中国科学（A辑）
第23卷 第10期 SCIENCE IN CHINA (Series A) 1993年10月

多输入多输出不确定系统的鲁棒镇定核*

贾英民 高为炳 程 勉
（北京航空航天大学第七研究室，北京 100083）

摘 要

本文主要研究了多输入多输出不确定系统的鲁棒镇定核问题，即找出系统的一个扰动子集使得从该子集的可镇定性便可推出系统的可镇定性．著名的Box定理仅是本文结果的一个特例．

关键词 鲁棒镇定、Box定理、多变量控制系统、互质分解、Gap-度量

1 引 言

近年来由于受 Kharitonov 定理的启发，人们在研究用区间参数描述的结构扰动系统时总是想找出系统的一个扰动子集，使得由该子集的稳定性便可保证区间系统的稳定性．这样的扰动子集在文献[1]中称为核，寻找这种扰动子集的研究称为找核．例如，人们已经发现一区间多项式的核是4个 Kharitonov 顶点多项式．一菱形多项式的核是8个特殊构造的多项式[2]，而一系数线性依靠区间参数变化的多项式的核是它所有的 Exposed edge 多项式[3]．所有这些结果文献[2]和[4]分别用值映射和原象映射的方法给出了简洁的证明．

目前，不确定系统的找核研究正在向鲁棒综合迈进．人们期望能获得系统的鲁棒镇定核，即找出系统的扰动子集以致于该子集的可镇定性便可推出整个扰动系统簇的可镇定性．例如，对一单输入单输出(SISO)区间系统．文献[5]已证明它在一阶控制器下的镇定核是其16个 Kharitonov 顶点系统．进一步，如果已知一阶控制器是超前的或滞后的，那么上述镇定核又可降为其中的8个 Kharitonov 顶点系统．对于单输入多输出（SIMO）或者多输入单输出(MISO)的区间向量系统，Box 定理[6]指出它的镇定核是 $(m+1)4^{(m+1)}$ 个 Kharitonov 边界系统．其中 m 是系统的输出或者输入空间的维数．特别当控制器传递函数阵每个元的分子分母仅包含复变元 s 的奇数次项或偶数次项时，系统的镇定核便可降为 $4^{(m+1)}$ 个 Kharitonov 顶点系统．关于其它有意义的找核研究可参考文献[7—11]．

在本文中，我们把找核的研究推广到了多输入多输出（MIMO）不确定系统．第一次对 MIMO 系统的鲁棒镇定核进行了刻画，给出了有关的充分必要条件．据此，Box 定理可作为特例推出．本文的特点是：(1) 对 MIMO 系统的结构不确定性给出一种新的严格描述即列约

1992-07-31 收稿，1993-01-06 收修改稿．
* 国家自然科学基金与航空科学基金资助项目．

化区间多项式阵分解模型,这种模型不仅具有较强的实际意义,而且在问题的处理中有很大的方便之处;(2)文中讨论的找核问题不再局限于结构扰动系统,而是扩展到含有结构、非结构两种扰动的不确定系统;(3)当系统存在不稳定的非结构扰动时,文中在Gap-度量下讨论了找核问题.

2 系统不确定性的严格描述

在鲁棒分析与控制中,对系统的不确定性给出一个合理的描述是非常重要的. 作为参数扰动的一种特殊情况,SISO 区间对象是一种非常有用的模型[12]. 如何把这种不确定性描述推广到一般的 $m\times P$ 维 MIMO 系统呢? 一个自然的想法是考虑如下形式的系统:

$$\phi_I=\{g(s)=\{g_{ij}(s)\}\mid g_{ij}(s)\in G_{ij}(s),i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots p\},$$

其中 $G_{ij}(s)$ 为区间有理函数. 显然这种描述在 $m=p=1$ 时可降为区间对象的情况,但是应该指出直接处理这种模型是非常困难的,因为处理 MIMO 系统的两个有力工具: 有理阵的多项式互质分解和稳定分式互质分解方法都难于用上. 这就启发我们必须寻求其它形式的推广. 为此需要对标量区间对象模型作进一步的分析,找出其应满足的基本条件. 事实上每个标量区间对象都应满足: (1)标称对象没有零极对消现象,但一般并不要求对所有扰动成立;(2)正则性 (properness) 条件, 即对任何区间系数变化,对象传递函数的分子阶数不应超过分母的阶数. 从能量的观点来看这是由问题的实际背景所决定的. 由于在标量情况下这两个基本条件一般认为是满足的且在问题的处理中没有十分明显的需要, 因而在许多文献中并不强调这一点,但对本文要处理的 MIMO 系统,这些条件就变得重要以致应明确地加以假设.

