

圆管的弯曲刚度和强度分析 *

宋玉泉^① 管志平^① 聂毓琴^② 管晓芳^①

(吉林大学 ① 超塑性与塑性研究所; ② 机械科学与工程学院工程力学系, 长春 130025)

摘要 根据材料力学的基本理论, 分析了圆棒和圆管的弯曲刚度, 选择圆管较佳的内外径之比为 0.7, 在两者质量相同的条件下, 得出圆管的截面刚度是圆棒的 3 倍. 在两者外径相同条件下, 得出圆管的质量只有圆棒质量的 1/2, 其截面刚度却是圆棒的 3/4 倍. 根据弹塑性的基本原理, 分析比较了空心圆管与内部充液密封圆管的屈服应力 σ_s , 由于液体的不可压缩性和材料的应变硬化效应, 增大了充液圆管的屈服应力 σ_s , 而使其弯曲强度增大. 由于弹复效应, 在动态承载情况下, 增大了承受冲击载荷的能力. 由于液体压强处处相等, 而且垂直作用于圆管内表面, 缓解了因扁化造成的局部应力集中, 增大了抵抗屈曲能力.

关键词 圆管弯曲 充液 刚度 强度

目前空心构件代替实心构件不但已得到较广泛的应用, 更有良好的发展趋势. 据美国钢铁研究院汽车应用委员会的调查结果, 在北美制造的典型轿车中, 空心轻体件的比例已从 15 年前的 10% 上升到 16%^[1]. 目前通用汽车公司(GM)已用液力成形技术制造了发动机托架、散热器支架、下梁、棚顶托梁和内支架等空心轻体件. 空心构件不但具有较高的性能质量比, 尤其是内高压成形的空心件, 由于应变硬化效应, 在刚度和承载能力方面更体现出特有的优势^[2,3]. 因此, 进一步提高空心件的刚度和强度, 是节材和科技发展的需求. 据报道, “十五”期间, 我国在铁路方面投资 3500 亿元, 每年新建铁路 1000 km, 钢轨消耗年达 90 多万吨, 其中大修换轨约 60 万吨. 如将其用空心件代替, 对于我国可持续发展战略, 具有重要的现实意义. 因此, 本文根据弹塑性的基本原理, 并假设材料连续均匀, 各向同性, 而且弹性变形服从 Hook 定律, 塑性变形服从体积不变定律, 对圆管的弯曲刚度和强度进行理论分析, 特别是对内部充液两端密封圆管的理论分析判明, 对某些空心充液构件要比内高压成形对增大刚度和强度更具优越性.

收稿日期: 2006-09-03; 接受日期: 2006-10-20

* 吉林大学创新基金和吉林大学“985 工程”资助项目

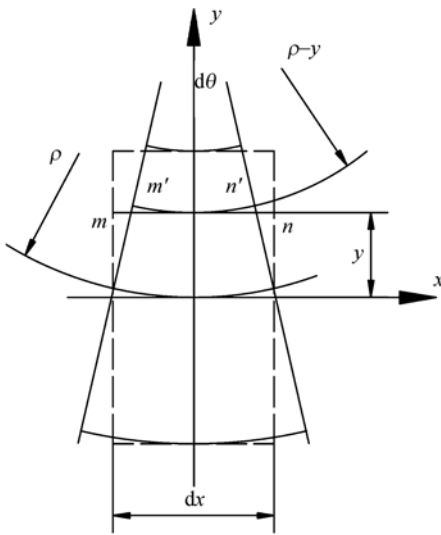


图 1 圆棒受弯的几何关系

中性层, 中性层与横截面的交线为横截面的中性轴或线. 以横截面的中性轴为 z 轴, 以横截面内垂直于中性轴的对称轴为 y 轴, x 轴为通过横截面的法线. 由图 1 的几何关系可知

$$\widehat{mn} = dx = \rho d\theta, \quad (1)$$

$$\widehat{m'n'} = (\rho - y) d\theta, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\widehat{m'n'} - \widehat{mn}}{\widehat{mn}} = -y \frac{d\theta}{dx}. \quad (3)$$

