关于大系统周期解的存在性

王慕秋　王　联　　　吕　绍　明
（中国科学院数学研究所，北京）（河南师范大学数学系，新乡）

本文借助 Ляпунов 函数方法，研究系统

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t) \tag{1}$$

的解的有界性、周期解的存在性与唯一性问题，这里 $x\in R^n$，$A(t)$ 为 $n\times n$ 阶矩阵，$A(t)$，$f(t)$ 均为 t 的连续周期函数，其周期为 ω.

由此出发，我们进一步研究具有分解

$$\frac{dx_i}{dt}=A_{ii}(t)x_i+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}A_{ij}(t)x_j+f_i(t)\ (i=1,\cdots,r) \tag{2}$$

的复合系统

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t)$$

存在平稳振荡的充分条件.

最后，我们将研究具有分解

$$\frac{dx_i}{dt}=g_i(x_i,t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}A_{ij}(t)x_j+f_i(t)\ (i=1,\cdots,r) \tag{3}$$

的非自治非线性复合系统

$$\frac{dx}{dt}=g(x,t)$$

的解的有界性问题，关于这个系统的周期解的存在性、唯一性等问题，我们将另文讨论.

定理 1　在系统 (1) 中，$x\in R^n$，$A(t)$ 为 $n\times n$ 阶矩阵，其元素为 t 的连续函数，假设 $[A^T(t)+A(t)]$ 的特征方程之根当 $t\geqslant t_0$ 时均为负，且满足 $\mu_i(t)\leqslant-\delta<0$ $(i=1,\cdots,n)$；$f(t)=(f_1(t),\cdots,f_n(t))^T$ 连续有界，当 $t\geqslant t_0$ 时，有 $|f_i(t)|\leqslant F_i$ $(i=1,\cdots,n)$，这里 $\delta>0$，$F_i\geqslant 0$ 均为常量，则系统 (1) 的解是一致最终有界的.

证　对系统 (1) 作 Ляпунов 函数 $v=x^Tx$，则有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\delta x_i^2+\sum_{i=1}^{n}2|f_i(t)||x_i|\leqslant-\sum_{i=1}^{n}\delta x_i^2+\sum_{i=1}^{n}2F_i|x_i|,$$

利用不等式：当 $a>0$，$b\geqslant 0$，则对所有 $0\leqslant z<\infty$，有

$$-az^2+bz\leqslant-\frac{a}{2}z^2+\frac{b^2}{2a}.$$

本文 1986 年 11 月 12 日收到.

上式为

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\delta}{2}x_i^2 + \frac{2F_i^2}{\delta}\right) = -\frac{\delta}{4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{\delta}{4}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{2F_i^2}{\delta}.$$

因此,存在区域

$$\Omega:\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 < \frac{8}{\delta^2}\sum_{i=1}^{n}F_i^2,$$

在这个区域的补域

$$\Omega^c:\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \geqslant \frac{8}{\delta^2}\sum_{i=1}^{n}F_i^2$$

和 $I(t_0 \leqslant t < +\infty)$ 所确定的乘积空间 $\Omega^c \times I$ 上,存在一个正定函数 $v(x) = x^T x$, 有

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} \leqslant -\frac{\delta}{4}x^T x,$$

满足文献 [1] 中定理 2.2.27 中的一切条件,故系统 (1) 的解是一致最终有界的,其有界域为 Ω.

定理 2 如果系统 (1) 中的 $A(t)$, $f(t)$ 除满足定理 1 中的条件以外,还满足 $A(t+\omega) = A(t)$, $f(t+\omega) = f(t)$, 则系统 (1) 存在唯一的周期为 ω 的周期解,系统 (1) 的其他所有解当 $t \to \infty$ 时都趋于这个解.

证 利用文献 [2] 中定理 1.32, 系统 (1) 有一个周期解当且仅当系统 (1) 有一个有界解. 根据定理 1 知, 系统 (1) 的解是有界的,故在定理 2 的条件下, 可得出系统 (1) 存在周期为 ω 的周期解.

至于周期解唯一性的证明,我们只要证明系统 (1) 是非常稳定的[3],这点可由

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{4}$$

的零解的全局稳定性保证,在定理的条件下, 利用 Ляпунов 函数方法极易证明 (4) 的零解是全局稳定的 (证明从略). 因此系统 (1) 的周期为 ω 的周期解是唯一的,且当 $t \to \infty$ 时,系统 (1) 的所有解都趋于这个周期解.

