中国科学（A辑）

第23卷 第8期　SCIENCE IN CHINA (Series A)　1993年8月

强化采油数值模拟的特征差分方法和 l^2 估计*

袁益让

（山东大学数学研究所，济南 250100）

摘　要

对于二维、多组分、多相、不可压缩混合流体组成的注化学溶液（如表面活性剂、醇、聚合物）强化采油数值模拟的特征差分方法及其收敛性分析，其数学模型是一组非线性偶合偏微分方程组的初、边值问题．在考虑相互干扰有界区域的一般情况下，本文提出一类特征差分格式，利用粗细网格配套、变分形式、先验估计理论和技巧，得到了最佳阶的 l^2 误差估计结果．彻底解决了 Douglas 所提出的著名问题．

关键词　强化采油、相互干扰、有界区域、特征差分法、l^2 误差估计

油田经注水开采后，油藏中仍残留大量的原油，这些油或者被毛管力束缚住不能流动，或者由于驱替相和被驱替相间的不利流度比，使得注入流波及体积小而无法驱动原油．在注入液中加入某些化学添加剂，则可大大改善注入液的驱洗油能力．常用的化学添加剂为表面活性剂、醇和聚合物，表面活性剂和醇主要用于降低地下各相间的界面张力，从而将被束缚的油启动．聚合物被用来优化驱替相的流度以调整与被驱相之间的流度比，均匀驱动前缘，减弱高渗层指进，提高驱替液的波及效率，同时增加压力梯度等．

对于平面二相渗流驱动问题，著名数学家、油藏数值模拟创始人 Douglas 教授在 1983 年发表了奠基性论文[1]，但在数值分析时出现实质性困难，他仅研究了周期性问题，并未能得到最佳阶 l^2 估计．关于强化采油的数值模拟，国外已有数值软件应用于试生产． 关于数值分析文献[2]率先研究了注化学溶液驱油的差分方法和理论分析． 本文在考虑相互干扰有界区域的一般情况，对压力方程采用五点差分格式，对饱和度方程采用包含特征修正的五点差分格式．利用粗细网格配套、变分形式、先验估计理论和技巧，得到了最佳阶的 l^2 误差估计结果．彻底解决了 Douglas 未能解决的著名问题[1]，本文所提出的方法可以推广到三维问题，从而在能源数学这一重要领域得到了完整的理论分析结果．

1　数学模型

二维、多相、多组分、不可压缩混合流体的质量平衡方程是[3,4]

1992-08-21 收稿，1993-01-13 收修改稿．

* 国家攀登计划项目和国家"八五"攻关项目资助课题．

$$\Phi\frac{\partial C_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{j=1}^{n_p}\left[C_{ij}u_{jx_1}-\Phi S_j\left(K_{jx_1x_1}\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_1}+K_{jx_1x_2}\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_2}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\sum_{j=1}^{n_p}\left[C_{ij}u_{jx_2}-\Phi S_j\left(K_{jx_2x_1}\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_1}+K_{jx_2x_2}\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_2}\right)\right]=Q_i(C_i),$$

$$x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\Omega,\ t\in J=(0,T],\ i=1,2,\cdots,n_c, \tag{1}$$

此处

$$K_{jx_1x_1}=D_j+\frac{\alpha_L}{\phi S_j}\frac{u_{jx_1}^2}{|u_j|}+\frac{\alpha_T}{\phi S_j}\frac{u_{jx_2}^2}{|u_j|},$$

$$K_{jx_1x_2}=K_{jx_2x_1}=\frac{\alpha_L-\alpha_T}{\phi S_j}\frac{u_{jx_1}u_{jx_2}}{|u_j|},$$

$$K_{jx_2x_2}=D_j+\frac{\alpha_L}{\phi S_j}\frac{u_{jx_2}^2}{|u_j|}+\frac{\alpha_T}{\phi S_j}\frac{u_{jx_1}^2}{|u_j|},$$

C_{ij} 是组分 i 在液相 j 中的质量分数，C_i 是组分 i 在总液体中的质量分数；S_j 是液相 j 的饱和度，u_{jx_1} 和 u_{jx_2} 是在 x_1 方向和 x_2 方向的 j 相流速，$u_j=(u_{jx_1},u_{jx_2})^{\mathrm{T}}$. $K_{jx_1x_1}$, $K_{jx_1x_2}$, $K_{jx_2x_1}$, $K_{jx_2x_2}$ 是 j 相的扩散系数. $Q_i(C_i)$ 是单位孔隙介质中组分 i 的注入或采出质量流量. n_c 是组分数，n_p 是相数，Φ 是孔隙度. 需要寻求饱和度函数 $C_i(x,t)(i=1,2,\cdots,n_c)$ 和压力函数 $p(x,t)$. $S_j(j=1,2,\cdots,n_p)$, $C_{ij}(i=1,2,\cdots n_c;\ j=1,2,\cdots,n_p)$, 它们均是 $C_i(i=1,2,\cdots n_c)$ 的函数. 由质量分数和饱和度的定义：

$$\sum_{i=1}^{n_c}C_i=1,\ \sum_{i=1}^{n_c}C_{ij}=1(j=1,2,\cdots,n_p),\ \sum_{j=1}^{n_p}S_j=1.$$

对方程(1)关于 i 求和 $1\leqslant i\leqslant n_c$，可得压力方程

$$\frac{\partial u_{x_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial u_{x_2}}{\partial x_2}=\sum_{i=1}^{n_c}Q_i,\ x\in\Omega,\ t\in J. \tag{2a}$$

$$u_{x_m}=\sum_{j=1}^{n_p}u_{jx_m},\quad u_{jx_m}=-K\lambda_j\left(\frac{\partial p_j}{\partial x_m}-\gamma_j\frac{\partial z}{\partial x_m}\right),\ m=1,\ 2, \tag{2b}$$

此处 p_j 是 j 相压力，K 是绝对渗透率，λ_j 是 j 相相对渗透率，γ_j 是重力密度，z 是高度；注意 $p_j=p+p_{Cj}(S_j)$，p 是水相压力，p_{Cj} 是 j 相对于水相的毛细管力.