将(1)和(2)式代入(3)式, 得

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}. \quad (4)$$

把(4)式代入 Hook 定律, 得

$$\sigma = -\frac{E}{\rho} y. \quad (5)$$

1.1 弯矩 M

圆棒受纯弯, 其两端的弯矩 M 大小相等方向相反, 由于弯矩只与横截面上的正应力 σ 有关, 所以横截面内仅有正应力. 由内力和外力之间满足平衡可知, 横截面上的内力 σdA 的合力 $\int_s \sigma dA$ 与横截面上作用的轴力 N 相等, 且等于零, 即

1 圆棒和圆管的刚度

刚性是材料抵抗弹性变形的能力, 弹性模量 E 是判定材料刚性的重要力学指标, E 主要由构成材料原子键的性质、键力和晶格类型决定; 刚度是指构件抵抗弹性变形的能力, 可分为截面刚度 T_j 和构件刚度 T : 纯拉和纯压的截面刚度 T_j 是 E 与工件横截面积的乘积; 弯曲截面刚度为 EI , I 为截面对中性轴的惯性矩; 构件弯曲刚度 T 表示构件抵抗弹性弯曲变形的能力, 它不仅与截面刚度 EI 有关, 而且与构件跨度有关.

圆棒受纯弯, 其外缘受拉, 内缘受压, 在其间既不受压, 也不受拉的为中性层, 中性层与横截面的交线为横截面的中性轴或线.

$$N = \int_A \sigma dA = 0. \quad (6)$$

把(5)式代入(6)式, 得 $-\frac{E}{\rho} \int_A y dA = -\frac{E}{\rho} S_z = 0$, $S_z = \int_A y dA$ 定义为横截面对 z 轴的静矩, 由上可知 $S_z = 0$, 所以中性轴 z 一定通过棒的中心.

由力矩平衡可知, 微内力 σdA 对 y 轴的合力偶矩等于作用于横截面上弯矩 M_y , 而且为零, 即 $M_y = \int_A z \sigma dA = -\frac{E}{\rho} \int_A yz dA = 0$, $\int_A yz dA$ 定义为横截面对 y 和 z 轴的惯性矩, 并用 I_{yz} 表示, 可见 $I_{yz} = 0$. 根据几何性质可知, y 和 z 轴必须为主惯性轴, 选取 y 轴为垂直于中性轴的对称轴, 完全满足 $I_{yz} = 0$.

由力矩平衡条件, 微内力 σdA 对 z 轴的合力偶矩等于作用于横截面上弯矩 M_z , 而弯矩 $M_z = -M$, 这里规定向上的弯矩为正:

$$M_z = \int_A y \sigma dA. \quad (7)$$

把(5)式代入(7)式, 得 $M_z = -\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = -\frac{E}{\rho} I_z$, 把 $I_z = \int_A y^2 dA$ 定义为横截面对中性轴 z 的惯性矩, 于是可得纯弯时, 弯矩与曲率半径的关系

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}. \quad (8)$$

对于圆棒截面, 如图 2(a)可知, $dA = 2\sqrt{r_s^2 - y^2} dy$, 于是可得横截面对 z 轴的惯性矩 I_{sz} :

$$I_{sz} = \frac{\pi r_s^4}{4}. \quad (9)$$

对于圆管截面, 如图 2(b)所示, 可见对于外直径为 $2r_{gb}$ 和内直径为 $2r_{ga}$ 的圆管, 同理可得横截面对 z 轴的惯性矩 I_{gz} :

$$I_{gz} = \frac{\pi(r_{gb}^4 - r_{ga}^4)}{4}. \quad (10)$$

对于长度为 l 的构件而言, 构件在弯矩 M 作用下的弯曲变形, 由构件弯曲转角 θ 表示, 转角 θ 越大, 则构件的弯曲变形程度越大. 由图 1 的几何关系 $d\theta = \frac{dx}{\rho}$,

并借助(8)式, 弯曲转角 θ 可表示为 $\theta = \int_0^l \frac{1}{\rho(x)} dx = \int_0^l \frac{M}{EI} dx = \frac{M}{EI/l}$, 这里用 I 表示