考虑 $m\times p$ 维系统簇 ϕ,其每个元具有形式

$$P(s)=N(s)D^{-1}(s),$$

其中 $N(s)\in R^{m\times p}[s],D(s)\in R^{p\times p}[s]$ 的每个矩阵元素 $n_{ij}(s)$ 和 $d_{ij}(s)$ 都分别属于区间多项式簇 N_{ij} 和 D_{ij}.

$$N_{ij}=\{n_{ij}(s)\mid n_{ij}(s)=n_{ij}^0+n_{ij}^1s+\cdots+n^{r_{ij}^n}_{ij}s^{r_{ij}^n},\quad n_{ij}^l\in[\alpha_{n_{ij}}^l,\beta_{n_{ij}}^l],l=0,1,2,\cdots r_{ij}^n\}.$$

$$D_{ij}=\{d_{ij}(s)\mid d_{ij}(s)=d_{ij}^0+d_{ij}^1s+\cdots+d^{r_{ij}^d}_{ij}s^{r_{ij}^d},\quad d_{ij}^l\in[\alpha_{d_{ij}}^l,\beta_{d_{ij}}^l],l=0,1,2,\cdots r_{ij}^d\}.$$

记 $n_{ij}(s)\in N_{ij},d_{ij}(s)\in D_{ij}$ 时对应的所有多项式阵 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的集合分别为 Ω_n 和 Ω_d, 那么系统簇 ϕ 可看作一不确定性系统并用下式表示:

$$\phi=\{P(s)=N(s)D^{-1}(s)\mid N(s)\in\Omega_n,D(s)\in\Omega_d\}.\tag{1}$$

显然当 $p=1$ 时,(1)就降为 Box 定理研究的区间向量系统,而当 $m=p=1$ 时,(1)便是标量区间系统. 因此如能把前述标量区间系统应满足的两个基本条件在(1)中加以反映, 那么(1)就可看作 SISO 区间系统到 MIMO 情况的合理推广. 从有理函数多项式分解的基本知识[11]可知,如果 $D(s)$ 为列约化 (column reduced) 的, 则 $N(s)D^{-1}(s)$ 为正则(严格正则)的充要条件是 $N(s)$ 的列次不超过(小于)$D(s)$ 的列次. 由此(1)的正则性可通过 $D(s)$ 的列约化以及 $N(s)$ 和 $D(s)$ 之间的列次关系来刻画. 致于 SISO 情况下标称对象没有零极对消现象, 则可由(1)中标称对象分解的互质性来反映, 自然这些条件在下文中总是伴随(1)被假定, 此时称(1)为列约化区间多项式分解模型.

现在对 ϕ 和 ϕ_I 作一比较，可以发现虽然它们都能把区间向量系统和标量区间系统作为特例推出，但也存在着本质的差别。如 ϕ 的区间参数最终是以非线性方式进入系统传函系数的，而 ϕ_I 的每个传函系数恰是它的区间参数。从理论上来看 ϕ 的确是标量区间对象到 MIMO 情况的合理推广，而从实际意义上来看，ϕ_I 也不失是反映系统参数变化的一个简洁模型。因此为了在(1)中反映出 ϕ 和 ϕ_I 的区别，同时更重要的是反映出参数变化模型忽略掉的系统未建模误差等高频动力学不确定性可考虑如下模型：

$$\phi_\Delta = \{P_1(s) = P(s) + \Delta P(s) \mid P(s) \in \phi, \|\Delta P(s)\|_\infty < r\}, \tag{2}$$

其中 r 为指定的某常数。

观察(2)可知这种既含有参数变化又含有非结构扰动的系统模型是比较一般的。它概括了相当大的一类不确定系统。但它也有一条限制，即 $\Delta P(s)$ 必须是稳定的以保证非结构扰动部分不改变系统在右半平面的极点数目。下述模型克服了这种限制。

$$\phi_\delta = \{P_1(s) \mid \delta(P, P_1) < b, P(s) \in \phi\}, \tag{3}$$

其中 $\delta(\cdot,\cdot)$ 表示两个对象间的 Gap-度量(其意义将在第 4 节中给出)。

综上我们给出了 MIMO 系统的 3 种不确定性描述。可以看出系统(1)和(2)多少可从现有模型中找到其雏形，但是系统(3)却是目前所有存在模型都没有暗示的。它的一般性除了允许非结构扰动是不稳定的外，还把加性和乘性两种传统的非结构扰动作了统一的表示。

3　稳定非结构扰动下的鲁棒镇定核

现在我们对模型(1)，(2)求出其反馈控制下的鲁棒镇定核。由于(1)可看作(2)在稳定非结构扰动为零时的特殊情况，因此我们先讨论模型(1)。然后再考虑模型(2)。

