中国科学: 数学 2015 年 第 45 卷 第 7 期: 953 ∼ 974
www.scichina.com math.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS

综 述

# 最优控制问题的有限元高精度分析及其应用

献给林群教授 80 华诞

龚伟①, 刘会坡②, 严宁宁①*

① 中国科学院数学与系统科学研究院科学与工程计算国家重点实验室, 北京 100190;
② 北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100094
E-mail: wgong@lsec.cc.ac.cn, liuhuipo@amss.ac.cn, ynn@amss.ac.cn

收稿日期: 2014-09-12; 接受日期: 2015-03-05; * 通信作者
国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2010CB731505, 2011CB309705 和 2012CB821204) 和国家自然科学基金 (批准号: 11171337, 11001027 和 11201464) 资助项目

**摘要** 本文简要回顾偏微分方程最优控制问题的有限元高精度分析和基于高精度分析的高效有限元算法的若干研究工作, 包括椭圆型方程、抛物型方程最优控制问题的有限元超收敛, 椭圆型方程、Stokes 方程最优控制问题的混合有限元超收敛, 以及基于高精度分析的后验误差估计和自适应有限元方法及有限元外推和校正. 本文对近年来上述研究进展进行综述, 并展望拟开展的研究工作.

**关键词** 最优控制 有限元 超收敛
**MSC (2010) 主题分类** 49J20, 65N15, 65N30

## 1 引言

偏微分方程最优控制问题[1] 在工程中具有广泛的应用背景, 例如, 大气污染控制、大型挠性空间结构的设计与制造、大型柔性结构的波动控制研究和低温超导激光能量爆破的控制研究等都可以归结为偏微分方程描述的最优控制问题的研究. 最优控制问题在工程中的应用还包括复合材料设计问题、石油开采过程优化、温度控制、材料加工成型、化学反应、形状设计、流体控制以及在航空航天中的应用等, 其理论与方法对一些交叉科学如数值天气预报中的资料同化的发展也起到了积极的推动作用.

近年来, 偏微分方程最优控制问题的数值方法吸引了国内外很多学者的研究兴趣, 产生了一大批新的研究成果. 偏微分方程最优控制问题的数值方法最早可以追溯到 20 世纪 70 年代. 由于当时计算机尚未普及, 大规模科学计算没有盛行, 人们的研究兴趣还主要集中在常微分方程最优控制上. 20 世纪 70 年代, Falk [2] 开始最优控制问题有限元方法及其先验误差估计的研究; 21 世纪初, 文献 [3–5] 开始最优控制问题有限元方法后验误差估计和自适应有限元的研究. 21 世纪初以来, 由于大型计算机的发展以及大量科学和工程计算需求的推动, 国际上关于偏微分方程最优控制问题数值方法的研究日新月异, 在优化算法、有限维离散、先验和后验误差估计等方面取得了巨大的进步, 有关理论、算法和误差估计可参见文献 [6–8] 等.

**英文引用格式:** Gong W, Liu H P, Yan N N. High accuracy analysis of finite element methods for optimal control problems and its application (in Chinese). Sci Sin Math, 2015, 45: 953–974, doi: 10.1360/N012014-00182

本文主要考虑以下具有一般形式的最优控制问题[1]:

$$\min_{u\in U_{ad},y\in V} J(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_d\|_H^2+\frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2 \tag{1.1}$$

满足状态方程约束

$$y=S(u), \tag{1.2}$$

其中 $u\in U_{ad}$ 是控制变量, $y\in V$ 是状态变量, $U_{ad}\subset U$ 是控制约束集合, $H$ 是状态观测空间. 我们用 $y=S(u)$ 代表状态方程约束, 不同的状态约束方程对应不同的控制 - 状态算子 $S$, 在本文中, 状态约束方程为偏微分方程, 它们可以是椭圆型方程、抛物型方程、Stokes 方程、积分方程和积分微分方程等. 利用状态约束方程表示 $y=S(u)$, 可以得到关于最优控制 $u$ 的优化问题

$$\min_{u\in U_{ad}} J(u)=\frac{1}{2}\|S(u)-y_d\|_H^2+\frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2. \tag{1.3}$$