对 z 轴的惯性矩. EI 为弯曲截面刚度用 T_j 表示, $\frac{EI}{l}$ 为构件弯曲刚度用 T 表示, 即 $T_j = EI$, $T = \frac{EI}{l}$. 于是可得圆棒弯曲截面刚度 T_{sj} 和构件刚度 T_s 分别为

$$T_{sj} = \frac{\pi r_s^4 E}{4}, \quad (11)$$

$$T_s = \frac{\pi r_s^4 E}{4l}. \quad (12)$$

同理可得, 圆管的弯曲截面刚度 T_{gj} 和构件刚度 T_g 分别为

$$T_{gj} = \frac{E\pi(r_{gb}^4 - r_{ga}^4)}{4}, \quad (13)$$

$$T_g = \frac{E\pi(r_{gb}^4 - r_{ga}^4)}{4l}. \quad (14)$$

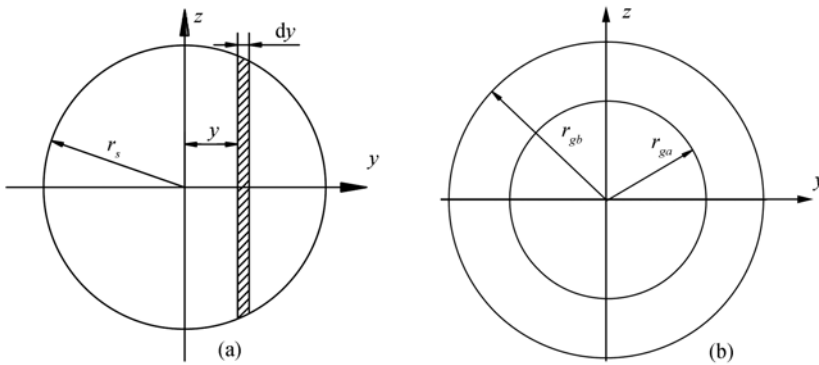


图 2 圆棒(a)和圆管(b)的横截面

1.2 弯曲刚度质量比

设材料的密度为 d , 则圆棒单位长度的质量为 $\pi r_s^2 d$, 圆管单位长度的质量为 $\pi(r_{gb}^2 - r_{ga}^2)d$, 将其分别除(11)和(13)式, 可得圆棒单位长度质量的截面刚度 T_{sm} 和圆管单位长度质量的截面刚度 T_{gm} :

$$T_{sm} = \frac{r_s^2 E}{4d}, \quad (15)$$

$$T_{gm} = \frac{(r_{gb}^2 + r_{ga}^2)E}{4d}. \quad (16)$$

令 $T_{gm}/T_{sm} = k$, 将 k 定义为圆管与圆棒的单位长度质量的截面刚度比, 由(15)和(16)式得

$$k = \frac{r_{gb}^2 + r_{ga}^2}{r_s^2}. \quad (17)$$

设定单位长度的圆棒和圆管的质量相等, 即

$$r_s^2 = r_{gb}^2 - r_{ga}^2. \quad (18)$$

令 $r_{ga}/r_{gb} = n (0 < n < 1)$, 于是得

$$k = \frac{1+n^2}{1-n^2}. \quad (19)$$

k - n 的变化关系如图 3 所示. 由(19)式可知, 当 n 趋近 1 时, 在理论上 k 即趋于无穷大. 由于已设定了单位长度的圆棒和圆管的质量相同, 这就要以增大管径并减小管壁厚为代价. 但是, 在工程中以显著不增加半径, 并能减小质量增大截面弯曲刚度为宜.

由图 3 可见, 选定 $n = 0.7$ 为佳, 并将其代入(19)式可得 $k \approx 3$, 即在质量相等的条件下, 使截面刚度增大 3 倍.

