n -强 Gorenstein FP-内射模

高增辉

成都信息工程学院应用数学学院, 成都 610225

E-mail: gaozenghui@cuit.edu.cn

收稿日期: 2012-09-25; 接受日期: 2013-04-02

国家自然科学基金 (批准号: 11171240 和 11301042) 和国家自然科学基金天元基金 (批准号: 11226057) 资助项目

摘要 设 n 是正整数, 本文引入并研究 n -强 Gorenstein FP-内射模. 对于正整数 $n > m$, 给出例子说明 n -强 Gorenstein FP-内射模未必是 m -强 Gorenstein FP-内射的, 并讨论 n -强 Gorenstein FP-内射模的诸多性质. 最后, 利用 n -强 Gorenstein FP-内射模刻画 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则环.

关键词 n -强 Gorenstein FP-内射模 n -强 Gorenstein 平坦模 凝聚环 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则环
MSC (2010) 主题分类 18G25, 16D50

1 引言

投射模、内射模和平坦模是经典同调代数中基本且重要的研究对象. 作为投射模的概念的推广, Auslander 和 Bridge^[1] 对双侧 Noether 环 R 上的有限生成模定义了 G -维数为零的模. 1995 年, Enochs 和 Jenda^[2] 在一般环上引入了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念; 进一步, Enochs 等人^[3] 定义了 Gorenstein 平坦模. 近年来, Gorenstein 同调理论受到代数学界的广泛关注, 众多学者对此作了大量的研究工作^[4-12]. 2007 年, Bennis 和 Mahdou^[9] 引入并研究了 Gorenstein 投射、Gorenstein 内射和 Gorenstein 平坦模的一种特殊子模类, 分别称为强 Gorenstein 投射、强 Gorenstein 内射和强 Gorenstein 平坦模. 更进一步, 2009 年, 文献^[10] 引入并研究了 n -强 Gorenstein 投射、 n -强 Gorenstein 内射和 n -强 Gorenstein 平坦模. 特别地, 国内学者 Yang 和 Liu^[11] 以及 Zhao 和 Huang^[13] 等继续对这些子模类进行了细致的研究, 得到了许多很好的性质.

作为内射模概念的推广, FP-内射模对凝聚环的刻画起到了至关重要的作用. 称一个左 R -模 M 为 FP-内射的^[14], 若对任意的有限表现左 R -模 F , 有 $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$. 相应地, 左 R -模 M 的 FP-内射维数 $\text{FP-id}_R(M)$, 定义为使 $\text{Ext}_R^{n+1}(F, M) = 0$ 的最小正整数 n ; 若这样的 n 不存在, 则记 $\text{FP-id}_R(M) = \infty$. 进而定义 $l.\text{FP-dim}(R) = \sup\{\text{FP-id}_R(M) \mid M \text{ 是左 } R\text{-模}\}$. Stenström^[14, 命题 3.6] 证明了一个环 R 是 Von Neumann 正则环当且仅当 R 的弱整体维数等于零, 当且仅当 $l.\text{FP-dim}(R) = 0$. 最近, 我们在文献^[15] 中引入了 Gorenstein FP-内射模的概念并且利用该模类刻画了 FP-自内射的凝聚环, 这里定义的 Gorenstein FP-内射模类包含所有的 FP-内射模和所有的 Gorenstein 内射模, 并在凝聚环上表现出了良好的性质. 进而我们还讨论了一类特殊的 Gorenstein FP-内射模——强 Gorenstein FP-内射模及其众多性质, 证明了每个 Gorenstein FP-内射模都是一个强 Gorenstein FP-内射模的直

和项^[16]. 对任一正整数 n , 本文将研究一类广义形式的强 Gorenstein FP-内射模, 即 n -强 Gorenstein FP-内射模, 并推广文献 [10, 13, 16] 的一些主要结论到该类模上. 本文给出例子说明当 $n > m$ 时, n -强 Gorenstein FP-内射模未必是 m -强 Gorenstein FP-内射的, 并且刻画了 n -强 Gorenstein FP-内射模的诸多性质; 最后, 利用 n -强 Gorenstein FP-内射模刻画了 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则环.

本文所讨论的环均指有单位元的结合环, 模指酉模, $M^+ = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (其中 $\mathbb{Z}$ 是整数环, $\mathbb{Q}$ 是有理数域). 相关背景知识可参见文献 [7, 8, 10, 16].