下面考虑具有分解

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ii}(t)x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} A_{ij}(t)x_j + f_i(t)\ \ (i = 1, \cdots, r) \tag{2}$$

的大系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

的解的有界性和周期解的存在性与唯一性等问题,这里 $x \in R^n$, $A(t)$ 为 $n \times n$ 阶矩阵, $x_i \in R^{n_i}$, $x_i = \mathrm{col}(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)})$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 且有 $n_1 + \cdots + n_r = n$. $A_{ii}(t)$ 为 $n_i \times n_i$ 阶矩阵, 假设 $[A_{ii}^T(t) + A_{ii}(t)]$ 的特征方程之根对所有 $t \geqslant t_0$ 均有 $\mu_j^{(i)}(t) \leqslant -\delta < 0$, $j = 1, \cdots, n_i$, $i = 1, \cdots, r$. 我们称矩阵 $A_{ij}(t)$ $(i \neq j)$ 的元素为关联系数,以 $a_{pq}(t)$ 表之. 假设当 $t \geqslant t_0$ 时, 有 $|a_{pq}(t)| \leqslant \eta$, $f_i(t) \in R^{n_i}$, $f_i(t) = (f_1^{(i)}(t), \cdots, f_{n_i}^{(i)}(t))^T$, 并设当 $t \geqslant t_0$ 时, $|f_1^{(i)}(t)| \leqslant F, \cdots, |f_{n_i}^{(i)}(t)| \leqslant F$, $(i = 1, \cdots, r)$, $F > 0$ 为常量.

我们对子系统

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ii}(t)x_i, \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{5}$$

作 Ляпунов 函数 $V_i = x_i^T x_i$, 取

$$V = \sum_{i=1}^{r} V_i = \sum_{i=1}^{r} x_i^T x_i$$

作为系统 (2) 的 Ляпунов 函数,类似于定理 1 的证明. 我们可得下面结论:

定理 3 如果矩阵 $(A_{ii}^T(t) + A_{ii}(t))$ $(i = 1, \cdots, r)$ 的特征方程的所有根当 $t \geqslant t_0$ 时均满足 $\lambda(t) \leqslant -\delta < 0$, 并且关联项系数 $a_{pq}(t)$ 以及 $f(t)$ 当 $t \geqslant t_0$ 时分别满足

$$|a_{pq}(t)| \leqslant \eta \text{ 及 } |f_1^{(i)}(t)| \leqslant F, \cdots, |f_{n_i}^{(i)}(t)| \leqslant F \quad (i = 1, \cdots, r),$$

这里 $\eta > 0$, $F > 0$ 均为常量,则当下列不等式

$$\eta < \frac{\delta}{2(N + n)}, \quad (\text{其中 } N = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \{n - n_i\} \geqslant 0)$$

成立时,系统 (2) 的解是一致最终有界的.

定理 4 如果系统 (2) 中的 $A_{ii}(t)$, $A_{ij}(t)$ $(i \neq j)$ 和 $f(t)$ 除了满足定理 3 的条件以外,还假定 $A(t)$ 及 $f(t)$ 均是周期为 ω 的周期函数,则系统 (2) 存在唯一的周期为 ω 的周期解,系统 (2) 的所有其他解当 $t \to \infty$ 时,都趋于这个周期解.

若对孤立子系统

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ii}(t)x_i, \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{5}$$

我们利用文献 [4] 中所构造的 Ляпунов 函数 $V_i(t, x_i)$ 作为其 Ляпунов 函数,再取

$$V(t, x) = \sum_{i=1}^{r} V_i(t, x^{(i)})$$

作为大系统 (2) 的 Ляпунов 函数. 我们有下面结论

定理 5 如果 $A(t + \omega) = A(t)$, $f(t + \omega) = f(t)$, $A(t)$ 的元素可微有界: $|a_{ij}(t)| \leqslant a$, $|f_i(t)| \leqslant F$, 其中 a 及 F 均为正常数,且满足:

(i) 每个子系统的特征方程 $|A_{ii}(t) - \lambda I_i| = 0$ 之根均具有负实部,即存在 $\delta^{(i)} > 0$ ($\delta^{(i)}$ 与 t 无关),使得当 $t \geqslant t_0$ 时,有

$$\mathrm{Re}\lambda_j^{(i)}(A_{ii}(t)) \leqslant -\delta^{(i)} < 0.$$

(ii) 矩阵 $A_{ii}(t)$ 中元素 $a_{kl}^{(i)}(t)$ 满足

$$|\dot{a}_{kl}^{(i)}(t)| < \varepsilon_i, \text{ 当 } t \geqslant t_0,$$

其中

$$\varepsilon_i = \min_{\substack{t \geqslant t_0 \\ 1 \leqslant k \leqslant n_k}} \left\{ \frac{\delta^{(i)} K_1^{(i)}}{Q_k^{(i)}(t) + a P_k^{(i)}(t)} \right\} > 0,$$

这里 $K_1^{(i)}$, $Q_k^{(i)}(t)$ 及 $P_k^{(i)}(t)$ 如文献 [4] 中所示.