在上述目标泛函 $J(u)$ 满足强制性条件或者控制约束集 $U_{ad}$ 是有界集的条件下可以证明解的存在性. 在控制约束集 $U_{ad}$ 是凸集且控制 - 状态算子 $S$ 是线性的条件下或目标泛函关于最优控制 $u$ 是严格凸的假设下, 解的唯一性可以得到证明. 如果 $S$ 关于最优控制 $u$ 可微, 我们可以得到上述优化问题的一阶最优性条件

$$J'(u)(v-u)=\alpha(u,v-u)_U+(S'(u)^*(S(u)-y_d),v-u)_U\geqslant 0,\quad \forall\, v\in U_{ad}, \tag{1.4}$$

其中 $S'(u)v$ 是控制 - 状态算子 $S$ 关于 $u$ 在 $v$ 方向的 $F$- 导数, $S'(u)^*$ 是 $S'(u)$ 的伴随算子. 通过引入伴随状态方程

$$p=S'(u)^*(S(u)-y_d), \tag{1.5}$$

我们可以得到目标泛函 $J$ 一阶导数信息的显式表示为

$$J'(u)(v-u)=(\alpha u+p,v-u)\geqslant 0,\quad \forall\, v\in U_{ad}. \tag{1.6}$$

基于以上的导数信息, 可以设计优化算法进行求解.

对于上述无穷维最优控制问题, 我们可以通过数值方法 (如有限元方法、有限差分法和谱方法等) 离散, 得到有限维的优化问题, 从而利用经典的优化算法进行求解, 如梯度类方法和 Newton 类方法等[5]. 在偏微分方程最优控制的数值算法中, 有限元方法无疑是最常用、最有效的算法之一.

偏微分方程有限元方法的高精度分析已有几十年研究历史, 得到了国内外同行的广泛关注, 在国际上出现了以林群院士为代表的中国流派. 他们利用积分恒等式技巧得到有限元解与精确解插值之间的超收敛性质, 并发展了插值后处理技术和外推技术等, 从而利用较小的计算代价得到更好的计算精度, 大大提高了计算效率, 其研究结果对于绝大部分偏微分方程和常用有限元空间都成立, 有关理论及应用可参见林群院士的专著 [9–13] 等. 近年来, 将林群院士的有限元高精度分析思想和技术应用于偏微分方程最优控制问题的有限元方法, 出现了一批相关研究工作, 本文将综述这方面的工作.

本文结构安排如下: 第 2 节回顾椭圆型方程最优控制问题有限元方法的超收敛分析; 第 3 节介绍基于超收敛分析的后验误差估计和自适应有限元方法; 第 4 节简要回顾有限元外推和校正在最优控制问题中的应用; 第 5 节介绍椭圆型方程最优控制问题的混合有限元超收敛; 第 6 和 7 节分别综述 Stokes 方程和抛物型方程最优控制问题的有限元、混合元高精度分析及应用方面的结果.

本文采用标准的 Sobolev 空间记号, 如 $W^{m,q}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W_0^{m,q}(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$, 以及相应的范数 $\|\cdot\|_{m,q,\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 等. 此外, 我们用 $(\cdot,\cdot)$ 或 $(\cdot,\cdot)_U$ 表示 $L^2(\Omega)$ 或 $L^2(\Omega_U)$ 中的内积, 用 $c$ 或 $C$ 表示一般的正常数.

## 2　椭圆型方程最优控制问题的超收敛

首先考虑以下简单的椭圆型方程分布最优控制问题:

$$\min_{u\in U_{ad}} J(y,u)=\frac{1}{2}\|y-y_d\|_H^2+\frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2 \tag{2.1}$$

满足状态方程约束

$$\begin{cases}-\Delta y=f+Bu, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ y=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $U=L^2(\Omega_U)$, $H=L^2(\Omega)$, $V=H_0^1(\Omega)$, $B$ 是控制算子, 通常具有形式 $B: L^2(\Omega_U)\to L^2(\Omega)$, $\Omega_U\subset\Omega$ 是控制区域. 在本文中, 容许控制空间 $U_{ad}$ 可以是全空间 (无控制约束), 即 $U_{ad}=U$; 或具有逐点控制约束的子集合, 即

$$U_{ad}:=\{u\in U:\beta_l(x)\leqslant u(x)\leqslant\beta_u(x),\text{a.e. } x\in\Omega_U\}, \tag{2.3}$$