2 预备知识

本节将给出关于 Gorenstein 同调模的一些基本概念.

定义 2.1 ^[2,3] (1) 称左 R -模 M 为 Gorenstein 内射的, 如果存在内射左 R -模的正合列

$$\cdots \rightarrow I_1 \rightarrow I_0 \rightarrow I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \cdots$$

使得 $M = \ker(I^0 \rightarrow I^1)$, 且对任意内射左 R -模 E , 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(E, -)$ 的作用下仍是正合的;

(2) 称左 R -模 M 为 Gorenstein 平坦的, 如果存在平坦左 R -模的正合列

$$\cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow F^0 \rightarrow F^1 \rightarrow \cdots$$

使得 $M = \ker(F^0 \rightarrow F^1)$, 且对任意内射右 R -模 E , 该正合列在函子 $E \otimes_R -$ 的作用下仍是正合的.

定义 2.2 ^[9,10] (1) 称左 R -模 M 为强 Gorenstein 内射的, 若存在一个内射左 R -模的正合列

$$\cdots \xrightarrow{f} I \xrightarrow{f} I \xrightarrow{f} I \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M = \ker(f)$, 且对任意内射左 R -模 E , 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(E, -)$ 的作用下仍是正合的;

(2) 称左 R -模 M 为强 Gorenstein 平坦的, 若存在一个平坦左 R -模的正合列

$$\cdots \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M = \ker(f)$, 且对任意内射右 R -模 E , 该正合列在函子 $E \otimes_R -$ 的作用下仍是正合的;

(3) 设 n 是一个正整数. 称左 R -模 M 为 n -强 Gorenstein 内射的, 若存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

这里所有 I_i 都是内射的, 使得对任意内射左 R -模 E , 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(E, -)$ 的作用下仍是正合的.

类似地可以定义 n -强 Gorenstein 平坦模.

定义 2.3 ^[15,16] (1) 称左 R -模 M 为 Gorenstein FP-内射的, 若存在一个 FP-内射左 R -模的正合列

$$\cdots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \cdots$$

使得 $M = \ker(E^0 \rightarrow E^1)$, 且对任意有限表现左 R -模 P 满足 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的.

相应地, 左 R -模 M 的 Gorenstein FP-内射维数记为 $\text{G-FP-id}_R(M)$, 其定义如下:

$\text{G-FP-id}_R(M) \leq n$ 当且仅当 M 具有一个长度为 n 的 Gorenstein FP-内射分解.

(2) 称左 R -模 M 为强 Gorenstein FP-内射的, 若存在一个 FP-内射左 R -模的正合列

$$\cdots \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M = \ker(f)$, 且对任意有限表现左 R -模 P 满足 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的.

注 2.1 文献 [16] 已证明了强 Gorenstein FP-内射模是严格介于 FP-内射模与 Gorenstein FP-内射模之间的一个模类.

3 n -强 Gorenstein FP-内射模

本节将引入并刻画 n -强 Gorenstein FP-内射模, 讨论该模类与其他模类之间的关系, 并推广文献 [10, 13, 16] 中的一些已知结论.

定义 3.1 设 n 是一个正整数. 称左 R -模 M 为 n -强 Gorenstein FP-内射的, 若存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} M \rightarrow 0, \quad (*)$$

其中每个 E_i ($0 \leq i \leq n-1$) 都是 FP-内射的, 且对任意有限表现左 R -模 P 满足 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的.

注 3.1 (1) 从定义 3.1 知, 这里的 1-强 Gorenstein FP-内射模恰好是文献 [16] 中的强 Gorenstein FP-内射模, 且在上面定义中的正合列 (*) 的每个 $\text{Im}(f_i)$ ($1 \leq i \leq n$) 也都是 n -强 Gorenstein FP-内射的;

(2) 显然若存在一个非 FP-内射的 n -强 Gorenstein FP-内射模, 则 $\text{l.FP-dim}(R) = \infty$;

(3) 对任意正整数 m, n , 若 $n \mid m$, 则每个 n -强 Gorenstein FP-内射模都必然是 m -强 Gorenstein FP-内射的.

命题 3.1 设 n 是任意的正整数, 则 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模类是关于直积 (直和) 封闭的.