方程(1)能够写成下述形式：

$$\Phi\frac{\partial C_i}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p}C_{ij}u_j\right)-\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p}\Phi S_jD_j(u_j)\nabla C_{ij}\right)=Q_i,\ x\in\Omega,\ t\in J,$$

$$i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n_c-1, \tag{3}$$

这里 $u_j=(u_{jx_1},u_{jx_2})^{\mathrm{T}}$, $D_j(u_j)=D_j\mathrm{I}+\frac{|u_j|}{\Phi S_j}(\alpha_LE(u_j)+\alpha_TE^{\perp}(u_j))$ 为 2×2 矩阵，I 为单位矩阵 $E(u)=(u_iu_k/|u|^2)$, $u=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$, $E^{\perp}=\mathrm{I}-E$. 为了叙述简便，在这里不考虑毛细管力而仅研究水平的情况，

$$u_j=-K\lambda_j(S_j)\nabla p,\ u=\sum_{j=1}^{n_p}u_j=-\sum_{j=1}^{n_p}K\lambda_j(S_j)\nabla p, \tag{4}$$

则压力方程可改写为

$$-\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p} K\lambda_j(S_j)\nabla p\right)=\sum_{i=1}^{n_c} Q_i,\quad x\in\Omega,\ t\in J. \tag{5}$$

于是方程(3)可改写为

$$\Phi\frac{\partial C_i}{\partial t}-\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p} C_{ij}K\lambda_j(S_j)\nabla p\right)-\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p}\Phi S_jD_j(u_j)\nabla C_{ij}\right)=Q_i,$$
$$x\in\Omega,\ t\in J,\ i=1,2,\cdots\cdots,n_c-1. \tag{6}$$

注意到

$$\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p}C_{ij}\lambda_j(S_j)\left(\sum_{j'=1}^{n_p}\lambda_{j'}(S_{j'})\right)^{-1}u\right)=\nabla\cdot(d_i(C)\cdot u)$$

$$=\frac{\partial d_i}{\partial C_i}\nabla C_i\cdot u+\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'\frac{\partial d_i}{\partial C_k}\nabla C_k\cdot u+d_i\sum_{i'=1}^{n_c}Q_{i'}，\text{此处}$$

$$d_i=\sum_{j=1}^{n_p}C_{ij}\lambda_j(S_j)\left(\sum_{j'=1}^{n_p}\lambda_{j'}(S_{j'})\right)^{-1},$$

$C=(C_1,C_2,\cdots,C_{n_c-1})^T$；$\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'$ 表示没有 $k=i$ 的一项. 通常 $\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'$ 是影响很小的项. 于是上式可改写为

$$\Phi\frac{\partial C_i}{\partial t}+b_i\nabla C_i\cdot u-\nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p}\Phi S_jD_j(u_j)\sum_{k=1}^{n_c-1}\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}\nabla C_k\right)$$
$$=-\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'b_{ik}\nabla C_k\cdot u+g_i,\quad i=1,2,\cdots,n_c-1,\ x\in\Omega,\ t\in J, \tag{7}$$

此处 $b_i=\frac{\partial d_i}{\partial C_i}$，$b_{ik}=\frac{\partial d_i}{\partial C_k}$，$g_i(C)=Q_i-d_i\sum_{i'=1}^{n_c}Q_{i'}$.

不失一般性假定边界条件是

$$p=\gamma(x,t),\quad C_i=f_i(x,t),\quad x\in\partial\Omega,\ t\in J,\ i=1,2,\cdots,n_c-1. \tag{8}$$

初始条件为

$$C_i(x,0)=C_{i0}(x),\quad x\in\Omega,\ i=1,2,\cdots,n_c-1. \tag{9}$$

在收敛性分析中，下述假定是需要的，即矩阵是正定的，

$$\sum_{i=1}^{n_c-1}\sum_{k=1}^{n_c-1}\left\{\sum_{j=1}^{n_p}S_jD_j(u_j)\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}\right\}\xi_i\xi_k\geqslant D_*|\xi|_0^2,\quad \xi\in\mathbb{R}^{n_c-1}, \tag{10}$$

此处 $|\xi|_0^2=\sum_{i=1}^{n_c-1}\xi_i^2$，$D_*$ 是某一正常数. 这个假定在物理上也是合理的[3,4].

2　一类特征差分格式

研究二维问题. 设区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$，用 $\partial\Omega$ 表示其边界，$h=N^{-1}$，$x_{\alpha\beta}=(\alpha h,$

βh), $t^n = n\Delta t$ 和 $W(x_{\alpha\beta}, t^n) = W^n_{\alpha\beta}$, 记

$$A^n_{j,\alpha+\frac{1}{2},\beta} = \frac{1}{2}\left[a_j(C^n_{h,\alpha\beta}) + a_j(C^n_{h,\alpha+1,\beta})\right],$$

$$A^n_{j,\alpha,\beta+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[a_j(C^n_{h,\alpha\beta}) + a_j(C^n_{h,\alpha,\beta+1})\right], \tag{11a}$$

$$a^n_{j,\alpha+\frac{1}{2},\beta} = \frac{1}{2}\left[a_j(C^n_{\alpha\beta}) + a_j(C^n_{\alpha+1,\beta})\right],$$

$$a^n_{j,\alpha,\beta+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left[a_j(C^n_{\alpha\beta}) + a_j(C^n_{\alpha,\beta+1})\right], \tag{11b}$$