从上节知一个区间多项式方阵可表示为

$$\phi = \{D(s) = \{d_{ij}(s)\} \in R^{n\times n}[s] \mid d_{ij}(s) \in D_{ij}, i,j = 1,2,\cdots n\}.$$

根据文献[12]，每个区间多项式 D_{ij} 都有 4 个 Kharitonov 顶点多项式 $K(l,D_{ij})$，$(l=1,2,3,4)$ 和 4 个 Kharitonov 边界多项式 $E(l,D_{ij})$，$(l=1,2,3,4)$。如果定义 $D(s)$ 的稳定性是指 $\det(D(s))$ 是一 Hurwitz 多项式且假设任给 $D(s)\in\phi$，多项式 $\det(D(s))$ 的阶数固定不变，则关于 ϕ 的稳定性有下结论。

引理 1[1]　区间矩阵 ϕ 是稳定的当且仅当对任交换阵 $M = \{m_{ij}\} \in R^{n\times n}$，下面的矩阵集合是稳定的

$$\phi_M = \{D(s) = \{d_{ij}(s)\} \in R^{n\times n}[s] \mid d_{ij}(s) = E(l,D_{ij}), l = 1,2,3,4, m_{ij} = 1;$$
$$d_{ij}(s) = K(l,D_{ij}), l = 1,2,3,4, m_{ij} = 0\}.$$

注 1　从引理 1 可知，区间矩阵 ϕ 的稳定性问题降为 $4^{n^2}n!$ 个带有 n 个多线性参数的行列式的稳定性问题。

引理 2[12]　设 $P(s)\in R^{m\times p}(s)$ 为正则 (proper) 稳定的有理阵，不失一般性又设 $P \geq m$ 及 $P(s) = N(s)D^{-1}(s)$ 为列约化的右互质多项式分解，则有 $\|P(s)\|_\infty < 1$ 当且仅当 (1) $\|P(\infty)\| < 1$；(2) 对任酉阵 $U \in C^{p\times p}$，

$$\det\left(D(s) + U\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} N(s)\right)$$

是稳定的。

注2　由引理 2 的证明可知，$D(s)$ 为列约化的条件是至关重要的，但下面的定理表明不仅列约化条件甚至 $(N(s),D(s))$ 的右互质条件都可去掉.

定理1　设 $P(s)\in R^{m\times p}(s)$ 为正则稳定的有理函数阵，不失一般性又设 $p\geqslant m$. 那么：(1)一定存在 $P(s)$ 的一个右多项式分解 $(N'(s),D'(s))$ 满足 $\det(D'(s))$ 是稳定的; (2) $\|P(s)\|_\infty<1$ 的充要条件是 (A) $\|P(\infty)\|<1$;(B) 对任酉阵 $U\in C^{p\times p}$,

$$\det\left(D'(s)+U\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}N'(s)\right)$$

是稳定的.

证　由有理函数阵的多项式分解知结论(1)是显然的. 事实上 $D'(s)$ 可取为对角阵,其对角线元素为 $P(s)$ 相应列的最小公分母. 这样 $\det(D'(s))$ 的稳定性来自于 $P(s)$ 为稳定的有理函数阵. 记 $P(s)$ 的列约化右互质多项式分解为 $(N(s),D(s))$,则从引理 2 知为证结论(2)只需证对任酉阵 $U\in C^{p\times p}$,

$$\det\left(D(s)+U\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}N(s)\right)$$

的稳定性等价于

$$\det\left(D'(s)+U\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}N'(s)\right)$$

的稳定性. 考虑到 $(N'(s),\ D'(s))$ 不一定是右互质分解,因此存在 $p\times p$ 阵 $T(s)$ 满足 $D'(s)=D''(s)T(s)$, $N'(s)=N''(s)T(s)$ 使得 $(N''(s),D''(s))$ 是右互质的且有 $\det(T(s))$ 是稳定的. 再利用 $(N(s),\ D(s))$ 的右互质性知存在幺模 (unimodular) 阵 $M(s)$ 使得 $N''(s)=N(s)M(s),D''(s)=D(s)M(s)$,由此可得

$$\det\left(D'(s)+U\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}N'(s)\right)=\det\left(D(s)+U\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}N(s)\right)\det(M(s)T(s)).$$

注意到前述稳定性等价分析定理结论得证.

现在构造 ϕ 的子集 ϕ_λ.