证明 由文献 [17, 引理 2.1] 知, FP-内射模的直积 (直和) 仍是 FP-内射的, 因而这里只需对直积证明即可. 设 $\{M_j\}_{j \in J}$ 是一簇 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模, 则对每个 $j \in J$, 存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M_j \rightarrow E_0^{(j)} \rightarrow E_1^{(j)} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1}^{(j)} \rightarrow M_j \rightarrow 0,$$

其中每个 $E_i^{(j)}$ ($0 \leq i \leq n-1$) 都是 FP-内射的, 对任意有限表现左 R -模 P 且 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的. 于是得到下面的正合列:

$$0 \rightarrow \prod_{j \in J} M_j \rightarrow \prod_{j \in J} E_0^{(j)} \rightarrow \prod_{j \in J} E_1^{(j)} \rightarrow \cdots \rightarrow \prod_{j \in J} E_{n-1}^{(j)} \rightarrow \prod_{j \in J} M_j \rightarrow 0.$$

注意到 $\prod_{j \in J} E_{n-1}^{(j)}, \dots, \prod_{j \in J} E_0^{(j)}$ 都是 FP-内射的, 且上面正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍然正合. 因此, $\prod_{j \in J} M_j$ 是 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模. $\square$

命题 3.2 设 n 是一个正整数, 则有

(1) 每个强 Gorenstein FP-内射左 R -模都是 n -强 Gorenstein FP-内射的;

(2) 每个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模都是 Gorenstein FP-内射的.

证明 (1) 设 M 是一个强 Gorenstein FP-内射左 R -模. 利用文献 [16, 命题 2.8] 可知, 存在一个左 R -模的短正合列 $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$, 其中 E 是 FP-内射的, 且对任意的有限表现左 R -模 P 满足 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 序列 $0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, E) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M) \rightarrow 0$ 是正合的. 于是得到如下正合列:

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{f \circ g} E \xrightarrow{f \circ g} \dots \xrightarrow{f \circ g} E \xrightarrow{g} M \rightarrow 0,$$

且该序列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍保持正合. 从而 M 是 n -强 Gorenstein FP-内射的.

(2) 设 M 是一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模. 则存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} M \rightarrow 0,$$

这里每个 E_i ($0 \leq i \leq n-1$) 都是 FP-内射的, 对任意的有限表现左 R -模 P 且 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的. 于是得到正合交换图 (见图 1), 这里所有 E_i 都是 FP-内射的, 且该序列 $\mathbf{E}$ 在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的. 因此, M 是 Gorenstein FP-内射的. $\square$

下面将进一步举例说明, 对于正整数 $n > m$, n -强 Gorenstein FP-内射模未必是 m -强 Gorenstein FP-内射的. 为此, 我们先给出如下两个结论.

引理 3.1 若 $0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$ 是一个左 R -模的正合列, 其中每个 I_i 是内射的, 则对任意投射维数有限的左 R -模 G , 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(G, -)$ 的作用下仍是正合的.

证明 设 $0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$ 是左 R -模的正合列, 其中每个 I_i ($0 \leq i \leq n-1$) 是内射的. 令 $L_i = \text{Im}(I_{i-1} \rightarrow I_i)$, $i = 1, \dots, n-1$, 则可得下面的短正合列:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow L_1 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow L_1 \rightarrow I_1 \rightarrow L_2 \rightarrow 0, \\ \vdots \\ 0 \rightarrow L_{n-1} \rightarrow I_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

对任意投射维数有限的左 R -模 G 和任意的 $i \geq 1$, 有

$$\text{Ext}_R^i(G, M) \cong \text{Ext}_R^{i+1}(G, L_{n-1}) \cong \text{Ext}_R^{i+2}(G, L_{n-2}) \cong \dots \cong \text{Ext}_R^{i+n}(G, M).$$

注意到 $\text{pd}_R(G) < \infty$, 则对任意的 $i \geq 1$, 有 $\text{Ext}_R^i(G, M) = 0$. 所以, 我们得到如下正合列:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(G, M) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_0) \rightarrow \text{Hom}_R(G, L_1) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_R(G, L_1) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_1) \rightarrow \text{Hom}_R(G, L_2) \rightarrow 0, \\ \vdots \\ 0 \rightarrow \text{Hom}_R(G, L_{n-1}) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_{n-1}) \rightarrow \text{Hom}_R(G, M) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