这里 $a_j = K\lambda_j(S_j(C))$. 设

$$\delta_{\bar{x}_1}(A^n_j\delta_{x_1}P^n_h)_{\alpha\beta} = h^{-2}\{A^n_{j,\alpha+\frac{1}{2},\beta}(P^n_{h,\alpha+1,\beta} - P^n_{h,\alpha\beta}) - A^n_{j,\alpha-\frac{1}{2},\beta}(P^n_{h,\alpha\beta} - P^n_{h,\alpha-1,\beta})\}; \tag{12a}$$

$$\delta_{\bar{x}_2}(A^n_j\delta_{x_2}P^n_h)_{\alpha\beta} = h^{-2}\{A^n_{j,\alpha,\beta+\frac{1}{2}}(P^n_{h,\alpha,\beta+1} - P^n_{h,\alpha\beta}) - A^n_{j,\alpha,\beta-\frac{1}{2}}(P^n_{h,\alpha\beta} - P^n_{h,\alpha,\beta-1})\}, \tag{12b}$$

$$\nabla_h(A^n_j\nabla_h P^n_h)_{\alpha\beta} = \delta_{\bar{x}_1}(A^n_j\delta_{x_1}P^n_h)_{\alpha\beta} + \delta_{\bar{x}_2}(A^n_j\delta_{x_2}P^n_h)_{\alpha\beta}, \tag{13}$$

则可列出压力方程的差分方程

$$-\sum_{j=1}^{n_p}\nabla_h(A^n_j\nabla_h P^n_h)_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n_c} G^n_{ih,\alpha\beta},\quad 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant N-1, \tag{14}$$

此处 $G^n_{ih,\alpha\beta} = h^{-2}\int_{x_{\alpha\beta}+Q_h} Q_i(C^n_h)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$, Q_h 为中心在原点边长为 h 的正方形。

速度 $U_{jh} = (V_j, W_j)^{\mathrm{T}}$ 按下述公式近似计算:

$$V^n_{j,\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[A^n_{j,\alpha+\frac{1}{2},\beta}\frac{P^n_{h,\alpha+1,\beta} - P^n_{h,\alpha\beta}}{h} + A^n_{j,\alpha-\frac{1}{2},\beta}\frac{P^n_{h,\alpha\beta} - P^n_{h,\alpha-1,\beta}}{h}\right], \tag{15a}$$

$$W^n_{j,\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[A^n_{j,\alpha,\beta+\frac{1}{2}}\frac{P^n_{h,\alpha,\beta+1} - P^n_{h,\alpha\beta}}{h} + A^n_{j,\alpha,\beta-\frac{1}{2}}\frac{P^n_{h,\alpha\beta} - P^n_{h,\alpha\beta}}{h}\right], \tag{15b}$$

$$U_h = \sum_{j=1}^{n_p} U_{jh}.$$

这流动实际上是沿着特征方向的,用特征线方法处理方程(7)的一阶双曲部分将具有很高的精确度[5,6]. 记 $\psi_i(x, C) = [\phi^2(x) + b_i^2(C)|u|^2]^{1/2}$, $\partial/\partial\tau_i = \psi_i^{-1}\{\phi\partial/\partial t + b_i(C)u\cdot\nabla\}$, 则饱和度方程(7)能写为下述形式:

$$\psi_i\frac{\partial C_i}{\partial\tau_i} - \nabla\cdot\left(\sum_{j=1}^{n_p}\phi S_j D_j(u_j)\sum_{k=1}^{n_c-1}\frac{\partial C_{ji}}{\partial C_k}\nabla C_k\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n_c-1} b_{ik}\nabla C_k\cdot u + g_i,\ i = 1, 2, \cdots, n_c - 1. \tag{16}$$

对饱和度方程(16),考虑逼近 $\psi_i\dfrac{\partial C_i}{\partial\tau_i}$, 在这里用向后差商沿着在 $(x_{\alpha\beta}, t^{n+1})$ 的 τ_i 特征切线方向. 此切线交 $(\Omega\times[t^n, t^{n+1}])\cup(\partial\Omega\times[t^n, t^{n+1}])$ 于点 $(\tilde{x}_i^{n+1}(x_{\alpha\beta}), t^{n+1} - \Delta\tilde{t}_i^{n+1}\cdot(x_{\alpha\beta}))$, 此处 $x_{\alpha\beta} = (\alpha h, \beta h) = (\alpha, \beta)$, 使得

$$\tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = x_{\alpha\beta} - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta\tilde{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}/\Phi_{\alpha\beta}, \tag{17}$$

此处

$$\Delta\tilde{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = -\alpha h\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta},\ \text{当}\ \alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} < 0,\ \text{和}\ 0\leqslant \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} \leqslant 1; \tag{18a}$$