或积分型控制约束的子集合

$$U_{ad}:=\left\{u\in U:\int_{\Omega_U}u(x)\geqslant 0\right\}. \tag{2.4}$$

如果控制约束集具有 (2.3) 的形式, 则我们可以得到最优条件 (1.6) 的等价形式

$$u(x)=P_{U_{ad}}\left\{-\frac{1}{\alpha}B^*p(x)\right\}, \tag{2.5}$$

其中 $P_{U_{ad}}$ 是逐点投影算子. 如果控制约束集具有 (2.4) 的形式, 则我们可以得到

$$u(x)=\frac{1}{\alpha}\{\max(0,\overline{B^*p})-B^*p(x)\}, \tag{2.6}$$

其中 $\overline{B^*p}=\int_{\Omega_U}B^*pdx/(\int_{\Omega_U}1dx)$ 代表 $B^*p$ 在 $\Omega_U$ 上的积分平均.

最优控制问题 (2.1) 的一阶最优性条件可以写为

$$\begin{cases}-\Delta y=f+Bu, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad y=0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\\ -\Delta p=y-y_d, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内}, \quad p=0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\\ \displaystyle\int_{\Omega_U}(\alpha u+B^*p)(v-u)dx\geqslant 0, \quad \forall\, v\in U_{ad}.\end{cases} \tag{2.7}$$

若 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ 是凸多边形或多面体区域, 则有 $y,p\in W^{2,s}(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $s\geqslant n$ 依赖于区域 $\Omega$ 最大内角. 若控制约束集 $U_{ad}$ 具有积分型约束形式 (2.4) 或者 $U_{ad}=L^2(\Omega_U)$, 则有 $u\in W^{2,s}(\Omega_U)$. 若控制约束集 $U_{ad}$ 具有逐点约束形式 (2.3), 则仅有 $u\in W^{1,\infty}(\Omega_U)$.

对最优控制问题 (2.1), 可以采用常规有限元方法离散. 假设 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_h^U$ 分别是区域 $\Omega$ 和 $\Omega_U$ 的正则剖分, 我们在 $\mathcal{T}_h$ 和 $\mathcal{T}_h^U$ 上定义分片多项式空间 $V_h\subset H_0^1(\Omega)$ 和 $U_h\subset L^2(\Omega_U)$, 则离散控制约束集可以定义为 $U_{ad,h}=U_h\cap U_{ad}$. 应用上述有限元空间, 我们可以定义如下离散最优控制问题:

$$\min_{u_h\in U_{ad,h};y_h\in V_h} J_h(y_h,u_h)=\frac{1}{2}\|y_h-y_d\|_H^2+\frac{\alpha}{2}\|u_h\|_U^2 \tag{2.8}$$

满足状态方程约束

$$(\nabla y_h, \nabla v_h) = (f + Bu_h, v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h. \tag{2.9}$$

类似于连续情形, 我们可以得到离散问题解的存在性和唯一性以及如下的一阶最优性条件:

$$(\nabla y_h, \nabla v_h) = (f + Bu_h, v_h), \quad \forall\, v_h \in V_h, \tag{2.10}$$

$$(\nabla q_h, \nabla p_h) = (y_h - y_d, q_h), \quad \forall\, q_h \in V_h, \tag{2.11}$$

$$(\alpha u_h + B^* p_h, v_h - u_h)_U \geqslant 0, \quad \forall\, v_h \in U_{ad,h}. \tag{2.12}$$

对于无控制约束椭圆型方程最优控制问题的误差估计, 我们能够得到与 PDE 有限元离散同样的收敛性结果. 但是, 对于具有逐点控制约束的最优控制问题, 最优控制 $u$ 通常只能属于 $W^{1,\infty}(\Omega_U)$, 因此限制了我们使用有限元空间逼近的多项式次数. 本节主要考虑分片线性 - 分片常数有限元空间, 即对状态变量和伴随状态变量用分片线性有限元逼近, 对最优控制使用分片常数有限元逼近. 我们定义如下分片线性连续有限元空间:

$$V_h := \{v \in \mathcal{C}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) : v\,|_{\tau} \in P_1(\tau), \forall\, \tau \in \mathcal{T}_h\}, \tag{2.13}$$