于是可以得到正合交换图 (见图 2).

$$E = \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-2} \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_0 \circ f_n} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_0 \circ f_n} E_0 \xrightarrow{f_1} \cdots$$

$\begin{array}{c} \nearrow \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \searrow \\ 0 \end{array}$

图 1 正合交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & \text{Hom}_R(G, L_1) & & \text{Hom}_R(G, L_3) & & 0 \\
 0 \rightarrow \text{Hom}_R(G, M) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(G, I_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(G, I_2) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & \text{Hom}_R(G, L_2) & & & & 0 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & \text{Hom}_R(G, L_{n-1}) & & \text{Hom}_R(G, L_{n-2}) & & 0 \\
 \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_{n-3}) \longrightarrow \text{Hom}_R(G, I_{n-2}) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(G, I_{n-1}) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(G, M) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & \text{Hom}_R(G, L_{n-2}) & & & & 0 \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

图 2 正合交换图

从而得到下面的正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(G, M) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_0) \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(G, I_{n-1}) \rightarrow \text{Hom}_R(G, M) \rightarrow 0.$$

这就完成了证明. $\square$

众所周知, 一个环 R 称为 n -Gorenstein 环^[7] (或简称 Gorenstein 环), 若 R 是左、右自内射维数均不超过 n 的两侧 Noether 环. 下面的结论推广了文献 [16, 命题 2.4].

命题 3.3 每个 n -强 Gorenstein 内射左 R -模都是 n -强 Gorenstein FP-内射的, 并且当 R 是 Gorenstein 环时, 二者等价.

证明 设 M 是一个 n -强 Gorenstein 内射左 R -模, 则存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \cdots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 I_i ($0 \leq i \leq n-1$) 是内射的. 下面只需证对任意有限表现左 R -模 P 且 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 的作用下仍是正合的. 由引理 3.1 知, 对任意投射维数有限的左 R -模 G , 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(G, -)$ 的作用下仍保持正合. 特别地, 对任意投射维数有限的有限表现左 R -模 P , 函子 $\text{Hom}_R(P, -)$ 保持该序列的正合性. 因此, M 是 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模.

现在设 R 是 Gorenstein 环且 M 是一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模. 则存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f_0} E_0 \xrightarrow{f_1} E_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} \xrightarrow{f_n} M \rightarrow 0,$$

这里每个 E_i ($0 \leq i \leq n-1$) 是内射的. 下面将证对任意的内射左 R -模 I , 该正合列在函子 $\text{Hom}_R(I, -)$ 的作用下仍是正合的. 注意到 R 是 Gorenstein 环, 根据文献 [7, 定理 9.1.10] 可得 $\text{pd}_R(I) < \infty$. 再利用引理 3.1, 即得要证的结论成立, 故 M 是 n -强 Gorenstein 内射的. $\square$

下面的例子说明存在 2-强 Gorenstein FP-内射模但不是 1-强 Gorenstein FP-内射的.

例 3.1 考虑 Noether 局部环 $R = k[[X, Y]]/(XY)$, 其中 k 是一个域. 则由文献 [13, 例 4.8] 知, R 的两个理想 $(\bar{X})$ 和 $(\bar{Y})$ 是 2-强 Gorenstein 平坦模, 但不是 1-强 Gorenstein 平坦的, 其中 $(\bar{X})$ 和 $(\bar{Y})$ 分别表示 X 和 Y 在环 R 中的剩余类. 由文献 [13, 命题 4.9] 得 $(\bar{X})^+$ 和 $(\bar{Y})^+$ 都是 2-强 Gorenstein 内射的, 又根据文献 [11, 定理 2.4] 可知, 它们都不是 1-强 Gorenstein 内射的. 利用文献 [10, 命题 2.5] 的对偶结论, 则有 $(\bar{X})^+$ 和 $(\bar{Y})^+$ 都是 Gorenstein 内射的. 故对任意的内射模 E 和任意的 $i \geq 1$, 有 $\text{Ext}_R^i(E, (\bar{X})^+) = 0 = \text{Ext}_R^i(E, (\bar{Y})^+)$. 现在由命题 3.3 知, $(\bar{X})^+$ 和 $(\bar{Y})^+$ 都是 2-强 Gorenstein FP-内射的. 我们断言 $(\bar{X})^+$ 和 $(\bar{Y})^+$ 一定不是 1-强 Gorenstein FP-内射的. 若不然, 假设 $(\bar{X})^+$ 是 1-强 Gorenstein FP-内射的, 则存在一个短正合列 $0 \rightarrow (\bar{X})^+ \rightarrow I \rightarrow (\bar{X})^+ \rightarrow 0$, 其中 I 是内射模. 由前面的证明可知, 对任意 $i \geq 1$ 和任意的内射模 E , 有 $\text{Ext}_R^i(E, (\bar{X})^+) = 0$. 于是再根据文献 [9, 命题 2.9] 的对偶结论, 则有 $(\bar{X})^+$ 是 1-强 Gorenstein 内射的, 这即产生了矛盾.