$$\Delta\tilde{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = \beta h\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta},\ \text{当}\ 0\leqslant\alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} \leqslant 1,\ \text{和}\ \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} < 0; \tag{18b}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = (\alpha h - 1)\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta},$$
$$\text{当}\ \alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} > 1\ \text{和}\ 0 \leqslant \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} \leqslant 1; \tag{18c}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = (\beta h - 1)\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta},$$
$$\text{当}\ 0\leqslant\alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} \leqslant 1\ \text{和}\ \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} > 1, \tag{18d}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = \min\{\alpha h\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\beta\alpha})u^{n+1}_{\alpha\beta},\ (\beta h - 1)\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\},$$
$$\text{当}\ \alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} < 0\ \text{和}\ \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} > 1; \tag{18e}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = \min\{\alpha h\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta},\ \beta h\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\},$$
$$\text{当}\ \alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} < 0\ \text{和}\ \beta h - b_i(C^{n+1}_{n})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} < 0; \tag{18f}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = \min\{(\alpha h - 1)\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta},\ \beta h\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\},$$
$$\text{当}\ \alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} > 1\ \text{和}\ \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} < 0; \tag{18g}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = \min\{(\alpha h - 1)\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\beta\alpha})u^{n+1}_{\alpha\beta},\ (\beta h - 1)\Phi_{\alpha\beta}/b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\},$$
$$\text{当}\ \alpha h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} > 1\ \text{和}\ \beta h - b_i(C^{n+1}_{\alpha\beta})u^{n+1}_{\alpha\beta}\Delta t/\Phi_{\alpha\beta} > 1; \tag{18h}$$

$$\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = \Delta t,\ \text{其他情况}. \tag{18i}$$

则

$$\left(\psi_i\frac{\partial C_i}{\partial\tau_i}\right)(x_{\alpha\beta}, t^{n+1}) = \psi^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}[C_i(x_{\alpha\beta}, t^{n+1}) - C_i(\tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}, t^{n+1} - \tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})]/$$
$$[(x_{\alpha\beta} - \tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})^2 + (\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})^2]^{\frac{1}{2}} + o\left(\left|\frac{\partial^2 C_i}{\partial\tau_i^2}\right|\Delta\tau_i\right)$$
$$= \Phi_{\alpha\beta}[C_i(x_{\alpha\beta}, t^{n+1}) - C_i(\tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}, t^{n+1} - \tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})]/\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} + o\left(\left|\frac{\partial^2 C_i}{\partial\tau_i^2}\right|\Delta\tau_i\right), \tag{19}$$

这里 $\Delta\tau_i = [(x_{\alpha\beta} - \tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})^2 + (\tilde{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})^2]^{\frac{1}{2}}$.

注意到此处如果 $\Delta\tilde{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} < \Delta t$，则 $(\tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)},\ t^{n+1} - \Delta\tilde{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})$ 处在边界上，$C_i(\tilde{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}\ t^{n+1} - \Delta\tilde{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)})$ 用边界条件(8)的值来计算.

在具体列出差分格式时，$C^{n+1}_{\alpha\beta}$ 被差分解 $C^{n+1}_{h,\alpha\beta}$ 所逼近，$u^{n+1}_{\alpha\beta}$ 被有限差分解 $U^{n}_{h,\alpha\beta}$ 所逼近. 定义

$$\hat{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)} = x_{\alpha\beta} - b_i(C^{n}_{h,\alpha\beta})U^{n}_{h,\alpha\beta}\hat{\Delta}t^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}/\Phi_{\alpha\beta}, \tag{20}$$

此处 $\Delta\hat{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}$ 的计算只要将(18)式中的 $C^{n+1}_{\alpha\beta}$, $u^{n+1}_{\alpha\beta}$ 分别换为 $C^{n}_{h,\alpha\beta}$, $U^{n}_{h,\alpha\beta}$.

设 $\{C^{n}_{ih,\alpha\beta}, i = 1, 2, \cdots, n_c - 1\}$ 是差分解的网点值，$C^{n}_{ih}(x)$ 为网格值的双二次插值函数,即由 $C^{n}_{ih,\alpha\beta}$ 及其相邻 8 个节点值由乘积型双二次插值函数所决定. 记

$$\hat{C}^{n}_{ih}(x_{\alpha\beta}) = C_{ih}(\hat{x}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)},\ t^{n+1} - \Delta\hat{t}^{n+1}_{i(\alpha,\beta)}) = \hat{C}^{n}_{ih,\alpha\beta},$$

当 $\Delta\hat{t}^{n+1}_{i} = \Delta t$，即由 $C^{n}_{ih}(x)$ 所决定，否则由边界条件(8)给定. 对于扩散项

$$E_{ijk}(C,\ u_j) = \Phi S_j(C)D_j(u_j)\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}$$

是 2×2 矩阵,选定

$$\nabla\cdot(E_{ijk}(C_k,\ u_j)\nabla C_k)(x_{\alpha\beta},\ t^{n+1}) \approx \nabla_h(E_{ijk}(C^{n}_{k},\ U^{n}_{jh})\nabla_h C^{n+1}_{ih})_{\alpha\beta}, \tag{21}$$

此处 $\nabla_h(E\nabla_h C_{kh}^{n+1})_{\alpha\beta} = \Big\{\delta_{\bar{x}_1}(E^{11}\delta_{x_1}C_{kh}^{n+1}) + \delta_{\bar{x}_2}(E^{22}\delta_{x_2}C_{kh}^{n+1}) + \frac{1}{4}(\delta_{x_1} + \delta_{\bar{x}_1})[E^{12}(\delta_{x_2} + \delta_{\bar{x}_2})$ $\cdot C_{kh}^{n+1}] + \frac{1}{4}(\delta_{x_2} + \delta_{\bar{x}_2})[E^{21}(\delta_{x_1} + \delta_{\bar{x}_1})C_{kh}^{n+1}]\Big\}_{\alpha\beta}$,这里 δ_{x_1} 和 $\delta_{\bar{x}_1}$ 是一个空间变量的向前和向后差商. 对 $\delta_{x_2}, \delta_{\bar{x}_2}$ 的定义是类似的. $E = \begin{pmatrix} E^{11} & E^{12} \\ E^{21} & E^{22} \end{pmatrix}$, $E^{12} = E^{21}$. 对饱和度方程(7)定义下述差分格式,寻求 $t = t^{n+1}$ 时刻的差分解 $\{C_{ih}^{n+1}, i = 1, 2, \cdots, n_c - 1\}$, 满足方程组

