与 $\mathcal{I}$ -超滤相关的基数不变量

洪剑勇, 张树果*

四川大学数学学院, 成都 610064

E-mail: hjy1982715@yahoo.com.cn, shuguol@yahoo.com.cn

收稿日期: 2011-09-01; 接受日期: 2012-08-20; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 10971149) 资助项目

摘要 我们对自然数 ω 上的每一个理想 $\mathcal{I}$ 引入了一个新的基数不变量 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$. 我们证明相应的 $\mathcal{I}$ -超滤的兼纳存在性可以用 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 与连续统 $\mathfrak{c}$ 的等式来刻画. 具体地, 我们有如下的结果:

- (1) 如果 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$, 那么任何一个由小于 $\mathfrak{c}$ 个集合生成的滤子都包含在某个 $\mathcal{I}$ -超滤中.
- (2) 存在一个滤子刚好可以由 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 个集合生成, 但不包含在任何一个 $\mathcal{I}$ -超滤中.
- (3) 任何一个由小于 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 个集合生成的超滤一定是 $\mathcal{I}$ -超滤.

以上的结果是相应的 P-点和 Ramsey 超滤的经典结论的一个推广. 我们将对一些具体的理想, 确定 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 的大小, 具体地, 我们得到了 $\text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \mathfrak{d}$, $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) = \text{cov}(\mathcal{M})$ 以及对不满足 Fin-BW 性质的理想 $\mathcal{I}$, 都有 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) \geq \mathfrak{d}$.

关键词 理想 $\mathcal{I}$ -超滤 基数不变量

MSC (2010) 主题分类 03E17, 03E05

1 引言

$\mathcal{I}$ -超滤首先是由 Baumgartner 最先引入的. 设 $\mathcal{I}$ 是集合 X 上的一个理想, 自然数上的一个超滤 $\mathcal{U}$ 称为是 $\mathcal{I}$ -超滤, 如果对任一个函数 $F: \omega \rightarrow X$, 都存在一个 $A \in \mathcal{U}$ 使得 $F[A] \in \mathcal{I}$. Baumgartner^[1] 和 Brendle^[2] 研究了 X 是 Cantor 空间 2^ω 及 ω_1 情况下相应的一些拓扑版本的 $\mathcal{I}$ -超滤和序数超滤之间的关系. Flašková^[3] 研究了 X 是自然数集 ω 的情况下的一些相应的 $\mathcal{I}$ -超滤及经典的 P-点和 Ramsey 超滤之间的关系. Flašková^[4] 把 P-点和 Ramsey 超滤都刻画成 $\omega \times \omega$ 上的一些理想的 $\mathcal{I}$ -超滤, 具体的来说, $\text{Fin} \times \text{Fin}$ -超滤就是 P-点, 而 $\mathcal{ED}$ -超滤就是 Ramsey 超滤.

P-点和 Ramsey 超滤的存在性与基数不变量 $\mathfrak{d}$ 和 $\text{cov}(\mathcal{M})$ 密切相关, 事实上, 我们有如下的经典结果, 其中的 $\mathfrak{c}$ 表示连续统的基数.

- 定理 1.1** (1)^[5] a) 如果 $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, 那么任何一个由小于 $\mathfrak{c}$ 个集合生成的滤子都包含在某个 P-点中.
- b) 存在一个滤子刚好可以由 $\mathfrak{d}$ 个集合生成, 但不包含在任何一个 P-点中.
- c) 任何一个由小于 $\mathfrak{d}$ 个集合生成的超滤一定是 P-点.

(2)^[6] a) 如果 $\mathfrak{c} = \text{cov}(\mathcal{M})$, 那么任何一个由小于 $\mathfrak{c}$ 个集合生成的滤子都包含在某个 Ramsey 超滤中.

- b) 存在一个滤子刚好可以由 $\text{cov}(\mathcal{M})$ 个集合生成, 但不包含在任何一个 Ramsey 超滤中.

证明可见文献 [7]. 那么与 $\mathcal{I}$ -超滤相关的基数不变量是什么呢? 我们将在下一节中引入一个基数不变量 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 并证明其相应的结论.