任给交换阵 $M\in R^{(m+p)\times(m+p)}$ 可分为 4 块,使得 $M^{11}\in R^{p\times p},M^{21}\in R^{m\times p}$ (另外两个子阵 M^{12},M^{22} 与下面的构造无关，故不必关心它们的维数和内容). 令 ϕ_M 是所有下述对象构成的集合

$$P(s)=N(s)D^{-1}(s),$$

其中 $N(s)=\{n_{ij}(s)\}\in R^{m\times p}[s],D(s)=\{d_{ij}(s)\}\in R^{p\times p}[s]$;

$$d_{ij}(s)=\begin{cases}E(l,D_{ij}),l=1,2,3,4,m_{ij}^{11}=1,\\K(l,D_{ij}),l=1,2,3,4,m_{ij}^{11}=0,\\i,j=1,2,\cdots,p;\end{cases}\quad n_{ij}(s)=\begin{cases}E(l,N_{ij}),l=1,2,3,4,m_{ij}^{21}=1,\\K(l,N_{ij}),l=1,2,3,4,m_{ij}^{21}=0,\\i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots p.\end{cases}$$

那么我们可定义

$$\phi_\lambda=\bigcup\phi_M. \tag{4}$$

注3　如果把 ϕ_M 的每个元看作 ϕ 的一个边界对象，即对象的分子分母阵中有 p 个 Kharitonov 边界多项式而其余为 Kharitonov 顶点多项式构成的系统,则根据简单的计算可知 ϕ_λ 中共有 $(m+p)(m+p-1)\cdots(m+1)\ 4^{(m+p)p}$ 个这样的边界对象. 这个检验数

目与引理 1 的检验数目是在同一数量级上的.

定义 1　一个具有左互质分解的控制器 $C(s)=\tilde{D}_c^{-1}(s)\tilde{N}_c(s)$ 镇定 ϕ 是指对任意的 $P(s)\in\phi$, $\det(\tilde{D}_c(s)D(s)+\tilde{N}_c(s)N(s))$ 都是稳定的.

定理 2　设 ϕ 是严格正则的，则控制器 $C(s)$ 镇定 ϕ 当且仅当 $C(s)$ 镇定 ϕ_λ.

证　记$(\tilde{D}_c(s),\tilde{N}_c(s))$, $(N_c(s),D_c(s))$ 分别为 $C(s)$ 的左互质多项式分解和列约化的右互质多项式分解，则由文献[14]知存在适当维数的多项式阵 $X(s),Y(s),\tilde{X}(s),\tilde{Y}(s)$ 满足.

$$\begin{bmatrix}\tilde{D}_c & \tilde{N}_c\\ -Y & X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X} & -N_c\\ \tilde{Y} & D_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}.$$

显然

$$\det\left(\begin{bmatrix}\tilde{D}_c & \tilde{N}_c\\ -Y & X\end{bmatrix}\right)=\alpha(\text{cons.}).$$

任取 $P(s)=N(s)D^{-1}(s)\in\phi$，则有

$$\begin{bmatrix}\tilde{D}_c & \tilde{N}_c\\ -Y & X\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D & -N_c\\ N & D_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{D}_cD+\tilde{N}_cN & 0\\ * & I\end{bmatrix}.$$

两边取行列式

$$\det(\tilde{D}_cD+\tilde{N}_cN)=\alpha\det\left(\begin{bmatrix}D & -N_c\\ N & D_c\end{bmatrix}\right). \tag{5}$$

记 $D(s),D_c(s)$ 的列次阵分别为 D_h 和 D_{ch}，则上式右端括号内矩阵的列次阵具有形式

$$\begin{bmatrix}D_h & *\\ 0 & D_{ch}\end{bmatrix}.$$

由假设 $D(s),D_c(s)$ 都是列约化的，故有

$$\det\left(\begin{bmatrix}D_h & *\\ 0 & D_{ch}\end{bmatrix}\right)=\det(D_h)\det(D_{ch})\neq 0.$$

因此上述矩阵是列约化的，即(5)式对所有 $P(s)\in\phi$ 为固定阶多项式. 利用引理 1 定理得证.

注 4　在 Box 定理中没有设对象是严格正则的，而是假定了其特征多项式的阶数不变，这等价在定理 2 中假定对所有 $P(s)\in\phi$，(5)式为固定阶数.

注 5　如果在(1)中取左分解表示，完全类似地可获得与定理 1 和定理 2 对应的结论. 关于这点不再详述，需要时将直接引用.

定理 3　设 ϕ 是严格正则的，控制器为 $C(s)$. 那么 $\|(I+C(s)P(s))^{-1}C(s)\|_\infty<1$ 对 $P(s)\in\phi$ 成立，当且仅当它对 $P(s)\in\phi_\lambda$ 成立.