和分片常数有限元空间:

$$U_{h0} := \{v \in U :\ v\,|_{\tau_U} \in P_0(\tau_U), \forall\, \tau_U \in \mathcal{T}_h^U\}. \tag{2.14}$$

椭圆型方程最优控制问题的收敛性分析最早要追溯到 Falk 在文献 [2] 中的工作, 他给出了最优控制问题有限元收敛性分析的一般框架, 并对控制逐点约束的情形给出了分片线性 - 分片常数有限元离散最优控制问题的先验误差估计, 得到了 $O(h)$ 的收敛性

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega_U} \leqslant C(h + h_U),$$

其中 $h$ 和 $h_U$ 分别代表区域 $\Omega$ 和 $\Omega_U$ 的剖分尺度. 进一步可以证明

$$\|u_h - u\|_{0,\Omega_U} + \|y_h - y\|_{1,\Omega} + \|p_h - p\|_{1,\Omega} \leqslant C(h_U + h). \tag{2.15}$$

这是在分片线性 - 分片常数有限元空间条件下能够期待的最好结果, 即达到了最优收敛阶.

研究椭圆方程最优控制问题的超收敛, 即期望取得比上述最优收敛阶更好的逼近效果. Yan 等人[14] 首先研究了无控制约束椭圆型方程最优控制问题的超收敛. 考虑 $B$ 为恒等算子的情形, 当 $y, p \in H^3(\Omega)$ 且网格剖分满足超收敛条件 (参见文献 [11]), 则可以证明

$$\|y_h - y_I\|_{1,\Omega} + \|p_h - p_I\|_{1,\Omega} \leqslant Ch^2, \tag{2.16}$$

其中 $y_I$ 和 $p_I \in V_h$ 分别是 $y$ 和 $p$ 的 Lagrange 插值.

为进一步得到整体超收敛结果, 需要引入一些插值后处理算子 (参见文献 [11]). 假设 $\Omega$ 是一个多边形区域, 设 $\mathcal{T}_h = \{e\}$ 是 $\Omega$ 的一致矩形剖分, 网格大小为 $h$. 我们假设剖分 $\mathcal{T}_h$ 是由另一个剖分 $\mathcal{T}_{2h} = \{\tau\}$ 的每个矩形单元平均分成四个小矩形得到的, 即 $\tau = \bigcup_{i=1}^4 e_i$. 基于剖分 $\mathcal{T}_{2h}$, 构造分片线性函数 $y$ 的插值后处理算子 $\Pi_{2h}$:

$$\begin{cases} \Pi_{2h} y \in Q_2(\tau), \\ \Pi_{2h} y(z_i) = y(z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, 9, \end{cases} \tag{2.17}$$

其中 $Q_2$ 是双二次多项式空间, $z_i$ $(i=1,2,\ldots,9)$ 是剖分 $\mathcal{T}_h$ 在大单元 $\tau$ 上的节点, 这里 $\tau\in\mathcal{T}_{2h}$ 由 $\mathcal{T}_h$ 中的四个小单元 $e_i$ $(i=1,2,3,4)$ 构成. 若 $\mathcal{T}_h$ 是 $\Omega$ 的一致三角形剖分, 我们可以类似地得到插值后处理算子 $\Pi_{2h}$, 详见文献 [11]. 我们可以类似地定义分片常数函数的插值后处理算子. 对于分片常数函数 $r$, 我们定义 $I_{2h}$ 为

$$\begin{cases} I_{2h}r\in Q_1(\tau), \\ \displaystyle\int_{e_i}(I_{2h}r-r)=0, \quad i=1,2,3,4, \end{cases} \tag{2.18}$$

其中 $Q_1$ 是双线性元函数空间. 同样地, 对于三角形剖分, 我们可以类似地定义.