在第 3 节中, 我们将对一些具体的理想 $\mathcal{I}$, 确定 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 的大小. 我们有 $\text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \mathfrak{d}$ 并且 $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) = \text{cov}(\mathcal{M})$. 同时我们将得到对任意的不满足 Fin-BW 性质的理想 $\mathcal{I}$, 都有 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) \geq \mathfrak{d}$.

我们采用标准的集合论记号, 可见文献 [8,9]. 一个集合 X 上的理想是指 X 的一些子集形成的族, 满足对子集与有限并封闭, 我们将主要考虑自然数集 ω 上的理想, 以 Fin 表示所有自然数的有限子集所形成的理想, 即 $\text{Fin} = [\omega]^{<\omega}$. 我们假定所考虑的理想都是真理想 (即 $\neq \mathcal{P}(\omega)$), 并且包含了所有的有限子集.

如果 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的一个理想, 则记 $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathcal{I}$ 及 $\mathcal{I}^* = \{\omega \setminus A : A \in \mathcal{I}\}$.

对偶的、有滤子的概念, 自然数的一个子集族称为是滤子, 如果其满足对有限交与扩集封闭, 同样我们在这里只谈论真的滤子并且包含所有的余有限集. 如果一个滤子还满足 $\forall A, B \in \mathcal{F} (A \cup B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F} \vee B \in \mathcal{F})$, 那么 $\mathcal{F}$ 就称为是一个超滤 (ω 上的). 设 $\mathcal{U}$ 是一个超滤, 如果对自然数集的任一划分 $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ 满足对每个 n , $A_n \notin \mathcal{U}$, 都一定存在一个 $B \in \mathcal{U}$ 使得对每个 n , $|B \cap A_n| < \omega$ (≤ 1), 那么我们称 $\mathcal{U}$ 是一个 P-点 (Ramsey 超滤).

设 $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ 是 ω 上的两个理想, $\mathcal{I}$ 与 $\mathcal{J}$ 的 Fubini 乘积是 $\omega \times \omega$ 上的一个理想, 定义为 $A \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}$ 当且仅当 $\{n \in \omega : \{m : \langle n, m \rangle\} \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}$.

如果 $A, B \in [\omega]^\omega$, $A \subseteq^* B$ 表示 $|A \setminus B| < \omega$. 设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的一个理想, 下面的这些基数不变量定义见文献 [10].

定义 1.2 设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的理想, 那么

$$\begin{aligned} \text{add}^*(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\neg \exists B \in \mathcal{I})(\forall A \in \mathcal{A})(A \subseteq^* B)\}, \\ \text{non}^*(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega \wedge (\forall B \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(|A \cap B| < \omega)\}, \\ \text{cov}^*(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall B \in [\omega]^\omega)(\exists A \in \mathcal{A})(|A \cap B| = \omega)\}, \\ \text{cof}^*(\mathcal{I}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \wedge (\forall B \in \mathcal{I})(\exists A \in \mathcal{A})(B \subseteq^* A)\}. \end{aligned}$$

注意到如果 $\mathcal{I}$ 是一个极大理想, 那么 $\text{add}^*(\mathcal{I})$, $\text{non}^*(\mathcal{I})$, $\text{cov}^*(\mathcal{I})$, $\text{cof}^*(\mathcal{I})$ 已经在文献 [11] 中出现过了.

支配数 $\mathfrak{d}$ 和第一纲集的覆盖数 $\text{cov}(\mathcal{M})$ 定义为

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \omega^\omega \wedge (\forall f \in \omega^\omega)(\exists g \in \mathcal{A})(\forall^\infty n)(g(n) > f(n))\}, \\ \text{cov}(\mathcal{M}) &= \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(2^\omega) \wedge \bigcup \mathcal{A} = 2^\omega\}, \end{aligned}$$

这里 $\mathcal{M}(2^\omega)$ 指 2^ω 上的所有第一纲集所形成的集族.