证　由于只有当有理阵的每个元都是稳定的有理函数时，H_∞ 范数才有意义. 因此本定理隐含了一个假设条件：$C(s)$ 镇定 ϕ. 这样对所有的 $P(s)\in\phi$, $(I+C(s)P(s))^{-1}C(s)$ 都是稳定的有理阵. 记$C(s)$的左互质分解为 $(\tilde{D}_c(s),\tilde{N}_c(s))$，则有

$$(I+C(s)P(s))^{-1}C(s)=D(s)(\tilde{D}_c(s)D(s)+\tilde{N}_c(s)N(s))^{-1}\tilde{N}_c(s). \tag{6}$$

令(6)式的左互质多项式分解为$(\bar{D}(s),\bar{N}(s))$. 那么有 $\det(\bar{D}(s))$ 是稳定的. 从注 5 和定理 1可得 $\|(I+C(s)P(s))^{-1}C(s)\|_\infty<1$，当且仅当

(1) $\|(I+C(\infty)P(\infty))^{-1}C(\infty)\|=\|C(\infty)\|<1$($\phi$ 严格正则),

（2）任给酉阵 $U \in C^{p\times p}$,

$$\det(\bar{D}(s) + \bar{N}(s)[I\ \ 0]U) \tag{7}$$

是稳定的．在(7)式中将 $\bar{D}(s)$ 提出括号可得

$$\begin{aligned}&\det(\bar{D}(s))\det(I + \bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s)[I\ \ 0]U)\\&= \det(\bar{D}(s))\det(I + D(s)(\tilde{D}_c(s)D(s) + \tilde{N}_c(s)N(s))^{-1}\tilde{N}_c(s)[I\ \ 0]U)\\&= \det(\bar{D}(s))\det(I + (\tilde{D}_c(s)D(s) + \tilde{N}_c(s)N(s))^{-1}\tilde{N}_c(s)[I\ \ 0]UD(s)).\end{aligned}$$

因为 $C(s)$ 镇定 ϕ. 所以(7)式的稳定性等价于

$$\det(\tilde{D}_c(s)D(s) + \tilde{N}_c(s)(N(s) + [I\ \ 0]UD(s)))$$

的稳定性．将上式写为矩阵形式

$$\det\left([\tilde{D}_c(s)\ \ \tilde{N}_c(s)]\begin{bmatrix}D(s)\\N(s) + [I\ \ 0]UD(s)\end{bmatrix}\right).$$

由此从定理 2 的证明过程立即可得(7)式是稳定的当且仅当

$$\det\left(\begin{bmatrix}D(s) & -N_c(s)\\N(s) + [I\ \ 0]UD(s) & D_c(s)\end{bmatrix}\right)$$

是稳定的．通过矩阵变换，上式的稳定性又等价于

$$\det\left(\begin{bmatrix}D(s) & -N_c(s)\\N(s) & D_c(s) + [I\ 0]UN_c(s)\end{bmatrix}\right) \tag{8}$$

的稳定性．再次记 D_h 和 D_{ch} 分别为 $D(s)$ 和 $D_c(s)$ 的列次阵．并令

$$D_c(s) = D_{ch}H(s) + D_{cl}(s),\ N_c(s) = N_{ch}H(s) + N_{cl}(s),$$

其中 $H(s) = \mathrm{diag}(s^{k_1}, \cdots s^{k_m})$, k_i, $i = 1, 2, \cdots m$, 为 $D_c(s)$ 的列次（注意 N_{ch} 一般不是 $N_c(s)$ 的列次阵），那么(8)式中矩阵的列次阵为

$$\begin{bmatrix}D_h & -N_{ch}\\0 & D_{ch} + [I\ \ 0]UN_{ch}\end{bmatrix}.$$

从引理 2 的证明[12]可知 $C(\infty) = N_{ch}D_{ch}^{-1}$，这样当 $\|C(\infty)\| < 1$ 时显然可得

$$\|[I\ \ 0]UC(\infty)\| \leqslant \|C(\infty)\| < 1.$$

注意到 $(N_c(s), D_c(s))$ 为 $C(s)$ 的列约化右互质多项式分解．从而有

$$\det(D_{ch} + [I\ 0]UN_{ch}) \neq 0,$$

又因 $\det(D_h) \neq 0$，故对所有 $P(s) \in \phi$

$$\det\left(\begin{bmatrix}D(s) & -N_c(s)\\N(s) & D_c(s) + [I\ 0]UN_c(s)\end{bmatrix}\right)$$

为固定阶多项式簇，则由引理 1 知(7)式在 ϕ 上成立当且仅当它在 ϕ_λ 上成立．再根据前述条件(1)与 $P(s)$ 的无关性．定理得证．

推论 1　设 ϕ 是严格正则的，则 ϕ 的镇定核与条件 $\|(I + C(s)P(s))^{-1}C(s)\|_\infty < 1$, $P(s) \in \phi$, 的核都为 ϕ_λ.