利用上述插值后处理技术, 文献 [14] 得到了无控制约束椭圆最优控制问题的整体超收敛结果:

$$\|\Pi_{2h}y_h-y\|_{1,\Omega}+\|\Pi_{2h}p_h-p\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^2, \tag{2.19}$$

其中 $\Pi_{2h}y_h$ 和 $\Pi_{2h}p_h$ 分别是由 (2.17) 定义的有限元解 $y_h$ 和 $p_h$ 的插值后处理. 注意这里仅考虑无控制约束的椭圆型方程最优控制问题, 则控制 $u$ 可以由伴随状态 $p$ 表示, 即 $u=-\frac{1}{\alpha}p$. 由于无需考虑最优控制 $u$ 的离散, 因此, 分析更为简单.

对于有控制约束的椭圆型方程最优控制问题, 特别是控制逐点约束的情形, 分析更为复杂和困难. Meyer 等人[15,16] 研究了这类问题的超收敛.

考虑控制约束集具有形式 (2.3) 的椭圆型方程最优控制问题, 区域 $\Omega_U$ 可以分为非积极集和积极集如下:

$$\Omega_+=\{x\in\Omega_U:\beta_l<u(x)<\beta_u\}, \quad \Omega_0=\{x\in\Omega_U:u(x)=\beta_l \text{ 或者 } u(x)=\beta_u\}.$$

我们可以把区域 $\Omega_U$ 按剖分 $\mathcal{T}_h^U$ 分为三个部分:

$$\Omega_+^h=\{\tau_U\in\mathcal{T}_h^U:\tau_U\subset\Omega_+\}, \quad \Omega_0^h=\{\tau_U\in\mathcal{T}_h^U:\tau_U\subset\Omega_0\}, \quad \Omega_b^h=\Omega_U\backslash(\Omega_+^h\cup\Omega_0^h).$$

显然, $\Omega_+^h$ 和 $\Omega_0^h$ 类似于连续问题中的非积极集和积极集, 而在一般情形下, $\overline{\Omega}_+\cap\overline{\Omega}_0$ 的测度为零. 如果上述条件成立, 且剖分 $\mathcal{T}_h^U$ 是正则的, 则有

$$|\Omega_b^h|\leqslant Ch_U. \tag{2.20}$$

在有限元超收敛分析中, 我们假定条件 (2.20) 成立.

考虑 (2.3) 中 $\beta_l=0$ 和 $\beta_u=\infty$ 的情形, 文献 [16] 证明了如下超收敛结果: 若 $u\in W^{1,\infty}(\Omega_U)$, 则

$$\|u_h-u_I\|_{0,\Omega_U}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{2.21}$$

其中

$$u_I\,|_{\tau_U}=\frac{1}{|\tau_U|}\int_{\tau_U}udx.$$

若进一步有 $y,p\in H^3(\Omega)$, 且网格剖分满足超收敛条件 (参见文献 [11]), 则

$$\|y_h-y_I\|_{1,\Omega}+\|p_h-p_I\|_{1,\Omega}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{2.22}$$

其中 $y_I$, $p_I\in V_h$ 分别是 $y$ 和 $p$ 的 Lagrange 插值. 应用林群院士的插值后处理技术 (参见文献 [11]), 文献 [16] 还证明了如下整体超收敛结果:

$$\|\Pi_{2h}y_h-y\|_{1,\Omega}+\|\Pi_{2h}p_h-p\|_{1,\Omega}+\|I_{2h}u_h-u\|_{0,\Omega_U}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{2.23}$$

其中 $\Pi_{2h}y_h, \Pi_{2h}p_h$ 和 $I_{2h}u_h$ 是由 (2.17) 和 (2.18) 定义的有限元解 $y_h, p_h$ 和 $u_h$ 的插值后处理算子 (参见文献 [7]).