一个集族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ 具有强有限交性质 (SFIP) 是指对所有的 $B \in [\mathcal{A}]^{<\omega}$, $\bigcap B$ 是一个无限集.

2 与 $\mathcal{I}$ -超滤有关的一个基数不变量

定义 2.1 设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的一个理想, 我们定义下面的与 $\mathcal{I}$ 有关的基数不变量为

$$\text{non}^{**}(\mathcal{I}) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+ \wedge \mathcal{A} \text{ 有强有限交性质, 并且 } \forall B \in \mathcal{I}, \exists A \in \mathcal{A}, |A \cap B| < \omega\}.$$

不难验证, $\text{non}^*(\mathcal{I}) \leq \text{non}^{**}(\mathcal{I}) \leq \text{cof}^*(\mathcal{I})$, 并且如果 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, 那么 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) \leq \text{non}^{**}(\mathcal{J})$. 当 $\mathcal{I}$ 是一个极大理想时, $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) = \text{cof}^*(\mathcal{I}) = \chi(\mathcal{I})$.

定理 2.2 设 $\mathcal{I}$ 是 ω 上的一个理想, 那么我们有

- (1) 如果 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$, 那么任何一个由小于 $\mathfrak{c}$ 个集合生成的滤子都包含在某个 $\mathcal{I}$ -超滤中.
- (2) 存在一个滤子刚好可以由 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 个集合生成, 但不包含在任何一个 $\mathcal{I}$ -超滤中.
- (3) 任何一个由小于 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 个集合生成的超滤一定是 $\mathcal{I}$ -超滤.

证明 (1) 设 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$, 并且 $\langle f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$ 列出了所有的 ${}^\omega\omega$ 中的函数. 设 $\kappa < \text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 并且 $|\mathcal{F}| = \kappa$ 是一个滤子基, 不妨假设 $\mathcal{F}$ 对有限交封闭. 那么来构造一个递增的集族序列如下, $\langle \mathcal{F}_\alpha : \alpha < \mathfrak{c} \rangle$: $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, 并且如果 α 是一个极限序数, 则 $\mathcal{F}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathcal{F}_\beta$. 对于后继序数 $\alpha + 1$: 如果存在一个 $F \in \mathcal{F}_\alpha$ 使得 $f_\alpha[F] \in \mathcal{I}$, 则令 $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha$. 反之, 则有 $\forall F \in \mathcal{F}_\alpha (f_\alpha[F] \in \mathcal{I}^+)$. 那么 $\{f_\alpha[F] : F \in \mathcal{F}_\alpha\} \subseteq \mathcal{I}^+$ 有强有限交性质. 根据归纳假设及 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 的定义, $|\mathcal{F}_\alpha| < \text{non}^{**}(\mathcal{I})$, 存在一个 $B \in \mathcal{I}$ 使得对任意的 $F \in \mathcal{F}_\alpha$ 都有 $|B \cap f_\alpha[F]| = \omega$. 则我们取 $\mathcal{F}_{\alpha+1} = \mathcal{F}_\alpha \cup \{f_\alpha^{-1}[B]\}$. 那么任何一个包含 $\bigcup_{\alpha < \mathfrak{c}} \mathcal{F}_\alpha$ 的超滤一定是一个 $\mathcal{I}$ -超滤.

(2) 设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+$ 具有强有限交性质, 并且满足 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 的定义中的性质并且 $|\mathcal{A}| = \text{non}^{**}(\mathcal{I})$. 那么任何一个包含 $\mathcal{A}$ 的超滤肯定不是 $\mathcal{I}$ -超滤. 事实上对任何一个 $B \in \mathcal{I}$, 都有一个 $A \in \mathcal{A}$ 使得 $|B \cap A| < \omega$, 则 B 一定不在这个超滤中, 于是恒等函数就见证了超滤肯定不是 $\mathcal{I}$ -超滤.