定理 4　设 ϕ 严格正则．则图 1 所示系统 ϕ_Δ 的鲁棒镇定核为 $\phi_{\Delta\lambda} = \{P_1(s) = P(s) + \Delta P(s)|P(s)$

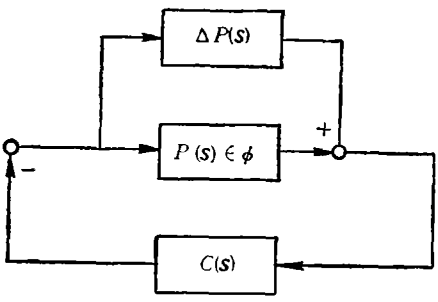

图 1　加性挠动系统

$\cdot \in \phi_\lambda, \|\Delta P(s)\|_\infty < r\}$.

证 由文献[12]知在图 1 方案下，控制器 $C(s)$ 镇定 ϕ_Δ 的充要条件是 $C(s)$ 镇定 ϕ 且有

$$\max\{\|(I + C(s)P(s))^{-1}C(s)\|_\infty : P(s) \in \phi\} \leqslant 1/r.$$

从定理 3 知上式左端等于在 ϕ_λ 上的最大值，即

$$\max\{\|(I + C(s)P(s))^{-1}C(s)\|_\infty : P(s) \in \phi\}$$
$$= \max\{\|(I + C(s)P(s))^{-1}C(s)\|_\infty : P(s) \in \phi_\lambda\},$$

由此定理得证。

4 Gap-度量下的鲁棒镇定核

设 X 是一 Banach 空间，u, v 是 X 的两个闭子空间. 记 u 中的单位球面为 S_u，那么从 u 到 v 的方向 Gap 由下式给出：

$$\boldsymbol{\delta}(u,v) = \sup_{x \in S_u} \inf_{y \in v} \|x - y\|.$$

为了测量两个闭子空间的距离，子空间 u 和 v 间的 Gap 定义为

$$\delta(u,v) = \max\{\boldsymbol{\delta}(u,v), \boldsymbol{\delta}(v,u)\}.$$

进一步我们规定 $\boldsymbol{\delta}(0,v) = 0$. 从定义有 $\boldsymbol{\delta}(u,0) = 1$ 当且仅当 $u \neq 0$. 这样总有 $0 \leqslant \delta(u,v) = \delta(v,u) \leqslant 1$. 特别如果 $\delta(u,v) < 1$，则有 $\delta(u,v) = \boldsymbol{\delta}(u,v) = \boldsymbol{\delta}(v,u)$.

一般情况下，由于上述 Gap 不满足三角不等式因而不是一种度量. 但是如果 u 和 v 都是 Hilbert 空间中的闭子空间，其 Gap 可表示为两个正交投影算子之差的范数，这时的 Gap 就是一种度量. 我们可证明所有的 Gap 诱导的拓扑是相同的，这个拓扑称为 Gap-拓扑[15]. 另外除非特别指出，下面的讨论都在标准的 Hardy 空间 H_2^n 中进行(H_2^n 是 Hilbert 空间 L_2^n 中的闭子空间因此也是一个 Hilbert 空间，详见文献[16].

设 $P_i(s) \in R^{m\times p}(s), i = 1,2$，它们的图定义为所有有序对

$$G(P_i) = \{(x, P_i x) \mid x \in \mathrm{Dom}(P_i)\}.$$

由 $P_i(s)$ 的实有理性知它们的图是闭的[16]，这样 $P_1(s), P_2(s)$ 之间的 Gap 可定义为 $\delta(P_1, P_2) = \delta(G(P_1), G(P_2))$. 可以证明如记 $(N_i(s), D_i(s))$ 为 $P_i(s)$ 的右互质稳定分式分解. 则有

$$G(P_i) = \begin{bmatrix} D_i \\ N_i \end{bmatrix} H_2^p \in \begin{bmatrix} H_2^p \\ H_2^m \end{bmatrix}.$$

引理 3[16] 设 $P_i(s) \in R^{m\times p}(s)$，$i = 1,2$，具有正规化的 (nomalized) 右互质稳定分式分解 $(N_i(s), D_i(s)), i = 1,2$，即 $(N_i(s), D_i(s))$ 不仅是右互质的而且还有 $N_i^*(s)N_i(s) + D_i^*(s)D_i(s) = I, i = 1,2$，则

$$\boldsymbol{\delta}(P_1, P_2) = \inf_{Q \in H_\infty} \left\| \begin{bmatrix} D_1 \\ N_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_2 \\ N_2 \end{bmatrix} Q \right\|_\infty,$$

其中 H_∞ 为标准的矩阵值 Hardy 空间，$G^*(s) = \overline{G^T(-\bar{s})}$.