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{\alpha\beta}\frac{C_{ih,\alpha\beta}^{n+1} - \hat{C}_{ih,\alpha\beta}^{n}}{\hat{\Delta} t_{i(\alpha,\beta)}^{n+1}} - \sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\nabla_h(E_{ijk}(C_h^n, U_{jh}^n)\nabla_h C_{kh}^{n+1})_{\alpha\beta} \\
&= -\sum_{k=1}^{n_c-1}{}' b_{ik}(C_{h,\alpha\beta}^n)[\dot{\nabla}_h C_{kh}^n \cdot U_h^n]_{\alpha\beta} + g_i(C_{h,\alpha\beta}^n), \\
&\qquad 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1,\ i = 1,\ 2, \cdots\cdots, n_c - 1,
\end{aligned} \tag{22}
$$

此处
$$\{\dot{\nabla}_h C\}_{\alpha\beta} = \left(\frac{C_{\alpha+1,\beta} - C_{\alpha-1,\beta}}{2h},\ \frac{C_{\alpha,\beta+1} - C_{\alpha,\beta-1}}{2h}\right).$$

初始逼近

$$C_{ih,\alpha\beta}^0 = C_i(x_{\alpha\beta},\ 0), 0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant N,\ i = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n_c - 1. \tag{23}$$

在差分格式(22)中, 仅由已知项 $\hat{C}_{ih,\alpha\beta}^n$ 由 $\{C_{ih,\alpha\beta}^n\}$ 的双二次插值函数决定,对欲求解的未知函数 $\{C_{ih,\alpha\beta}^{n+1}\}$ 仍为五点格式.

特征差分格式(14),(22)的计算程序是: 若已知 t^n 时刻的差分解 $\{C_{h,\alpha\beta}^n\}$,首先由差分格式(14)求出差分解 $\{P_{h,\alpha\beta}^n\}$, 由正定性推出问题有唯一解;再由(15)式算出近似速度 $\{U_{h,\alpha\beta}^n\}$. 最后由格式(22)求出差分解 $\{C_{h,\alpha\beta}^{n+1}\}$, 由正定性条件(10)保证解存在且唯一.

3 收敛性分析

设 $\pi = p - P_h$, $\xi_i = C_i - C_{ih}$, 此处p, $C_i(i = 1, 2, \cdots, n_c - 1)$ 为问题的精确解, P_h, $C_{ih}(i = 1,\ 2, \cdots, n_c - 1)$ 为差分解. 对压力方程(5)可直接推出

$$-\sum_{j=1}^{n_p}\nabla_h(a_j\nabla_h p)_{\alpha\beta}^n = \sum_{i=1}^{n_c} G_{i,\alpha\beta}^n + \delta_{\alpha\beta}^n,\ 1 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant N - 1, \tag{24}$$

此处
$$G_{i,\alpha\beta}^n = h^{-2}\int_{x_{\alpha\beta}+\Omega_h} Q_i(C_i^n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,\ \ |\delta_{\alpha\beta}^n| \leqslant M\{h^2 + \Delta t\}.$$

对于正方形区域 $\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} | 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$ 中的矩形网格 $\bar{\Omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$,记 $\bar{\omega}_1 = \{x_{1\alpha} | \alpha = 0, 1, \cdots, N\}$, $\bar{\omega}_2 = \{x_{2\beta} | \beta = 0, 1, \cdots, N\}$, $\omega_1^+ = \{x_{1\alpha} | \alpha = 1, 2, \cdots, N\}$, $\omega_2^+ = \{x_{2\beta} | \beta = 1,\ 2, \cdots, N\}$. 在等距网格的情况

$$h_i = x_i - x_{i-1} = h = \frac{1}{N},\ \ h_0 = h_N = \frac{h}{2}.$$

记号 $|f|_0 = \langle f,\ f\rangle^{\frac{1}{2}}$ 表示离散空间 $l^2(\Omega)$ 的模.

$$\langle f, g\rangle = \sum_{\bar{\omega}_1} h_\alpha \sum_{\bar{\omega}_2} h_\beta f(x) g(x) = \sum_{1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant N-1} f_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} h^2$$

$$+\frac{h^2}{2}\sum_{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N-1}\{f_{0\beta}g_{0\beta}+f_{N\beta}g_{N\beta}+f_{\alpha0}g_{\alpha0}+f_{\alpha N}g_{\alpha N}\}$$
$$+\frac{h^2}{4}\{f_{00}g_{00}+f_{0N}g_{0N}+f_{N0}g_{N0}+f_{NN}g_{NN}\} \tag{25}$$

表示离散空间的内积，$\langle A\nabla_h f,\nabla_h f\rangle$ 对应于 $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)$的离散空间 $h^1(\Omega)$ 的加权半模平方

$$\langle A\nabla_h f,\ \nabla_h f\rangle=\sum_{\omega_1^+}h_\alpha\sum_{\bar\omega_2}h_\beta\{A(x)[\delta_{\bar x_1}f(x)]^2\}$$
$$+\sum_{\bar\omega_1}h_\alpha\sum_{\omega_2^+}h_\beta\{A(x)[\delta_{\bar x_2}f(x)]^2\}. \tag{26}$$

从方程(24)减去(14)式可得下述误差方程：

$$\sum_{j=1}^{n_p}\nabla_h(A_j(C_h^n)\nabla_h\pi^n)_{\alpha\beta}=\sum_{j=1}^{n_p}\nabla_h([a_j(C^n)-a_j(C_h^n)]\nabla_h p^n)_{\alpha\beta}$$
$$+\sum_{i=1}^{n_c}(G_i^n-G_{ih}^n)_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha\beta}^n,\ 1\leqslant\alpha,\beta\leqslant N-1. \tag{27}$$