(3) 完全类似于 (1) 的证明, 对任意的 $f \in {}^\omega\omega$ 都有一个 $B \in \mathcal{I}$ 使得对任意的 $U \in \mathcal{U}$, $B \cap f(U)$ 是无限的, 那么我们有 $f^{-1}[B] \in \mathcal{U}$ 并且 $f[f^{-1}[B]] \subseteq B \in \mathcal{I}$. $\square$

Flašková^[4] 指出了下面的关于 P- 点和 Ramsey 超滤的刻画.

定理 2.3 对任意的超滤 $\mathcal{U}$,

- (1) $\mathcal{U}$ 是一个 P- 点当且仅当 $\mathcal{U}$ 是一个 $\text{Fin} \times \text{Fin}$ -超滤.
- (2) $\mathcal{U}$ 是一个 Ramsey 超滤当且仅当 $\mathcal{U}$ 是一个 $\mathcal{ED}$ -超滤.

这里理想 $\mathcal{ED}$ 是 $\omega \times \omega$ 上的由竖直截口及函数的图形所生的一个理想, 即

$$\mathcal{ED} = \{A \subseteq \omega \times \omega : \exists m, n \in \omega, \forall k > n, |\{l : \langle k, l \rangle \in A\}| \leq m\}.$$

显然我们有 $\mathcal{ED} \subseteq \text{Fin} \times \text{Fin}$.

在下一节中我们将指出 $\text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \mathfrak{d}$ 并且 $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) = \text{cov}(\mathcal{M})$. 于是我们的结果可以看成是对关于 P- 点及 Ramsey 超滤的一个推广.

3 一些具体的理想的 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$

我们将利用下面有用的引理, 证明可见文献 [7].

引理 3.1 设 $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ 是一列递减的 ω 的子集序列, 并且 $\mathcal{A}$ 是一族由小于 $\mathfrak{d}$ 个自然数的无穷子集所形成的集族, 满足对任意的 $A \in \mathcal{A}$ 都与每个 C_n 交于无穷. 则存在一个 B 使得对每个 n 都有 $B \subseteq^* C_n$ 成立, 并且 B 与 $\mathcal{A}$ 中的每个元都交于无限.

ω 上的一个理想 $\mathcal{I}$ 满足 Fin-BW 性质是指对任意的有界的实数序列 $\langle x_n : n \in \omega \rangle$, 都存在一个 $A \notin \mathcal{I}$ 使得 $\langle x_n : n \in A \rangle$ 是收敛的.

关于 Fin-BW 性质的以下刻画可见文献 [12].

引理 3.2 设 $r \in \omega$. 一个理想满足 Fin-BW 性质当且仅当对任意的一个满足下列性质的集列 $\{A_s : s \in r^{<\omega}\}$: (i) $A_\emptyset = \omega$; (ii) $A_s = \bigcup_{i < r} A_{s \smallfrown i}$; (iii) $A_{s \smallfrown i} \cap A_{s \smallfrown j} = \emptyset$ 都存在一个 $x \in r^\omega$ 并且 $B \in \mathcal{I}^+$ 使得 $B \subseteq^* A_{x \upharpoonright n}$.

现在我们对不满足 Fin-BW 性质的理想 $\mathcal{I}$ 给出 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 的一个下界.

引理 3.3 如果 $\mathcal{I}$ 不满足 Fin-BW 性质, 则 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) \geq \mathfrak{d}$.

证明 设 $\{A_s : s \in r^{<\omega}\}$ 具有性质: (i) $A_\emptyset = \omega$; (ii) $A_s = \bigcup_{i < r} A_{s \smallfrown i}$; (iii) $A_{s \smallfrown i} \cap A_{s \smallfrown j} = \emptyset$ 并且 $\forall x \in r^\omega, \forall n \in \omega, B \subseteq^* A_{x \upharpoonright n}$, 则 $B \in \mathcal{I}$.