引理 4[17] 设 $P(s) \in R^{m\times p}(s)$ 有正规化的左、右互质稳定分式分解 $P(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ 且控制器 $C(s)$ 镇定 $P(s)$. 取实数 b 满足 $0 < b \leqslant 1$，则下面的条件等价.

(1) $C(s)$ 镇定所有的 $P_1(s) = (N + \Delta_N)(D + \Delta_D)^{-1}, \Delta_N, \Delta_D \in RH_\infty$,

$\left\|\begin{pmatrix}\Delta_D\\ \Delta_N\end{pmatrix}\right\|_\infty < b$，其中 RH_∞ 表 H_∞ 中实有理元的集合；

(2) $C(s)$ 镇定所有的 $P_1(s) = (\tilde{D} + \Delta_{\tilde{D}})^{-1}(\tilde{N}, + \Delta_{\tilde{N}}), \Delta_{\tilde{N}}, \Delta_{\tilde{D}} \in RH_\infty$，$\|(\Delta_{\tilde{D}}\ \ \Delta_{\tilde{N}})\|_\infty <$ b；

(3) $C(s)$ 镇定所有的 $P_1(s)$ 满足 $\delta(P, P_1) < b$.

定理5 设 ϕ 严格正则，$0 < b < 1$，那么图 2 系统中 $C(s)$ 镇定 ϕ_δ 当且仅当它镇定 $\phi_{\delta\lambda} = \{P_1(s) | \delta(P, P_1) < b, P(s) \in \phi_\lambda\}$.

证 必要性显然故仅需证充分性. 由于 $C(s)$ 镇定 $\phi_{\delta\lambda}$ 当然也镇定 ϕ_λ，从定理 2 知它镇定 ϕ，设 $P(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) = N(s)D^{-1}(s) \in \phi$ 为正规化的左、右互质稳定因式分解，则存在 $X(s), Y(s), \tilde{X}(s), \tilde{Y}(s) \in RH_\infty$ 满足

$$\begin{pmatrix} Y & X \\ -\tilde{N} & \tilde{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & -\tilde{X} \\ N & \tilde{Y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -\tilde{X} \\ N & \tilde{Y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & X \\ -\tilde{N} & \tilde{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}.$$

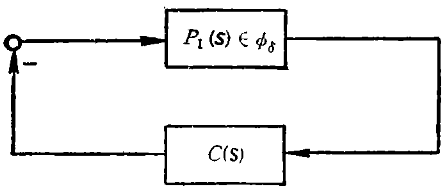

图 2 Gap-度量下的扰动系统

所有镇定 $P(s)$ 的控制器可参数化为

$$\begin{aligned} C(s) &= (Y - Q\tilde{N})^{-1}(X + Q\tilde{D}) \\ &= (\tilde{X} + DQ)(\tilde{Y} - NQ)^{-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $Q \in RH_\infty$ 为自由参数. 从文献[14]可知引理 4(1)与下条件等价

$$\|(Y - Q\tilde{N}\ \ X + Q\tilde{D})\|_\infty \leqslant 1/b, \tag{10}$$

对某个 $Q \in RH_\infty$ 成立. 按照引理 4 $C(s)$ 镇定 ϕ_{δ_1} 等价于(10)式在 ϕ_λ 上成立，进一步如果能推出(10)式在 ϕ 上成立. 那么再利用引理 4,(3), 定理得证. 事实上由于 $C(s)$ 镇定 ϕ，故对每个 $P(s) \in \phi$，则对应一个形如(9)式的控制器. 特别是当 $P(s)$ 的分解是正规的时候，完全类似于文献[17]可算得

$$\left\|\begin{pmatrix} I \\ P\end{pmatrix}(I + CP)^{-1}(I\ C)\right\|_\infty = \|(Y - Q\tilde{N}\ \ X + Q\tilde{D})\|_\infty. \tag{11}$$

这样利用(11)式左边的表达式，我们可回到用 $P(s)$ 和 $C(s)$ 的多项式互质分解来处理问题. 为方便在不引起混淆的条件下，我们仍可用 $(N(s), D(s))$ 和 $(\tilde{D}_c(s), \tilde{N}_c(s))$ 分别表示对象 $P(s)$ 的列约化右互质多项式分解以及控制器 $C(s)$ 的左互质多项式分解. 由此从(11)式可知(10)式等价于

$$\left\|\begin{pmatrix} D \\ N\end{pmatrix}(\tilde{D}_c D + \tilde{N}_c N)^{-1}(\tilde{D}_c\ \tilde{N}_c)\right\|_\infty \leqslant 1/b.$$