对上式乘以 $\pi_{\alpha\beta}^n$ 求和，注意到在边界节点上其值为零，应用分部求和公式可得

$$\sum_{j=1}^{n}\langle A_j(C_h^n)\nabla_h\pi^n,\ \nabla_h\pi^n\rangle=-\sum_{j=1}^{n_p}\langle[a_j(C^n)-a_j(C_h^n)]\nabla_h p^n,\nabla_h\pi^n\rangle$$
$$+\sum_{i=1}^{n_c}\langle G_i^n-G_{ih}^n,\ \pi^n\rangle+\langle\delta^n,\ \pi^n\rangle. \tag{28}$$

注意到此处 $\sum_{j=1}^{n_p}A_j(C_h^n)\geqslant a_*>0$ 和应用离散形式的 Poincáre 不等式可得

$$|\nabla_h\pi^n|_0^2\leqslant M\left\{\sum_{i=1}^{n_c}|\xi_i^n|_0^2+h^4+(\Delta t)^2\right\}, \tag{29}$$

此处 $|\nabla_h f|_0$ 表示 f 的离散半模.

其次讨论饱和度误差方程. 由(16)和(22)式可得

$$\Phi_{\alpha\beta}\frac{\xi_{i,\alpha\beta}^{n+1}-(C_i(\tilde x_{i,\alpha\beta}^n)-\hat C_{ih,\alpha\beta}^n)}{\hat\Delta t_{i(\alpha,\beta)}^{n+1}}-\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\nabla_h(E_{ijk}(C_h^n,\ U_{jh}^n)\nabla_h\xi_k^{n+1})_{\alpha\beta}$$
$$=\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\nabla_h\left\{\left[(\Phi S_j(C^{n+1})D_j(u_j^{n+1})\ \frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}\ (C^{n+1})\right.\right.$$
$$\left.\left.-\Phi S_j(C_h^n)D_j(U_{jh}^n)\ \frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}\ (C_h^n)\right]\nabla_h C_i^{n+1}{}_{\alpha\beta}\right\}$$
$$+\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'\{b_{ik}(C^{n+1})\nabla C_k^{n+1}\cdot u^{n+1}-b_{ik}(C_h^n)\dot\nabla_h C_{kh}^n\cdot U_h^n\}_{\alpha\beta}$$

$$+\{g_i(C^{n+1})-g_i(C_h^n)\}_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\alpha\beta}^{n+1},\quad 1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant N-1,\tag{30}$$

此处 $|\varepsilon_{\alpha\beta}^{n+1}|\leqslant M\{h^2+\Delta t\}$. 注意到此时节点值 $\{\xi_{i,\alpha\beta}^n\}$ 的分片双二次插值,可将其分解为

$$\xi_{i,\alpha\beta}^{n+1}-(C_i(\tilde{x}_{i,\alpha\beta}^n)-\hat{C}_{ih,\alpha\beta}^n)=(\xi_{i,\alpha\beta}^{n+1}-\hat{\xi}_{i,\alpha\beta}^n)+(C_i(\tilde{x}_{i,\alpha\beta}^n)-C_i(\hat{x}_{i,\alpha\beta}^n))$$
$$-(I-I_2)C_i^n(x_{i,\alpha\beta}^n).\tag{31}$$

此处 I 是恒等算子, I_2 是双二次插值算子. 若问题的解有一定的光滑性,则有

$$|C_i^n(\tilde{x}_{i,\alpha\beta}^n)-C_i^n(\hat{x}_{i,\alpha\beta}^n)|\leqslant M(\Delta t+|\xi_{i,\alpha\beta}^n|+|\nabla_h\pi_{\alpha\beta}^n|)\Delta t_{i,\alpha,\beta}^{n+1}.\tag{32}$$

由(30)—(32)式可推出下述估计式:

$$\Phi_{\alpha\beta}\frac{\xi_{i,\alpha\beta}^{n+1}-\hat{\xi}_{i,\alpha\beta}^n}{\hat{\Delta}t_{i,\alpha\beta}^{n+1}}-\Phi_{\alpha\beta}\frac{(I-I_2)C_i^n(\hat{X}_{i,\alpha\beta}^n)}{\hat{\Delta}t_{i,\alpha,\beta}^{n+1}}-\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\nabla_h(E_{ijk}(C_h^n,$$
$$U_{jh}^n)\nabla_h\xi_k^{n+1})_{\alpha\beta}\leqslant M\left\{\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_{i,\alpha\beta}^n|+|\nabla_h\pi_{\alpha\beta}^n|+h^2+\Delta t\right\}$$
$$+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\nabla_h\left\{\left[\Phi S_j(C^{n+1})D_j(u_j^{n+1})\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}(C^{n+1})\right.\right.$$
$$\left.\left.-\Phi S_j(C_h^n)D_j(U_{jh}^n)\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}(C_h^n)\right]\nabla_h C_k^{n+1}\right\}_{\alpha\beta}$$
$$+\sum_{k=1}^{n_c-1}\{b_{ik}(C_k^n)\dot{\nabla}_h C_{kh}^n\cdot U_h^n-b_{ik}(C^{n+1})\nabla C_k^{n+1}\cdot u^n\}_{\alpha\beta},\tag{33}$$