设 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}^+$ 为一具有强有限交性质的集族, 并且基数小于 $\mathfrak{d}$. 随便取一个包含了 $\mathcal{A}$ 的超滤 $\mathcal{V}$, 则易知存在一个 $x \in r^\omega$ 使得 $\forall n, A_{x \upharpoonright n} \in \mathcal{V}$. 由于 $\{A_{x \upharpoonright n} : n \in \omega\}$ 是一个递减的集列并且与 $\mathcal{A}$ 中的每个集合交于无限. 由引理 3.1, 我们可以找到一个 B 使得 $\forall n B \subseteq^* A_{x \upharpoonright n}$ 并且 B 与 $\mathcal{A}$ 的每个集合交于无限. 根据集族 $\{A_s\}$ 的性质, 我们有 $B \in \mathcal{I}$. 则 B 见证了 $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) \geq \mathfrak{d}$. $\square$

密度理想 $\mathcal{Z}_0$ 是由自然数的所有具有上密度为 0 的子集所形成的理想, 即

$$\mathcal{Z}_0 = \left\{ A \subseteq \omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0 \right\}.$$

我们记 $\text{nwd}(\mathbb{Q})$ 为所有的有理数 $\mathbb{Q}$ 的无处稠密集所形成的理想, 这是有理数集 $\mathbb{Q}$ 上的一个理想.

引理 3.4 理想 $\mathcal{Z}_0$, $\text{Fin} \times \text{Fin}$ 和 $\text{nwd}(\mathbb{Q})$ 都不具有 Fin-BW 性质.

证明可直接利用引理 3.3 对于 $\mathcal{Z}_0$ 和 $\text{Fin} \times \text{Fin}$, 我们可分别直接取

$$A_s = \{n \in \omega : n \equiv 2^{\sum_{i < |s|} s^{(i)}} \pmod{2^{|s|}}\}, \quad \{A_s \times \omega : s \in 2^{<\omega}\}.$$

对于 n.w.d 则利用 $\mathbb{Q}$ 是零维的并且任何一个基本开集可分成两个基本开集的不交并.

推论 3.5 $\text{non}^{**}(\mathcal{Z}_0) \geq \mathfrak{d}$, $\text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) \geq \mathfrak{d}$, $\text{non}^{**}(\text{nwd}(\mathbb{Q})) \geq \mathfrak{d}$.

Hernández-Hernández 和 Hrušák^[10] 提出如下问题: 是否 $\text{cov}^*(\mathcal{Z}_0) \leq \mathfrak{b}$ 成立? 对 $\mathcal{Z}_0$ 结果可以看成是这个问题的对偶命题 $\text{non}^*(\mathcal{Z}_0) \geq \mathfrak{d}$ 的一个弱的形式.

对于理想 $\text{Fin} \times \text{Fin}$, 我们指出其不等式可以反过来, 有下面的定理.

定理 3.6 $\text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \text{cof}^*(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \mathfrak{d}$.

证明 我们只需证明 $\text{cof}^*(\text{Fin} \times \text{Fin}) \leq \mathfrak{d}$. 设 $\{f_\alpha \in {}^\omega\omega : \alpha < \mathfrak{d}\}$ 是一个支配族. 定义 $A_\alpha = \{(x, y) \in \omega \times \omega : y < f_\alpha(x)\}$ 及 $B_n = n \times \omega$, 则显然有 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{d}\} \cup \{B_n : n < \omega\} \subseteq \text{Fin} \times \text{Fin}$. 对任意的 $B \in \omega \times \omega$, 存在一个 $m \in \omega$ 及 $g \in {}^\omega\omega$ 使得 $B \subseteq (m \times \omega) \cup \{(x, y) \in \omega \times \omega : y < g(x)\}$. 那么存在一个 $\alpha < \mathfrak{d}$ 使得 $\forall n, f_\alpha(n) > g(n)$. 那么 $B \subseteq A_\alpha \cup B_m$. 这说明 $\mathcal{A}$ 生成了理想 $\text{Fin} \times \text{Fin}$. $\square$

定理 3.7 $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) = \text{cov}(\mathcal{M})$, $\text{cof}^*(\mathcal{ED}) = \mathfrak{c}$.

证明 证明分为以下四部分进行:

- (1) $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) \geq \text{cov}(\mathcal{M})$;
- (2) $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) \leq \mathfrak{d}$;
- (3) $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) \leq \text{cov}(\mathcal{M})$;
- (4) $\text{cof}^*(\mathcal{ED}) \geq \mathfrak{c}$.