当 $\beta_l$ 和 $\beta_u$ 为常数, $\Omega = \Omega_U$ 且控制和状态采用相同的有限元剖分时 (即 $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^U$), 文献 [15] 证明了

$$\|u_h - \pi^a u\|_{0,\Omega} \leqslant Ch^2,$$

其中

$$\pi^a u \,|_\tau = u(x_\tau), \tag{2.24}$$

这里 $x_\tau$ 是单元 $\tau$ 的重心. 进一步构造插值后处理解

$$\hat{u}_h = P_{U_{ad}}\Big\{-\frac{1}{\alpha}p_h\Big\}, \tag{2.25}$$

则可以得到

$$\|u - \hat{u}_h\|_{0,\Omega} \leqslant Ch^2. \tag{2.26}$$

为对更一般的情形进行超收敛分析, Liu 和 Yang 等人 [17] 构造了更为复杂的插值算子:

$$\hat{u}_I = \begin{cases} \pi^a u, & x \in \tau_U, \quad \tau_U \subset \Omega_+^h \cup \Omega_0^h, \\ \beta_l \text{ 或者 } \beta_u, & x \in \tau_U, \quad \tau_U \subset \Omega_b^h, \quad u_h = \beta_l \text{ 或者 } \beta_u, \\ -\dfrac{1}{\alpha}\pi^a(B^*p), & x \in \tau_U, \quad \tau_U \subset \Omega_b^h, \quad \beta_l < u_h < \beta_u, \end{cases} \tag{2.27}$$

其中 $\pi^a v$ 由 (2.24) 定义. 基于该插值算子, 文献 [17] 证明了

$$\|\hat{u}_I - u_h\|_{0,\Omega_U} \leqslant C(h^2 + h_U^2), \tag{2.28}$$

且类似于文献 [16] 证明了

$$\|y_h - y_I\|_{1,\Omega} + \|p_h - p_I\|_{1,\Omega} \leqslant C(h^2 + h_U^2) \tag{2.29}$$

和

$$\|\Pi_{2h}y_h - y\|_{1,\Omega} + \|\Pi_{2h}p_h - p\|_{1,\Omega} + \|\hat{u}_h - u\|_{0,\Omega_U} \leqslant C(h^2 + h_U^2), \tag{2.30}$$

其中 $\hat{u}_h$ 由 (2.25) 定义, $\Pi_{2h}y_h$ 和 $\Pi_{2h}p_h$ 是有限元解 $y_h$ 和 $p_h$ 的插值后处理算子. 随后, Chang 和 Yang [18] 研究了定常 Bénard 方程类似的超收敛和后处理, 得到了超收敛结果 (2.28)–(2.30). Chen 和 Dai [19] 把超收敛性质推广到了如下半线性椭圆方程:

$$\begin{cases} -\Delta y + \phi(y) = f + Bu, & \text{在 } \Omega \text{ 内}, \\ y = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上} \end{cases} \tag{2.31}$$

约束的最优控制问题, 并利用文献 [11] 中的技术构造插值后处理算子, 得到了关于最优控制变量、状态变量和伴随状态变量的整体超收敛. Yan [20, 21] 研究了积分 - 微分方程和积分方程的超收敛分析, 得到了超收敛性质 (2.21)–(2.23).

对于积分型控制约束 (见 (2.4)) 的椭圆型方程分布最优控制问题, Chen 等人 [22] 研究了 Legendre-Galerkin 谱方法, 得到了谱逼近精度. 对于积分型状态约束的椭圆型方程最优控制问题, Liu 等人 [23] 进行了研究, 得到了最优误差估计和超收敛.

## 3　重构型后验误差估计

利用超收敛性质构造重构 (recovery) 型后验误差估计子在自适应有限元方法中具有重要的地位. 最早期的工作是由 Zienkiewicz 和 Zhu [24, 25] 发展起来的, 称为梯度重构型后验误差估计. 常用的重构算子利用函数梯度的加权平均、局部 $L^2$ 投影或者局部离散最小二乘方法构造, 得到具有更好收敛性的梯度逼近, 从而得到可靠的且可计算的后验误差估计子, 用以指导自适应有限元网格加密. 利用超收敛结果, 重构型后验误差估计可以得到渐近精确的后验误差估计子. Yan 和 Zhou [26] 讨论了分片线性有限元的重构型后验误差估计子, 证明了该后验误差估计子不仅在一般网格下是可靠的、有效的, 而且在超收敛条件下是渐近精确的. 此外, Naga 和 Zhang [27] 还构造了 PPR (polynomial preserving recovery) 型基于函数值的重构算子和相应的后验误差估计.