记 $\Omega_{h,1}^{n+1}=\{x_{\alpha\beta}\in\Omega_h;\ \Delta\hat{t}_{i,\alpha\beta}^{n+1}=\Delta t\}$, $\Omega_{h,2}^{n+1}=\Omega_h\backslash\Omega_{h,1}^{n+1}$, 注意到

$$\langle\Phi(\xi_i^{n+1}-\hat{\xi}_i^n)/\hat{\Delta}t_i,\ \xi_i^{n+1}\rangle=\langle\Phi(\xi_i^{n+1}-\hat{\xi}_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}$$
$$+\langle\Phi\xi_i^{n+1}/\hat{\Delta}t_i^{n+1},\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_h^{n+1}\geqslant\langle\Phi(\xi_i^{n+1}-\xi_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}$$
$$+\langle\Phi(\xi_i^n-\hat{\xi}_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}+\langle\Phi\xi_i^{n+1}/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,2}^{n+1}$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\langle\Phi\xi_i^{n+1},\ \xi_i^{n+1}\rangle-\frac{1}{\Delta t}\langle\Phi\xi_i^{n+1},\ \xi_i^n\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}+\langle\Phi(\xi_i^n$$
$$-\hat{\xi}_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}\geqslant\frac{1}{2\Delta t}\{|\Phi^{\frac{1}{2}}\xi_i^{n+1}|_0^2-|\Phi^{\frac{1}{2}}\xi_i^n|_0^2\}+\langle\Phi(\xi_i^n$$
$$-\hat{\xi}_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1},\tag{34}$$

则对(33)式乘以 $\xi_{i,\alpha\beta}^{n+1}$ 求和,并应用分步求和公式和估计式(34)可得

$$\frac{1}{2\Delta t}\{|\Phi^{\frac{1}{2}}\xi_i^{n+1}|_0^2-|\Phi^{\frac{1}{2}}\xi_i^n|_0^2\}+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\langle E_{ijk}(C_h^n,\ U_{jh}^n)\nabla_h\xi_k^{n+1},\ \nabla_h\xi_i^{n+1}\rangle$$
$$\leqslant\langle\Phi(\hat{\xi}_i^n-\xi_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}+\left\langle\Phi\frac{(I-I_2)C_i^n(X_i^n)}{\hat{\Delta}t_i^{n+1}},\ \xi_i^{n+1}\right\rangle$$
$$+M\left\{\sum_{i=1}^{n_c-1}[|\xi_i^n|_0^2+|\xi_i^{n+1}|_0^2]+|\nabla_h\pi^n|_0^2+h^4+(\Delta t)^2\right\}$$
$$+\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\left(\left[\Phi S_j(C^{n+1})D_j(u_j^{n+1})\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}(C^{n+1})\right.\right.$$

$$- \Phi S_j(C_h^n)D_j(U_{jh}^n)\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}(C_h^n)\Big]\nabla_h C_k^{n+1},\ \nabla\xi_i^{n+1}\Big\rangle$$

$$+\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'\langle b_{ik}(C_h^n)\dot{\nabla}_h C_{kh}^n\cdot U_h^n - b_{ik}(C^{n+1})\nabla C_k^{n+1}\cdot u^{n+1},\ \xi_i^{n+1}\rangle. \tag{35}$$

由正定性条件(10)可以推得上式左端第二项有

$$\sum_{i=1}^{n_c-1}\sum_{k=1}^{n_c-1}\sum_{j=1}^{n_p}\langle E_{ijk}(C_h^n,U_{jh}^n)\nabla_h\xi_k^{n+1},\nabla_h\xi_i^{n+1}\rangle \geqslant D_*\sum_{k=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_k^{n+1}|_0^2. \tag{36}$$

现在估计(35)式右端第一项，注意到

$$\hat{\xi}_{i,\alpha\beta}^n - \xi_{i,\alpha\beta}^n = -\int_{x_{\alpha\beta}}^{\hat{x}_{i,\beta\alpha}^{n+1}}\Delta\xi_i^n\frac{b_i(C_{i,\alpha\beta}^n)U_{h,\alpha\beta}^n d\sigma}{|b_i(C_{h,\alpha\beta}^n)U_{h,\alpha\beta}^n|},\ x_{\alpha\beta}\in\Omega_{h,1}^{n+1} \tag{37}$$

可得　$$|\hat{\xi}_i^n-\xi_i^n|^2\Omega_{h,1}^{n+1}\leqslant M|U_h^n|_0^2\left\{1+M|U_h^n|_\infty\frac{\Delta t}{h}\right\}|\nabla_h\xi_i|_0^2(\Delta t)^2. \tag{38}$$

注意到 $|U_n^h|_\infty\leqslant M\{1+|\nabla_h\pi^n|_\infty\}$，引入归纳法假定

$$\sup_{0\leqslant n\leqslant L}|\nabla_h\pi^n|_\infty\to 0,\ (h,\ \Delta t)\to 0, \tag{39}$$

则有 $|U_h^n|_\infty\leqslant M$。当剖分参数满足下述限定:

$$\Delta t = O(h^2) \tag{40}$$

时，则由(38)式可以推得

$$\langle\Phi(\hat{\xi}_i^n-\xi_i^n)/\Delta t,\ \xi_i^{n+1}\rangle\Omega_{h,1}^{n+1}\leqslant\varepsilon|\nabla_h\xi_i^n|_0^2+M|\xi_i^{n+1}|_0^2. \tag{41}$$

再次引入归纳法假定

$$\sup_{0\leqslant n\leqslant L}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_i^n|_\infty\to 0, \tag{42}$$