(1) 取定 $\kappa < \text{cov}(\mathcal{M})$ 并且设 $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{ED}^+$ 具有强有限交性质. 令 $C_n = (\omega \setminus n) \times \omega$, 由引理 3.1, 我们可找到一个 B 是所有 $\{C_n : n \in \omega\}$ 的伪交并且与每个 A_α 相交于无限. 取 $B_n = \{m \in \omega : (n, m) \in B\}$, 则每个 B_n 都是有限的. 将 B 视为 $\prod_{n \in \omega} B_n$ 的乘积空间, 其与 Cantor 空间 2^ω 是同胚

的. 则我们令

$$X_\alpha = \left\{ x \in \prod_{n \in \omega} B_n : \exists^\infty n \in \omega (n, x(n)) \in B \cap A_\alpha \right\}.$$

不难验证知对每个 $\alpha < \text{cov}(\mathcal{M})$, X_α 是稠密的 G_δ 集, 于是存在一个 $x \in \prod_{n \in \omega} B_n$ 属于所有的 X_α . 则 $\{(n, x(n)) : n \in \omega\} \in \mathcal{ED}$, 并且与每个 A_α 相交于无限集.

(2) 这是显然的, 因为我们有 $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) \leq \text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \mathfrak{d}$.

(3) 利用文献 [7] 中的方法, 取定 $\kappa < \text{non}^{**}(\mathcal{ED})$ 并且令 $\{(x_\alpha, \Pi_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ 为一族 chopped 实数, 其中 $\Pi_\alpha = \langle I_{\alpha n} : n \in \omega \rangle$.

所谓 chopped 实数是指一个有序对 (x, Π) , 其中 $x \in {}^\omega 2$, Π 为一区间分划. $(x, \langle I_n \rangle)$ 吞食了 $(y, \langle J_n \rangle)$ 是指 $\forall^\infty n \in \omega, \exists m \in \omega$ 使得 $I_n \supseteq J_m$ 且 $x \upharpoonright J_m = y \upharpoonright J_m$.

通过取有限交, 可以不妨假设其中的任意有限个 chopped 实数都可以被这族 chopped 实数中的另外一个吞食. 可将 $\omega \times \omega$ 当成是 $\omega \times 2^{<\omega}$, 事实上它们有相同的基数.

由于 $\kappa < \mathfrak{d}$, 存在一个区间分划 $\{J_n : n \in \omega\}$ 使得

$$\forall \alpha < \kappa, \exists^\infty m \in \omega, \exists n \in \omega, I_{\alpha m} \subseteq J_n \cup J_{n+1}.$$

定义

$$A_\alpha = \{(n, s) : s \in 2^{J_n \cup J_{n+1}} \wedge \exists m \in \omega (I_{\alpha m} \subseteq J_n \cup J_{n+1} \wedge s \upharpoonright I_{\alpha m} = x_\alpha \upharpoonright I_{\alpha m})\}.$$

由假设, 任意有限个 (x_α, Π_α) 都可被其中另外一个吞食, 不难验证 $\{A_\alpha\}$ 有强有限交性质.

根据 $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ 的定义, 有 $B \in \mathcal{ED}$ 与每个 A_α 交于无限. 而只有有限个 $2^{J_n \cup J_{n+1}}$, 于是存在一个 $m \in \omega$ 及 $y_0, y_1, \dots, y_{m-1} : \omega \rightarrow 2^{<\omega}$ 满足 $B = \bigcup_{i < m} \{(n, y_i(n)) : n \in \omega\}$. 则其中必定有一个与每一个 A_α 交于无限, 可不妨假设是 y_0 . 则对所有的 n , $\text{dom}(y_0(n)) = J_n \cup J_{n+1}$. $X_0 = \{(2n, y_0(2n)) : n \in \omega\}$ 和 $X_1 = \{(2n+1, y_0(2n+1)) : n \in \omega\}$ 中的一个与每个 A_α 相交于无穷. 通过对 X_i 取并, 我们就找到了 $z \in 2^\omega$ 使得 $\forall \alpha < \kappa, \exists^\infty n (z \upharpoonright I_{\alpha n} = x_\alpha \upharpoonright I_{\alpha n})$ 成立.