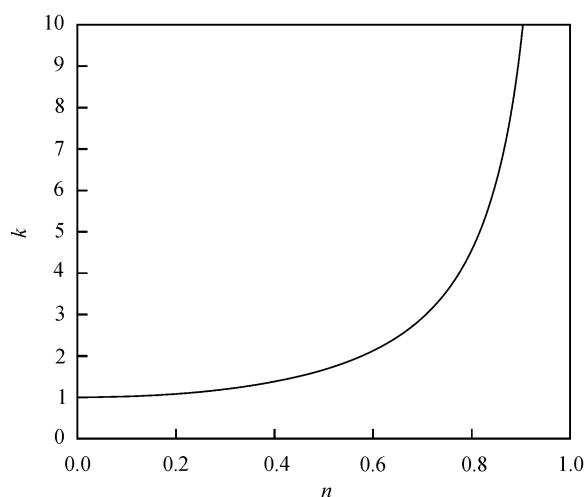


图 3 k - n 曲线

设圆管的质量为 m_g , 圆棒的质量 m_s , 选定 $n = 0.7$, 而且设定 $r_{gb} = r_s$, 则 $m_g \approx \frac{m_s}{2}$. 由(11)和(13)式可得, 在外径相同的条件下圆管的截面刚度是圆棒的 $3/4$, 而质量只有其 $1/2$.

2 圆管的弯曲强度

2.1 圆管的最大应力

弯曲强度是在弯曲载荷作用下构件抵抗失稳和破坏的能力. 在工程应用中, 由于圆管尺寸和材料力学性能等因素的不同, 破坏失效的形式也不相同. 但是圆管在弯曲载荷作用下最主要的破坏形式为达到屈服应力 σ_s 或超过许用应力 $[\sigma]$.

把(5)式代入(8)式, 得

$$\sigma = \frac{My}{I}. \quad (20)$$

以纯弯为例, 弯曲过程中应力仅为截面上的单向正应力 σ . 由图 4 可知, 当 $y_{\max} = r_{gb}$ 时, 横截面的最大正应力为 $\sigma_{\max}$. 由(20)式可知 $\sigma_{\max} = \frac{M}{I/r_{gb}}$, 可见圆管的 I/r_{gb} 越大, 圆管承受弯矩能力越大.

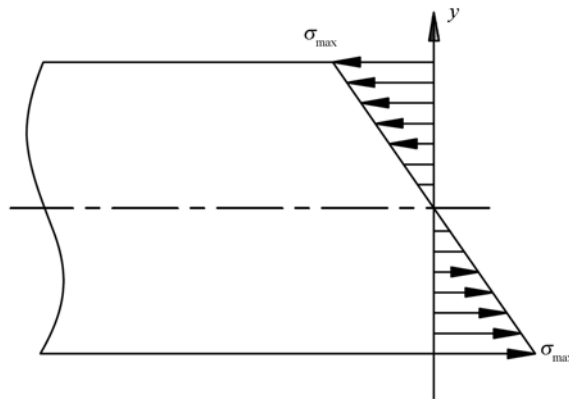


图 4 圆形管的正应力分布

2.2 圆管弯曲的截面扁化

图 5 为圆管承受弯矩 M 时的受力状况, 在横截面上沿管壁纵截面的切向上有拉应力合力 N 和压应力合力 Q . 在与中性层相垂直的纵截面内, 拉应力合力和压应力合力沿垂直于圆管横截面内中性轴方向上的投影, 产生径向合力 P . 此力使圆管横截面变扁, 这就是Brazier截面扁化效应^[4]. 一般而言, 圆管弯曲变形的曲率越大, 拉应力和压应力也越大, 圆管的截面扁化也越严重.

根据Brazier效应, 如图6所示, 截面由弯曲前的圆变为椭圆. 扁化程度影响因素很多, 其中与管的尺寸有很大关系, 当圆管被弯曲达到极限弯矩时, 出现局部屈曲, 并在屈曲处出现大幅度的截面急剧扁化, 弯矩下降, 产生弯曲失稳.