由(39),(40)和(42)式，对(35)式最后二项进行估计有

$$\sum_{j=1}^{n_p}\sum_{k=1}^{n_c-1}\Big\langle\Big[\Phi S_j(C^{n+1})D_j(u_j^{n+1})\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}(C^{n+1})-\Phi S_j(C_h^n)D_j(U_{jh}^n)$$
$$\cdot\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_k}(C_h^n)\Big]\nabla_h C_i^{n+1},\nabla_h\xi_i^{n+1}\Big\rangle\leqslant\varepsilon|\nabla_h\xi_i^{n+1}|_0^2$$
$$+M\left\{\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_i^n|_0^2+|\nabla_h\pi^n|_0^2+h^4+(\Delta t)^2\right\}, \tag{43}$$

$$\sum_{k=1}^{n_c-1}{}'\langle b_{ik}(C_h^n)\dot{\nabla}_h C_{kh}^n\cdot U_h^n-b_{ik}(C^{n+1})\nabla C_k^{n+1}\cdot u^n,\ \xi_i^{n+1}\rangle$$
$$\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_k^n|_0^2+M\left\{\sum_{i=1}^{n_c-1}[|\xi_i^n|_0^2+|\xi_i^{n+1}|_0^2]+|\nabla_h\pi^n|_0^2+h^4+(\Delta t)^2\right\}. \tag{44}$$

对估计式(35)右端第二项，应用 Peano 核定理，由文献[5]可得估计

$$\left|\left\langle\Phi\frac{(I-I_i)C_i^n(\hat{x}_i^n)}{\hat{\Delta}t_i^{n+1}},\ \xi_i^{n+1}\right\rangle\right|\leqslant M\{h^4+|\xi_i^{n+1}|_0^2\}. \tag{45}$$

对(35)式关于 $1\leqslant i\leqslant n_c-1$ 相加，由(36)—(45)式可得

$$\frac{1}{2\Delta t}\left\{\sum_{i=1}^{n_c-1}|\Phi^{\frac{1}{2}}\xi_i^{n+1}|_0^2-\sum_{i=1}^{n_c-1}|\Phi^{\frac{1}{2}}\xi_i^n|_0^2\right\}+\frac{D^*}{2}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_i^{n+1}|_0^2$$

$$-\frac{D_*}{2}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_i^n|_0^2\leqslant M\left\{\sum_{i=1}^{n_c-1}[|\xi_i^n|_0^2+|\xi_i^{n+1}|_0^2]+h^4+(\Delta t)^2\right\}. \tag{46}$$

对上式乘以 $2\Delta t$，并对时间 t 从0开始累加至 L，注意到 $\xi_i^0=0$ 可得

$$\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_i^{L+1}|_0^2+\sum_{n=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_i^{n+1}|_0^2\Delta t\leqslant M\left\{\sum_{n=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_i^n|_0^2\Delta t+h^4+(\Delta t)^2\right\}. \tag{47}$$

应用 Gronwall 引理得到

$$\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_i^{L+1}|_0^2+\sum_{n=0}^{L}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_i^{n+1}|_0^2\Delta t\leqslant M\{h^2+(\Delta t)^2\}. \tag{48}$$

组合(48)和(29)式可得

$$|\nabla_h\pi^{L+1}|_0^2+\sum_{i=1}^{n_c-1}|\xi_i^{L+1}|_0^2+\sum_{n=0}^{L}\sum_{i=1}^{n_c-1}|\nabla_h\xi_i^{n+1}|_0^2\Delta t\leqslant M\{h^4+(\Delta t)^2\}. \tag{49}$$

下面检验归纳法假定(39)，(42)．首先讨论(39)式，对于 $n=0$ 时，因为 $\xi_i^0=0$，由(26)式剖分限定(40)以及逆估计可以推出(39)式显然成立．若 $1\leqslant n\leqslant L$ 假定成立，由(49)式和可以推出 $|\nabla_h\pi^{L+1}|_\infty\leqslant Mh^{-1}|\nabla_h\pi^{L+1}|_0\leqslant Mh^{-1}\{h^2+\Delta t\}\leqslant Mh$，剖分限定(40)

归纳假定当 $n=L+1$ 时(39)式成立．同样的推理可证归纳法假定(42)也是正确的．

定理 若问题(5)—(9)的精确解具有适当的光滑性，采用差分格式(14)，(22)逐层计算，若其剖分参数满足限制性条件(40)，则下述误差估计式成立：

$$\|p-P_h\|_{\bar L_\infty([0,T];h^1(\Omega))}+\sum_{i=1}^{n_c-1}\|C_i-C_{ih}\|_{\bar L_\infty([0,T];L^2(\Omega))}$$

$$+\sum_{i=1}^{n_c-1}\|C_i-C_{ih}\|_{\bar L_2([0,T];h^1(\Omega))}\leqslant M\{h_2+\Delta t\}, \tag{50}$$

这里常数 M 依赖于 $C_i(i=1,2,\cdots,n_c-1)$，p 及其导函数．对有界区域的情况，得到了最佳阶 l^2 误差估计，彻底解决了 Douglas 提出的著名问题．

参 考 文 献

[1] Douglas, J. Jr., *SIAM J. Numer. Anal.*, 1983, **20**: 681—689.
[2] 袁益让、王文洽，应用科学学报，1991，**9**(2)：143—153.
[3] Cohen, M. F., *SPE 13513, Enghth SPE Sgmposium on Reservoir*, Dallas, Texas, 1985, 10—13.
[4] Ewing, R. E., Yuan Yirang, L. G., *Proceeding of the Seventh International Conference on Finite Element Method in Flow Problems*. The Unversity of Alabama in Hunstsille, Hunstsilla, Alabama, 1989, 1266—1271.
[5] Douglas, J. Jr., Russell, T. F., *SIAM J. Numer. Anal.*, 1982, **19**: 871—885.
[6] Russell, T. F., *SIAM J. Nuner. Anal.*, 1985, 22: 970—1013.