(4) 由于可构造出一个集合 $\{f_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq {}^\omega \omega$ 满足对任意不同的 α, β 都有 f_α 和 f_β 是最终不同的. 则对每个 $\alpha < \mathfrak{c}$, 可令

$$\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}, \quad A_\alpha = \{(n, f(n)) : n \in \omega\}.$$

由于 $\mathcal{ED}$ 中的每个集合都最多只能包含有限个 $\mathcal{A}$ 中的集合, 那么可知 $\mathcal{ED}$ 的任意一组基一定有基数 $\mathfrak{c}$. 证毕. $\square$

注 在本文投稿后作者获悉, Brendle 和 Flášková 也同时独立的引入并研究了本文中所考虑的基数不变量. 本文曾于 2012 年 1 月在日本神户大学举办的 “Forcing in Set Theory Seminar” 国际会议上报告.

参考文献

- 1 Baumgartner J. Ultrafilters on ω . J Symbolic Logic, 1995, 2: 624–639
- 2 Brendle J. Between P-points and nowheredense ultrafilters. Israel J Math, 1999, 113: 205–230
- 3 Flášková J. Ultrafilters and small sets, Ph.D Thesis. Prague: Charles University, 2006
- 4 Flášková J. Description of some ultrafilters via $\mathcal{I}$ -ultrafilter. Preprint
- 5 Ketonen J. On the existence of P-points in the Stone-Čech compactification of integers. Fund Math, 1976, 92: 91–94

- 6 Canjar R M. On the generic existence of special ultrafilters. *Proc Amer Math Soc*, 1990, 110: 233–241
- 7 Blass A. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. In: Foreman M, Kanamori A, eds. *Handbook of Set Theory*. New York: Springer, 2010: 395–489
- 8 Kunen K. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam-New York-Oxford: North Holland, 1980
- 9 Jech T. *Set Theory: Perspectives in Mathematical Logic*, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1997
- 10 Hernández-Hernández F, Hrušák M. Cardinal invariants of analytic P-ideals. *Canad J Math*, 2007, 59: 575–595
- 11 Brendle J, Shelah S. Ultrafilters on ω -their ideals and their cardinal characteristics. *Trans Amer Math Soc*, 1999, 351: 2643–2674
- 12 Filipów R, Mrozek N, Reclaw I, et al. Ideal version of bounded sequence. *J Symbolic Logic*, 2007, 72: 501–512

Cardinal invariants related to the $\mathcal{I}$ -ultrafilters

HONG JianYong & ZHANG ShuGuo

Abstract We introduce a new cardinal invariants $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ for an ideal on ω which is showed to be closely related to the $\mathcal{I}$ -ultrafilters. We prove the following results:

- (1) If $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) = \mathfrak{c}$ then each filter generated by fewer than $\mathfrak{c}$ sets is included in some $\mathcal{I}$ -ultrafilter.
- (2) There is a filter generated by $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ sets that is not included in any $\mathcal{I}$ -ultrafilter.
- (3) Each ultrafilter generated by fewer than $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ sets is an $\mathcal{I}$ -ultrafilter.

These can be considered as a generalization of the classical results for P-point and Ramsey ultrafilter. We then estimate $\text{non}^{**}(\mathcal{I})$ for some ideals. We show that $\text{non}^{**}(\text{Fin} \times \text{Fin}) = \mathfrak{d}$, $\text{non}^{**}(\mathcal{ED}) = \text{cov}(\mathcal{M})$ and $\text{non}^{**}(\mathcal{I}) \geq \mathfrak{d}$ for the ideals do not have the Fin-BW property.

Keywords ideals, $\mathcal{I}$ -ultrafilter, cardinal invariant

MSC(2010) 03E17, 03E05

doi: 10.1360/012011-656