对任意的 $n \geq 2$, 下面的例子表明当 $n \nmid m$ 时, n -强 Gorenstein FP-内射模未必是 m -强 Gorenstein FP-内射的.

例 3.2 利用文献 [13, 例 3.2], 并在该假设下, R 是一个 QF (quasi robenius) 环. 则对任意的 $1 \leq i \leq n$, 我们有如下结论:

- (1) S_i 是 n -强 Gorenstein FP-内射模;
- (2) 当 $n \nmid m$ 时, S_i 均不是 m -强 Gorenstein FP-内射的.

证明 注意到 QF 环恰好是 0- Gorenstein 环, 且在 QF 环上一个模是 n -强 Gorenstein 内射的当且仅当它是 n -强 Gorenstein 投射的. 于是由文献 [13, 例 3.2] 和命题 3.3 即知该结论成立. $\square$

Bennis 和 Mahdou [9, 命题 3.7] 证明了这样的结论, 即一个强 Gorenstein 平坦模是平坦的当且仅当它具有有限的平坦维数. 现在有下列的命题.

命题 3.4 设 R 是左凝聚环且 n 是一个正整数, 则一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模 M 是 FP-内射的当且仅当它具有有限的 FP-内射维数.

证明 必要性 必要性是显然的.

充分性 设 M 是个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模且 $\text{FP-id}_R(M) < \infty$, 则有一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 E_i 都是 FP-内射的. 设 F 是一个有限表现左 R -模. 由文献 [14, 引理 3.1] 可知, 对任意的 $i \geq 1$ 和任意的 $0 \leq j \leq n-1$, 有 $\text{Ext}_R^i(F, E_j) = 0$. 于是可得 $\text{Ext}_R^i(F, M) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(F, M)$. 注意到 $\text{FP-id}_R(M) < \infty$, 从而对任意的 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(F, M) = 0$. 再由文献 [14, 引理 3.1] 即得 M 是 FP-内射的. $\square$

下面给 n -强 Gorenstein FP-内射模一种简单刻画, 它推广了文献 [16, 命题 2.8].

定理 3.1 对任意的左 R -模 M , 以下两个条件等价:

- (1) M 是 n -强 Gorenstein FP-内射的;
- (2) 存在一个左 R -模的正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 E_i 都是 FP-内射的, 且对任意 $1 \leq i \leq n$ 和任意有限表现左 R -模 P 满足 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 都有 $\text{Ext}_R^i(P, M) = 0$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 由定义 3.1 即得.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$ 是一个左 R -模的正合列, 这里每个 E_i ($0 \leq i \leq n-1$) 都是 FP-内射的. 现在只需证对任意的有限表现左 R -模 P 且 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 函子

$\text{Hom}_R(P, -)$ 保持该序列的正合性. 类似于引理 3.1 的证明, 我们容易得到如下的正合列:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(P, M) \rightarrow \text{Hom}_R(P, E_0) \rightarrow \text{Hom}_R(P, E_1) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_R(P, E_{n-1}) \rightarrow \text{Hom}_R(P, M) \rightarrow 0.$$

因此, M 是 n -强 Gorenstein FP-内射的. 证毕. $\square$

推论 3.1 设 R 是左凝聚环且 M 是一个左 R -模. 则下面两个条件等价:

- (1) M 是 n -强 Gorenstein FP-内射的;
- (2) 存在一个左 R -模的正合列: $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 E_i 都是 FP-内射的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$ 是一个左 R -模的正合列, 其中每个 E_i 都是 FP-内射的. 对任意的有限表现左 R -模 P 且 $\text{pd}_R(P) < \infty$ 和任意的 $j \geq 1$, 由文献 [14, 引理 3.1] 可知, $\text{Ext}_R^j(P, E_i) = 0$. 故对任意 $i \geq 1$, 我们有 $\text{Ext}_R^i(P, M) \cong \text{Ext}_R^{i+n}(P, M)$. 注意到 $\text{pd}_R(P) < \infty$, 于是对任意 $i \geq 1$, 都有 $\text{Ext}_R^i(P, M) = 0$. 再根据定理 3.1 得 M 是一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模. $\square$

利用命题 3.3 和推论 3.1, 我们立即可得文献 [10, 推论 2.9] 的对偶结论如下推论.

推论 3.2 若 R 是 Gorenstein 环, 则一个左 R -模 M 是 n -强 Gorenstein 内射的当且仅当存在一个左 R -模的正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中每个 E_i 都是内射的.

下面的结论推广了文献 [16, 命题 2.11], 它表明了凝聚环上 n -强 Gorenstein FP-内射模与 n -强 Gorenstein 平坦模之间存在着紧密的联系.

命题 3.5 设 R 是左凝聚环且每个内射左 R -模具有一个有限的平坦维数. 若 M 是一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模, 则 M^+ 是一个 n -强 Gorenstein 平坦右 R -模.

证明 设 M 是一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模. 则存在一个左 R -模的正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

这里所有 E_i 都是 FP-内射的. 于是, 可得如下的正合列:

$$0 \rightarrow M^+ \rightarrow E_{n-1}^+ \rightarrow \cdots \rightarrow E_1^+ \rightarrow E_0^+ \rightarrow M^+ \rightarrow 0.$$

由于 R 是一个左凝聚环, 故由文献 [19, 定理 2.2] 可知, 每个 E_i^+ ($0 \leq i \leq n-1$) 都是平坦右 R -模. 对任意内射左 R -模 I 和任意 $i > 0$, 则有 $\text{Tor}_i^R(M^+, I) \cong \text{Tor}_{i+n}^R(M^+, I)$. 利用假设条件即知, $\text{fd}_R(I) < \infty$, 故对所有 $j \geq 1$, 都有 $\text{Tor}_j^R(M^+, I) = 0$. 因此, M^+ 是一个 n -强 Gorenstein 平坦右 R -模. $\square$

对某个整数 $n \geq 0$, 在文献 [4] 中一个环 R 称为 n -FC 环, 若 R 是左、右 FP-自内射维数都不超过 n 的双侧凝聚环.

推论 3.3 设 R 是 n -FC 环. 若 M 是一个 n -强 Gorenstein FP-内射左 R -模, 则 M^+ 是一个 n -强 Gorenstein 平坦右 R -模.

证明 由命题 3.5 和文献 [18, 定理 3.8] 即知. $\square$

记模 M 的 Gorenstein 投射维数为 $\text{Gpd}_R(M)$. Holm [8, 命题 2.27] 证明了这样的结论: 对任意左 R -模 M , $\text{Gpd}_R(M) \leq \text{pd}_R(M)$, 且当 $\text{pd}_R(M) < \infty$ 时有 $\text{Gpd}_R(M) = \text{pd}_R(M)$. 这里下面命题.

命题 3.6 设 R 是一个左凝聚环且每个内射左 R -模都具有有限的平坦维数, 则对任意的左 R -模 M , $\text{G-FP-id}_R(M) \leq \text{FP-id}_R(M)$, 且当 $\text{FP-id}_R(M) < \infty$ 时有 $\text{G-FP-id}_R(M) = \text{FP-id}_R(M)$.

证明 设 M 是一个左 R -模. 显然有 $\text{G-FP-id}_R(M) \leq \text{FP-id}_R(M)$. 现在只需证当 $\text{FP-id}_R(M)$ 有限时, $\text{FP-id}_R(M) \leq \text{G-FP-id}_R(M)$. 为此, 只需证若 M 是一个具有有限 FP-内射维数的 Gorenstein FP-内射左 R -模, 则 M 是 FP-内射的.