注意到定理 4 的证明过程，我们仅需考虑上式中的小于号，即要证明下式

$$\left\|\begin{pmatrix} D \\ N\end{pmatrix}(\tilde{D}_c D + \tilde{N}_c N)^{-1}(\tilde{D}_c\ \tilde{N}_c)\right\|_\infty < 1/b, \tag{12}$$

在 ϕ 上成立当且仅当在 ϕ_λ 上成立. 令

$$\bar{D}^{-1}(s)\bar{N}(s) \triangleq b\begin{pmatrix} D \\ N\end{pmatrix}(\tilde{D}_c D + \tilde{N}_c N)^{-1}(\tilde{D}_c\ \tilde{N}_c)$$

为其左互质多项式分解，显然由于 $C(s)$ 镇定 ϕ，$\det(\bar{D}(s))$ 可选为稳定的. 利用定理 1 得(12)式成立当且仅当 $\|(I\ \ C(\infty)\| < 1/b$，并且对任酉阵 $U \in C^{(m+p)\times(m+p)}$，

$$\det(\overline{D}(s) + \overline{N}(s)U) \tag{13}$$

是稳定的. 经过简单的计算可得上式等于

$$\beta\det\left((\widetilde{D}_c\ \widetilde{N}_c)(I + bU)\begin{bmatrix} D \\ N \end{bmatrix}\right),$$

其中 $\beta \neq 0$ 为常数且从 $0<b<1$ 知 $I + bU$ 是非奇异阵. 令 $(\widetilde{D}_c\widetilde{N}_c)(I + bU) \triangleq R(\hat{D}_c\ \hat{N}_c)$, 这里 $(\hat{D}_c\hat{N}_c)$ 为左互质的. 则(13)是稳定的等价于 $\det(R)$ 和 $\det(\hat{D}_cD + \hat{N}_cN)$ 是同时稳定的. 注意到 R 和范数 $\|(IC(\infty))\|$ 都与 $P(s) \in \phi$ 无关,故从定理 2 的证明可知(12)式在 Φ 上成立当且仅当它在 ϕ_λ 上成立. 综上定理得证.

5 结 束 语

综上我们对 MIMO 系统的 3 种不确定性给出了严格的描述并获得了它们的鲁棒镇定核. 按照文献 [1] 这种核已降到了最小. 由于在 $P = 1$ 和非结构扰动为零时, 3 种情况都可将 Box 定理作为特例推出. 因此本文结果可以看作 Box 定理在含有结构、非结构两种不确定性的 MIMO 系统中的推广. 特别, 本文证明了 Gap-度量下鲁棒镇定核的存在性. 这对研究 Gap-理论在鲁棒控制中的应用[13-20]具有重要的意义.

参 考 文 献

[1] Kokame, H., Mori, T., *Systems and Control Letters*, 1991, **16**(2): 107—116.
[2] 黄琳、王龙,中国科学, A辑,1991,(8): 839—847.
[3] Bartlett, A. C., Hollot, C. V., Huang, L., *Math. of Control, Singnals and Systems*, 1988, **1**(1): 61—71.
[4] 王恩平,中国科学, A辑,1992, (5): 490—495.
[5] Barmish, B. R., Hollot, C. V., Kraus, F. J. *et al.*, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**(6): 707—714.
[6] Chapellat, H., Bhattacharyya, S. P., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989, **34**(3): 306—311.
[7] Chapellat, H., Dahleh, M., Bhattacharyya, S. P., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1991, **36**(1): 59—67.
[8] 高为炳,非线性控制系统导论,科学出版社,北京,1989.
[9] Jia, Y. M., Gao, W. B., Cheng, M., *Systems and Control Letters*, 1992, **19**(2): 111—117.
[10] Jia, Y. M., Gao, W. B., Cheng, M., *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, Tucson, Arizona, Dec., 1992, 2796—2801
[11] 贾英民、高为炳、程勉,中国科学, A辑, 1992,(8): 867—874.
[12] Chapellat, H., Dahleh, M., Bhattacharyya, S. P., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(10): 1100—1108.
[13] 陈启宗,线性系统理论与设计,科学出版社,北京,1988.
[14] Vidyasagar, M., *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, The MIT Press, Cambridge, 1985.
[15] Stewart, G. W., Sun, J. G., *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press Inc., San Dieyo, U.S.A., 1990.
[16] Habets, L., *Robust Stabilization in the Gap-Topology*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Germany, 1991, 150.
[17] Georgiou, T. T., Smith, M., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1990, **35**(6): 673—686.
[18] El-Sakkary, A. K., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1985, **30**(3): 240—247.
[19] Zhu, S. Q, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1989, **34**(8): 848—855.
[20] Qiu, L., Davison, E. J., *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1992, **37**(6): 741—758.