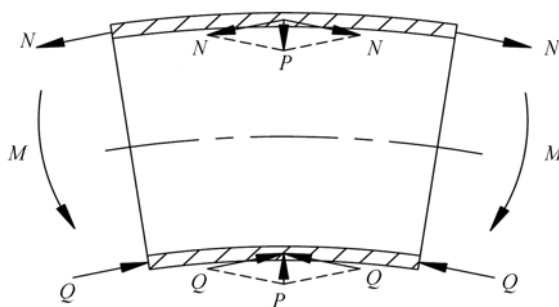


图 5 圆管弯曲受力示意图

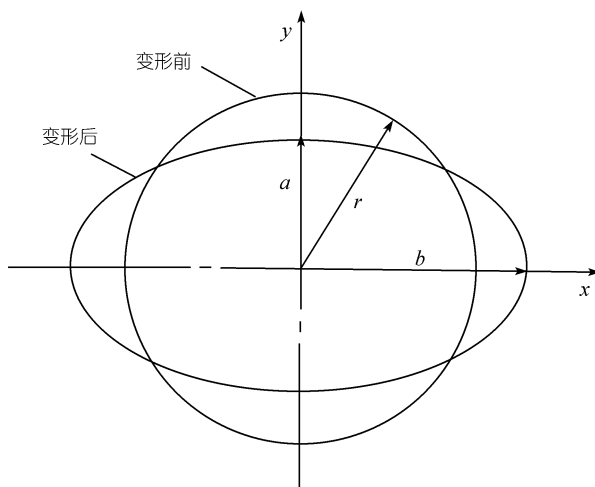


图 6 圆管弯曲时横截面扁化的示意图

2.3 圆管增强的弹塑性分析

外半径为 r_{gb} , 内半径为 r_{ga} 的圆管壁厚中线仍为半径为 r 的圆。由图 6 可见, 当圆管受弯时, 因扁化效应便由圆变为椭圆。根据对材料的假设, 可用扁化圆管内壁短半轴 a_g 代替中线椭圆的短半轴 a , 同理用 b_g 代替 b , 于是认为 $\frac{a}{r} = \frac{a_g}{r_{ga}}$,

$\frac{b}{r} = \frac{b_g}{r_{ga}}$ 并不失工程的精度要求。根据内圆周长 $l_0 = 2\pi r_{ga}$, 内圆面积 $A_0 = \pi r_{ga}^2$ 和

$$\text{椭圆周长 } l = \frac{\pi}{2} \left[\frac{13}{4}(a_g + b_g) - \frac{a_g b_g}{a_g + b_g} - \sqrt{\frac{a_g^2}{2} + \frac{b_g^2}{2} + 3a_g b_g} \right] \text{ 和椭圆面积 } A = \pi a_g \cdot b_g$$

的公式, 并依据圆和椭圆方程, 在扁化过程周长 $l_0 = l$ 不变的前提下, 计算求得扁

化率 $\zeta_a = \frac{a_g}{r_{ga}}$ 和 $\zeta_b = \frac{b_g}{r_{ga}}$ 的关系如图 7(a)所示, 面积缩小率 $\frac{A}{A_0}$ 与扁化率 ζ_a 的关

系如图 7(b)所示. 在面积 $A_0 = A$ 不变的前提下, 计算求得扁化率 ζ_b 和 ζ_a 的关系如图 8(a)所示, 周长增大率 l/l_0 与 ζ_a 的关系如图 8(b)所示.