本节主要回顾椭圆型方程最优控制问题有限元计算重构型后验误差估计的进展. 文献 [16, 28, 29] 将文献 [24, 26] 等的思想和技术应用于椭圆型方程分布最优控制问题, 构造了重构算子

$$R_h v = \sum_{z\in N(\mathcal{T}_h)} R_h v(z)\phi_z \tag{3.1}$$

和梯度重构

$$G_h v = \left(R_h\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right), R_h\left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)\right), \tag{3.2}$$

其中 $N(\mathcal{T}_h)$ 是剖分 $\mathcal{T}_h$ 的所有节点集合, $\phi_z$ 是有限元空间 $V_h$ 在 $z$ 点的基函数. (3.1) 中 $R_h v(z)$ 可以按照如下方式构造: 假设 $z$ 是一个节点, $\omega_z = \bigcup_{\tau\in\mathcal{T}_h, z\in\bar{\tau}}\tau$ 是包含节点 $z$ 的单元片, $V_z$ 是 $\omega_z$ 上的线性元空间. 令 $R_h v(z) = \sigma_z(z)$, 其中 $\sigma_z$ 满足

$$E(\sigma_z) = \min_{w\in V_z} E(w),$$

这里

$$E(w) = \sum_{\tau\subset\omega_z}\left(\int_\tau w - \int_\tau v\right)^2.$$

利用 (3.1) 和 (3.2), 可以构造重构型后验误差估计子:

$$\eta_g^2 = \|u_h - R_h u_h\|_{0,\Omega_U}^2 + \|\nabla y_h - G_h y_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla p_h - G_h p_h\|_{0,\Omega}^2. \tag{3.3}$$

定义误差

$$E^2 = \|u - u_h\|_{0,\Omega_U}^2 + \|\nabla(y - y_h)\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla(p - p_h)\|_{0,\Omega}^2.$$

可以证明, 在相当一般的条件下,

$$cE^2 \leqslant \eta_g^2 \leqslant CE^2 + \epsilon^2, \tag{3.4}$$

其中 $\epsilon$ 是误差的高阶项; 在超收敛条件下, 可以进一步证明

$$E^2 = \eta_g^2 + \epsilon^2. \tag{3.5}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 可见, 重构型后验误差估计子 (3.3) 在一般网格下是可靠的且有效的, 且在超收敛条件下还是渐近精确的. 因此, 我们可以应用 $\eta_g$ 作为后验误差估计指示子, 指导自适应有限元方法的网格加密.

Chen 等人[19] 研究了半线性椭圆方程 (2.31) 约束的最优控制问题, 得到了类似的后验误差估计和自适应有限元算法. Yan [20, 21] 研究了积分 - 微分方程和积分方程最优控制问题的重构型后验误差估计, 也得到了类似结果.

## 4 最优控制问题的有限元外推和校正

本节主要介绍文献 [30] 中关于椭圆方程无约束最优控制问题的有限元外推和校正算法.

对于无约束最优控制问题, 即 $U_{ad}=U=L^2(\Omega)$, 当 $B=I$, $\alpha=1$ 时, 控制问题 (2.7) 的变分形式可简化为

$$(\nabla y, \nabla v)+(p, v)=(f, v), \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{4.1}$$

$$(\nabla p, \nabla q)-(y, p)=-(y_d, q), \quad \forall\, q \in H_0^1(\Omega). \tag{4.2}$$

我们假设 $\Omega$ 是矩形区域, 设 $\mathcal{T}_{h_1,h_2}$ 是 $\overline{\Omega}$ 的矩形剖分, 其中 $h_1$ 和 $h_2$ 分别是 $x_1$ 和 $x_2$ 轴的网格边长度. 定义下面的有限元空间:

$$V_{h_1,h_2}=\{v \in C(\overline{\Omega}): v\,|_e \in Q_1(e), \forall\, e \in \mathcal{T}_{h_1,h_2}\}, \quad V_{h_1,h_2}^0=V_{h_1,h_2} \cap H_0^1(\Omega),$$

