

$$(u_j, v_j), \quad j = 1, \cdots, \delta. \tag{34}$$

考虑插值问题

$$\mathscr{L}_j S(u_j, v_j) = Z_j, \quad j = 1, \cdots, \delta, \tag{35}$$

其中 $Z_1, \cdots, Z_\delta$ 为给定的一组实数，而当 $i \neq j$ 时，并不一定要求

$$\mathscr{L}_i \neq \mathscr{L}_j, \quad (u_i, v_i) \neq (u_j, v_j).$$

比如可以在同一点要求若干阶偏微商满足插值条件，或者在不同点要求同样阶数的偏微商等等．

定理 16. 对任给 $Z_1, \cdots, Z_\delta$ 而言，插值问题 (30)，(35) 式均有唯一解，必须且只须

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} \mathscr{L}_1\omega_1(u_1, v_1), & \mathscr{L}_1\omega_2(u_1, v_1)q_1, & \cdots, & \mathscr{L}_1\omega_2(u_1, v_1)q_\lambda \\ \mathscr{L}_2\omega_1(u_2, v_2), & \mathscr{L}_2\omega_2(u_2, v_2)q_1, & \cdots, & \mathscr{L}_2\omega_2(u_2, v_2)q_\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathscr{L}_\delta\omega_1(u_\delta, v_\delta), & \mathscr{L}_\delta\omega_2(u_\delta, v_\delta)q_1, & \cdots, & \mathscr{L}_\delta\omega_2(u_\delta, v_\delta)q_\lambda \end{pmatrix} \neq 0. \tag{36}$$

事实上，对于给定右端 $Z_1, \cdots, Z_\delta$ 而言，插值问题 (30)，(35) 式均有唯一解等价于相应齐方程只有零解．而由线代数理论可知，这又等价于 (36) 式成立．

必须指出，(36) 式成立与否是与 (30) 式的基础解系 $q_1, \cdots, q_\lambda$ 的具体选择无关的．事实上，无论怎样选择另一组基础解系 $q_1', \cdots, q_\lambda'$，对应 (36) 式中矩阵的后 λ 列同原来矩阵的后 λ 列是可以互相表示的．从而添第 1 列以后所得矩阵的秩数是不变的．

因此定理 16 又可叙述为

定理 17. 对任给 $Z_1, \cdots, Z_\delta$ 而言，插值问题 (30)，(35) 式均有唯一解，必须且只须存在 (30) 式的某基础解系 $q_1, \cdots, q_\delta$，使 (36) 式成立．

插值问题的解也是容易算出的．这就是

定理 18. 当 (36) 式成立时，插值问题 (30)，(35) 的解 $S(u, v)$ 可由下述行列式方程解出：

$$\begin{vmatrix} S(u, v), & \omega_1(u, v), & \omega_2(u, v)q_1, & \cdots, & \omega_2(u, v)q_\lambda \\ Z_1, & \mathscr{L}_1\omega_1(u_1, v_1), & \mathscr{L}_1\omega_2(u_1, v_1)q_1, & \cdots, & \mathscr{L}_1\omega_2(u_1, v_1)q_\lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_\delta, & \mathscr{L}_\delta\omega_1(u_\delta, v_\delta), & \mathscr{L}_\delta\omega_2(u_\delta, v_\delta)q_1, & \cdots, & \mathscr{L}_\delta\omega_2(u_\delta, v_\delta)q_\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{37}$$

亦即

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^{d(k)} \frac{\Delta_0^{(i)}}{\Delta}\omega_1^{(i)}(u, v) + \sum_{j=1}^{\lambda} \frac{\Delta_j}{\Delta}\omega_2(u, v)q_j, \tag{38}$$

其中 $\Delta_0^{(i)}$ 为以 $(Z_1, \cdots, Z_\delta)^T$ 替换 (36) 式中行列式的第 i 列 $(i = 1, \cdots, d(k))$ 所得新行列式的 $(-1)^{i-1}$ 倍，$\omega_1^{(i)}(u, v)$ 为 $\omega_1(u, v)$ 的第 i 个分量所表示的基函数，Δ_j 为以 $(Z_1, \cdots, Z_\delta)^T$ 替换 (36) 式中行列式的第 $d(k) + j$ 列 $(j = 1, \cdots, \lambda)$ 所得新行列式的 $(-1)^{d(k)+j-1}$ 倍．

为便于今后应用，似应在 (38) 式的基础上研究各种应用．特别是在有限元法方面的若干具体应用．

作者对王湘浩、徐利治和孙以丰教授的热情帮助谨致谢意．

参　考　文　献

[1] 王仁宏，多元齿的结构与插值，数学学报，**18** (1975)，2，91—106．
[2] Walker, R. J., Algebraic Curves (中译本：代数曲线，科学出版社，北京，1958)．
[3] 王仁宏、吴顺唐，关于有理 spline 函数，吉林大学学报，**1** (1978)，58—70．

ON THE ANALYSIS OF MULTIVARIATE SPLINES IN THE CASE OF ARBITRARY PARTITION

WANG RENHONG (王仁宏)
(*Jilin University, Changchun*)

ABSTRACT

This paper aims at employing algebraic-geometric methods to investigate multivariate parametric splines in the case of arbitrary partition.

The Theorems 2, 3 and 4 give necessary and sufficient conditions for a function $\boldsymbol{S}(u, v)$ to be a multivariate parametric spline.

Theorem 1 is proved to have the property that the multivariate splines are characterized by a certain "analytic extension".

In §5, the general representative formulas for multivariate splines are obtained in the case of arbitrary partition (Theorems 9 and 10).

In §7, the general theory of interpolation is established for multivariate splines.

Moreover, the multivariate rational splines are discussed.