现在设 M 是一个 FP-内射维数有限的 Gorenstein FP-内射左 R -模. 则由文献 [15, 命题 3.7] 和 [19, 定理 2.2] 知, M^+ 是一个平坦维数有限的 Gorenstein 平坦右 R -模. 又根据文献 [13, 引理 2.3] 可得, M^+ 是平坦的. 故再利用文献 [19, 定理 2.2] 即得 M 是 FP-内射的. $\square$

推论 3.4 设 R 是 n -FC 环且 M 是一个左 (右) R -模, 则 $\text{G-FP-id}_R(M) \leq \text{FP-id}_R(M)$, 当 $\text{FP-id}_R(M) < \infty$ 时, 有 $\text{G-FP-id}_R(M) = \text{FP-id}_R(M)$. 特别地, 一个 Gorenstein FP-内射左 (右) R -模 M 是 FP-内射的当且仅当它具有有限的 FP-内射维数.

证明 由命题 3.6 和文献 [18, 定理 3.8] 立即可得. $\square$

4 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则环

本节设所有环为交换环, 我们刻画每个模都是 n -强 Gorenstein FP-内射模的 (凝聚) 环.

众所周知, 在文献 [12] 中称一个环 R 是 (强) Gorenstein Von Neumann 正则的, 如果每个 R -模都是 (强) Gorenstein 平坦的.

定义 4.1 对任意正整数 n , 我们称一个环 R 是 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则的, 若每个 R -模都是 n -强 Gorenstein 平坦的.

注 4.1 (1) 显然, 对任意 $n \geq 1$, 所有的 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则环都是 Gorenstein Von Neumann 正则的, 且 1-强 Gorenstein Von Neumann 正则环恰好是强 Gorenstein Von Neumann 正则环.

(2) 由文献 [13, 例 4.8] 可知, 2-强 Gorenstein Von Neumann 正则环未必是强 Gorenstein Von Neumann 正则的.

下面给出 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则环一个刻画.

命题 4.1 设 R 是一个环. 则以下各条件等价:

- (1) R 是 n -强 Gorenstein Von Neumann 正则的;
- (2) 对每个 R -模 M , 存在一个正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 F_i 都是平坦模;

- (3) R 是凝聚环且对每个 R -模 M , 存在一个正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 E_i 都是 FP-内射模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 利用 n -强 Gorenstein 平坦模的定义即得.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 I 是任意内射 R -模. 则由 (2) 可知, I 能够嵌入一个平坦 R -模, 即 I 是一个平坦 R -模的直和项. 于是 I 是平坦的. 因此每个内射 R -模是平坦的. 又由文献 [18, 推论 3.14] 知, R 是一个 FC 环, 所以 R 是凝聚环. 再由文献 [18, 定理 3.8] 得, 每个平坦 R -模是 FP-内射的. 从而 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 P 是一个投射 R -模. 则由 (3) 可知, 存在一个正合列

$$0 \rightarrow P \rightarrow E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{n-1} \rightarrow P \rightarrow 0,$$

其中每个 E_i 是 FP- 内射的. 于是我们有一个短正合列 $0 \rightarrow K \rightarrow E_{n-1} \rightarrow P \rightarrow 0$, 这里 $K = \text{Im}(E_{n-2} \rightarrow E_{n-1})$. 由于 P 是投射的, 故该短正合列是分裂的, 即 P 作为 E_{n-1} 的直和项是 FP- 内射的. 因此, 每个投射模是 FP- 内射的. 注意到 R 是凝聚环, 利用文献 [15, 定理 3.2] 即得 R 是一个 IF 环 (即每个内射 R - 模都是平坦模的环). 又由文献 [18, 定理 3.5] 知, 每个 FP- 内射模是平坦的. 对任意的 R - 模 M , 再利用 (3) 可知, 存在一个 R - 模的正合列

$$0 \rightarrow M \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中每个 F_i 都是平坦模. 注意到每个内射模均是平坦的, 于是对任意的内射 R - 模 I 和任意 $i \geq 1$, 则有 $\text{Tor}_i^R(I, M) = 0$. 从而, M 是一个 n - 强 Gorenstein 平坦 R - 模. 故 R 是 n - 强 Gorenstein Von Neumann 正则的, 即 (1) 成立. $\square$

特别地, 对命题 4.1 中 $n = 1$ 的情形, 我们立即可得如下推论.