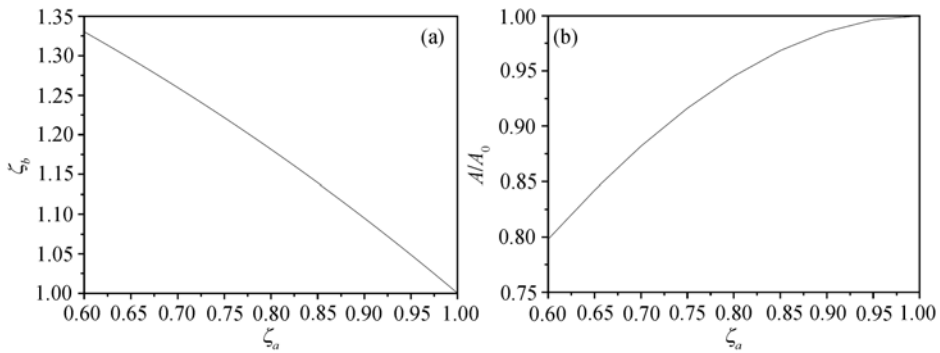


图 7 周长不变情况下的截面扁化

(a) ζ_b 与 ζ_a 的关系曲线, (b) A/A_0 与 ζ_a 的关系曲线

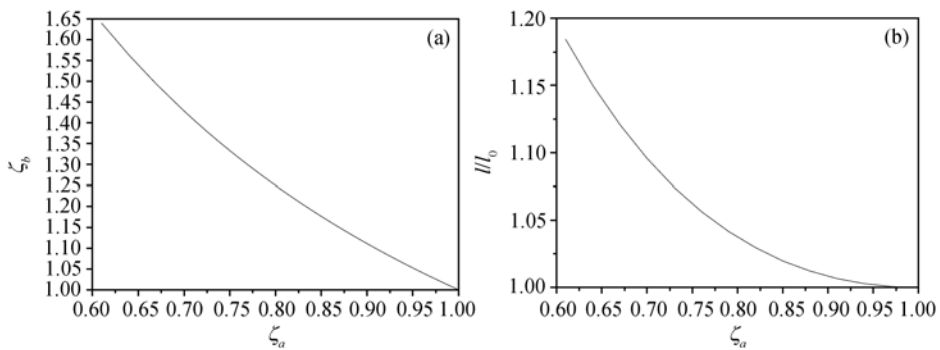


图 8 面积不变情况下的截面扁化

(a) ζ_b 与 ζ_a 的关系曲线, (b) l/l_0 与 ζ_a 的关系曲线

对管内充入液体, 并将其两端口密封. 圆管受弯扁化时, 由于受材料力学性能的约束, 管横截面的周长维持圆的周长不变. 由图 7 可知, 对应于扁化率 ζ_a 和 ζ_b , 管的横截面积由 A_0 缩小至 A . 又因液体的不可压缩性, 多余的液体必然产生外胀压力, 在液体压力平衡时其压强处处相等, 且垂直于作用面, 管口的面积与整个管壁的面积相比可略而不计, 故可忽略在内胀压力作用下沿管轴伸长的体积变化. 因此单位长度管内容积的缩小与多余的液体相等, 即

$$A_0 - A = \pi r_{ga}^2 - \pi a_g \cdot b_g.$$

要使弯曲得以进行, 单位长度椭圆管的容积必须增加, 以便容纳多余的液体. 这就要求管的内横截面积保持不变, $A_0 = A$. 由图 8 可知, 对应于扁化率 ζ_a 和 ζ_b , 椭圆的周长必须由 l_0 增至 l , l 可用以下方法求得:

(i) 以圆管内周长 $l_0 = 2\pi r_{ga}$, 借助图 8(b)测得对应 ζ_a 的 l/l_0 , 进而求得 l , 但是在图中曲线上测量数据, 这必然会引起人为的随机误差.

(ii) 由图 7(a)可求得周长不变条件下扁化率的模拟多项式:

$$\zeta_a = \sum_{i=0}^n a_i \zeta_b^i. \quad (21)$$

由(21)式所得的 ζ_a 可求得面积不变条件下周长相对增加的模拟多项式:

$$\frac{l}{l_0} = \sum_{i=0}^n b_i \zeta_a^i. \quad (22)$$

以上模拟系数列于表 1.

表 1 模拟系数

i	1	2	3	4
a_i	2.29896	-2.27044	1.65219	-0.68065
b_i	3.26862	-6.31447	5.84943	-1.80397

圆管受弯, 在伴随扁化的同时, 先发生弹性变形. 由于材料连续均匀, 各向同性, 服从Hook定律, 于是弹性变形便沿圆管的内周均匀分布, 在垂直于内周液压作用下扁化后又要向圆化恢复, 如此还能对受弯圆管起到抗冲击作用. 当周长由 l_0 增至 l_e 时, 到达弹性极限 ε_e , 此后便随扁化产生塑性应变, 当周长由 l_e 增至 l_p 时到达屈服应变 ε_p . 文献 [5]从塑性力学的基本理论导出与Ghosh^[6]和Jonas^[7]相

同形式的载荷失稳塑性应变 ε_p 表达式 $\varepsilon_p \geq \frac{n_{\dot{\varepsilon}}}{1+m_{\dot{\varepsilon}}}$, 式中 $n_{\dot{\varepsilon}}$ 为应变硬化指数的基本力学量.