(iii) 关联项系数 $a_{pq}(t)$ 当 $t \geqslant t_0$ 时满足 $|a_{pq}(t)| \leqslant E$, 当不等式

$$E < \frac{B}{2nA}$$

成立,这里

$$B = \min_{1 \leqslant s \leqslant r} \{n_s \delta^{(s)} K_1^{(s)}\}, \quad A = \max\{n_s |c^{*(s)}(t)| M^{(s)}(t)\},$$

$$M^{(s)}(t) = \max_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n_s \\ 1 \leqslant i \leqslant n_s}} |V_{ik}^{(s)}(t)|.$$

$V_{ik}^{(s)}(t)$ 及 $C^{*(s)}(t)$ 可参考文献 [4].

则系统 (2) 存在唯一的周期为 ω 的周期解. 系统 (2) 的所有解当 $t \to \infty$ 时趋于这个周期解.

最后,我们研究具有分解

$$\dot{x}_i = g_i(x_i, t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} A_{ij}(t)x_j + f_i(t) \quad (i = 1, \cdots, r) \tag{3}$$

的复合系统

$$\frac{dx}{dt} = g(x, t) + f(t),$$

这里 $x_i = \mathrm{col}(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)})$, $g_i(x_i, t) = \mathrm{col}(g_1^{(i)}(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}, t), \cdots, g_{n_i}^{(i)}(x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}, t))$, $i = 1, \cdots, r$, $n_1 + \cdots + n_r = n$, $x^T = (x_1^T, \cdots, x_r^T)$, $x_i \in R^{n_i}$, $t \in J = [t_0, \infty)$, g_i: $R^{n_i} \times J \to R^{n_i}$. 下面总假设 $g_i(x_i, t) = 0$ 对所有 $t \in J$ 成立,当且仅当 $x_i = 0$. 关联项系数为 $A_{ij}(t)$ 中的元素,以 $a_{pq}(t)$ 表之. 设 $|a_{pq}(t)| \leqslant B$ 当

$$t \in J,\ f_i(t) \in R^{n_i},\ f_i(t) = (f_1^{(i)}(t), \cdots, f_{n_i}^{(i)}(t))^T,\ f_i(t)$$

连续,且当 $t \geqslant t_0$ 时, 有 $|f_1^{(i)}(t)| \leqslant F, \cdots, |f_{n_i}^{(i)}(t)| \leqslant F$ $(i = 1, \cdots, r)$ 这里 B 与 F 均为大于零的常量. 有下面定理

定理 6 假设 $g_i(x_i, t)$ 关于 x_i 是可微的,且 $g_i(x_i, t)$ 的雅可比矩阵

$$g_{ix_i}(x_i, t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}} & \cdots & \dfrac{\partial g_1^{(i)}}{\partial x_{n_i}^{(i)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_{n_i}^{(i)}}{\partial x_1^{(i)}} & \cdots & \dfrac{\partial g_{n_i}^{(i)}}{\partial x_{n_i}^{(i)}} \end{pmatrix}$$

是连续的. 以 $\mu_i(x_i, t)$ 表示矩阵 $g_{ix_i}(x_i, t) + g_{ix_i}^T(x_i, t)$ 的最大特征值, 若有 $\mu_i(x_i, t) \leqslant -2\mu < 0$ 对 $(x_i, t) \in R^{n_i} \times J$ $(i = 1, \cdots, r)$, 且关联项系数 $|a_{pq}(t)| \leqslant B$ $t \in J$, 如果满足不等式

$$B < \frac{\mu}{N + n} \ (\text{其中}\ N = \max_{1 \leqslant i \leqslant r} \{(n - n_i)\}),$$

则系统 (3) 的解是一致最终有界的.

参 考 文 献

[1] Michel, A. N. and Miller, R. K., *Qualitative Analysis of Large-scale Dynamical Systems*, Academic Press, New York, London, 1977.

[2] Reissig, R., Sansane, G., Conti, R., *Non-Linear Differential Equations of Higher Order*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1969.

[3] Lasalle, J. P. and Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, London, 1961.

[4] 王联、王慕秋, 线性时变系统零解的稳定性, 湖南大学学报, **11**(1984), 2.