推论 4.1 [12, 命题 2.5] 对任意的环 R , 以下各条等价:

- (1) R 是强 Gorenstein Von Neumann 正则的;
- (2) 对每个 R - 模 M , 存在一个短正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 F 是平坦 R - 模;
- (3) R 是凝聚环且对每个 R - 模 M , 存在一个正合列 $0 \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow M \rightarrow 0$, 其中 E 是 FP- 内射 R - 模.

推论 4.2 设 R 是一个凝聚环, 则环 R 是 n - 强 Gorenstein Von Neumann 正则的当且仅当每个 R - 模是 n - 强 Gorenstein FP- 内射模.

证明 直接由命题 4.1 和推论 3.1 即得. $\square$

注 4.2 在推论 4.2 中对于 $n = 1$ 的情形, 我们得到了在凝聚环上利用 (n -) 强 Gorenstein FP- 内射模来刻画 (n -) 强 Gorenstein Von Neumann 正则环的新途径.

致谢 感谢导师王芳贵教授的鼓励和帮助, 感谢审稿人对本文修改提出的有益意见.

参考文献

- 1 Auslander M, Bridger M. Stable Module Theory. Memoirs Amer Math Soc, vol. 94. Providence, RI: Amer Math Soc, 1969
- 2 Enochs E E, Jenda O M G. Gorenstein injective and projective modules. Math Z, 1995, 220: 611–633
- 3 Enochs E E, Jenda O M G, Torrecillas B. Gorenstein flat modules. J Nanjing Univ Math Biquarterly, 1993, 10: 1–9
- 4 Ding N Q, Chen J L. Coherent rings with finite self-FP-injective dimension. Comm Algebra, 1996, 24: 2963–2980
- 5 Xu J Z. Flat Covers of Modules. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1634. Berlin: Springer-Verlag, 1996
- 6 宋伟灵, 黄兆泳. Gorenstein 环上的 Gorenstein 平坦和内射. 中国科学 A 辑, 2008, 38: 361–364
- 7 Enochs E E, Jenda O M G. Relative Homological Algebra. Berlin: Walter de Gruyter, 2000
- 8 Holm H. Gorenstein homological dimensions. J Pure Appl Algebra, 2004, 189: 167–193
- 9 Bennis D, Mahdou N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules. J Pure Appl Algebra, 2007, 210: 437–445
- 10 Bennis D, Mahdou N. A generalization of strongly Gorenstein projective modules. J Algebra Appl, 2009, 8: 219–227
- 11 Yang X Y, Liu Z K. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules. J Algebra, 2008, 320: 2659–2674
- 12 Mahdou N, Tamekkante M, Yassemi S. On (strongly) Gorenstein Von Neumann regular rings. Comm Algebra, 2011, 39: 3242–3252
- 13 Zhao G Q, Huang Z Y. n -Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules. Comm Algebra, 2011, 39: 3044–3062
- 14 Stenström B. Coherent rings and FP-injective modules. J London Math Soc, 1970, 2: 323–329
- 15 Gao Z H, Wang F G. Coherent rings and Gorenstein FP-injective modules. Comm Algebra, 2012, 40: 1669–1679
- 16 Gao Z H. On strongly Gorenstein FP-injective modules. Comm Algebra, 2013, 41: 3035–3044

- 17 Jain S. Flat and FP-injectivity. Proc Amer Math Soc, 1973, 41: 437–442
- 18 Ding N Q, Chen J L. The flat dimensions of injective modules. Manuscripta Math, 1993, 78: 165–177
- 19 Fieldhouse D J. Character modules, dimension and purity. Glasgow Math J, 1972, 13: 144–146

n -Strongly Gorenstein FP-injective modules

GAO ZengHui

Abstract For any positive integer n , we introduce and study n -strongly Gorenstein FP-injective modules. Some examples are given to show that n -strongly Gorenstein FP-injective modules need not be m -strongly Gorenstein FP-injective modules whenever $n > m$. Many properties of n -strongly Gorenstein FP-injective modules are discussed, some known results are obtained as corollaries. Finally, we characterize n -strongly Gorenstein Von Neumann regular rings in terms of n -strongly Gorenstein FP-injective modules.

Keywords n -strongly Gorenstein FP-injective module, n -strongly Gorenstein flat module, coherent ring, n -strongly Gorenstein Von Neumann regular ring

MSC(2010) 18G25, 16D50

doi: 10.1360/012012-464