$m_{\dot{\varepsilon}}$ 为应变速率敏感性指数的基本力学量, 由实验测得材料的 $n_{\dot{\varepsilon}}$ 和 $m_{\dot{\varepsilon}}$

代入该式, 便可求得 ε_p , 将 l_p 表示 l , 代入(22)式, 可得 $\ln \frac{l_p}{l_0} = \ln \frac{l_p}{l_e} + \ln \frac{l_e}{l_0} =$

$\varepsilon_e + \varepsilon_p$. 引用既有应变 ε_p 硬化又有应变速率 $\dot{\varepsilon}_p$ 硬化的拉伸本构关系:

$$\sigma_s = K \varepsilon_p^{n_{\dot{\varepsilon}}} \cdot \dot{\varepsilon}_p^{m_{\dot{\varepsilon}}}. \quad (23)$$

依据(20)和(23)式, 取 $y_{\max} = r_{gb}$, 可得最大危险弯矩

$$M_{\max} = \frac{\sigma_s I}{r_{gb}}. \quad (24)$$

分析(24)式可知, 由于(i) 圆管比圆棒的截面惯性矩 I 更大; (ii) 液体不可压缩, 内压抵抗扁化, 使圆管产生周向拉应变, 增大了管材的屈服应力 σ_s ; (iii) 液体内部压强处处相等, 且垂直作用于圆管的内表面, 缓解了因扁化造成的局部应力集中, 增加了圆管抵抗屈曲的能力, 因此充液密封圆管具有抗冲击性, 提高最大危

险弯矩 $M_{\max}$ ，增大构件抗弯能力的综合效果。

3 结论

根据弹塑性力学的基本原理，分析了圆棒和圆管的截面刚度，以及空心圆管和充液密封圆管的弯曲强度，得出如下结论：

(i) 选择圆管的内外径之比为 0.7，在两者质量相同的条件下，圆管的截面刚度是圆棒的 3 倍；在两者外径相同的条件下，圆管的质量只有圆棒的 1/2，而截面刚度却是其 3/4。

(ii) 由于圆管在弯曲时发生扁化，缩小了圆管的容积，充液密封圆管在圆管内径增大的同时使圆管在周向发生拉应变，增大了屈服应变，相应地提高了材料的屈服应力，增加了圆管的最大危险弯矩。

(iii) 由于充液圆管在扁化时，液体的内压处处相等且垂直作用于圆管的内表面，在弹性极限范围内具有抵抗冲击载荷的作用；在超过弹性极限后具有缓解因扁化产生的局部应力集中的能力，相应地增大了圆管的抗弯屈曲能力。

参 考 文 献

- 1 Dohman F, Hartl C. Hydroforming: Research and practical application. Proc ICIHT-2, Ohio, USA, 1997. 1161—1164
- 2 韩英淳, 于多年, 马若丁. 汽车轻量化中的管材液压成形技术. 汽车工艺与材料, 2003, (8): 23—27
- 3 郎利辉, 苑世剑, 王仲仁, 等. 管件内高压成形及其在汽车工业中的应用现状, 中国机械工程, 2004, 15(3): 268—272
- 4 Brazier L G. On the flexure of thin cylindrical shells and other “thin” structures. Proc R Soc, London, 1927. 104—114
- 5 宋玉泉, 索忠林, 管志平, 等. 材料参数对拉伸失稳力学影响的力学解析. 金属学报, 2006, 42(4): 337—340
- 6 Ghosh A K. Tensile instability and necking in materials with strain hardening and strain-rate hardening. Acta Metall, 1977, 25: 1413—1424
- 7 Jonas J J, Holt R A, Coleman C E. Plastic stability in tension and compression. Acta Metall, 1976, 24: 911—918