其中 $e$ 为剖分单元. (4.1) 和 (4.2) 的有限元逼近问题为, 求解 $y_{h_1,h_2}, p_{h_1,h_2} \in V_{h_1,h_2}^0$ 使下式成立,

$$(\nabla y_{h_1,h_2}, \nabla v_{h_1,h_2})+(p_{h_1,h_2}, v_{h_1,h_2})=(f, v_{h_1,h_2}), \quad \forall\, v_{h_1,h_2} \in V_{h_1,h_2}^0, \tag{4.3}$$

$$(\nabla p_{h_1,h_2}, \nabla q_{h_1,h_2})-(y_{h_1,h_2}, p_{h_1,h_2})=-(z_d, q_{h_1,h_2}), \quad \forall\, q_{h_1,h_2} \in V_{h_1,h_2}^0. \tag{4.4}$$

我们简要介绍空间区域两个方向同时外推的情形, 对于单个方向的分裂外推可以应用类似方法得到单方向外推结果. 假设 $(y,p)$ 和 $(y_{h_1,h_2}, p_{h_1,h_2})$ 分别是 (4.1) 与 (4.2) 的准确解和 (4.3) 与 (4.4) 的有限元解, 并且 $y, p \in H^5(\Omega)$, 在 $H^1$ 范数意义下有下面的展开式:

$$y_{h_1,h_2}-I_{h_1,h_2}y=h^2\xi_{h_1,h_2}+O(h^4), \tag{4.5}$$

$$p_{h_1,h_2}-I_{h_1,h_2}p=h^2\eta_{h_1,h_2}+O(h^4), \tag{4.6}$$

其中 $(\xi_{h_1,h_2}, \eta_{h_1,h_2}) \in V_{h_1,h_2}^0 \times V_{h_1,h_2}^0$ 的定义详见文献 [30], $I_{h_1,h_2}$ 为双线性插值算子. 我们假设 $\mathcal{T}_{h_1,h_2}$ 是通过把剖分 $\mathcal{T}_{kh_1,kh_2}$ 的每个单元剖分为 $k^2$ 个小矩形所得到. 设 $\tau=\bigcup_{i=1}^{k^2} e_i$, $e_i \in T_{h_1,h_2}$, 定义如下的插值算子:

$$I_{kh_1,kh_2}^k u\,|_\tau \in Q_k(\tau), \quad I_{kh_1,kh_2}^k u(z_i)=u(z_i), \quad i=1,2,\ldots,(k+1)^2,$$

其中 $z_i$ $(i=1,2,\ldots,(k+1)^2)$ 是 $k^2$ 个小单元 $e_i$ 的 $(k+1)^2$ 个顶点. 应用 $k=2,4$ 时的插值算子 $I_{2h_1,2h_2}^2$ 和 $I_{4h_1,4h_2}^4$, 基于 (4.5) 和 (4.6) 有下面的等式成立,

$$I_{4h_1,4h_2}^4 y_{h_1,h_2}-y=h^2\xi+r_{h_1,h_2}, \quad \|r_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega} \leqslant O(h^4), \tag{4.7}$$

$$I_{4h_1,4h_2}^4 p_{h_1,h_2}-p=h^2\eta+r_{h_1,h_2}^*, \quad \|r_{h_1,h_2}^*\|_{1,\Omega} \leqslant O(h^4), \tag{4.8}$$

其中 $(\xi,\eta)$ 的定义可参见文献 [30]. 基于上面恒等式, 应用外推算法, 我们可以得到下面的高精度的数值解:

$$\left\|\frac{1}{3}\ (4I^4_{2h_1,2h_2}y_{h_1/2,h_2/2}-I^4_{4h_1,4h_2}y_{h_1,h_2})-y\right\|_{1,\Omega}=O(h^4), \tag{4.9}$$

$$\left\|\frac{1}{3}(4I^4_{2h_1,2h_2}p_{h_1/2,h_2/2}-I^4_{4h_1,4h_2}p_{h_1,h_2})-p\right\|_{1,\Omega}=O(h^4). \tag{4.10}$$

基于 (4.9) 和 (4.10) 的外推结果可以构造可计算的后验误差估计量为

$$\left\|\frac{1}{3}(I^4_{2h_1,2h_2}y_{h_1/2,h_2/2}-I^4_{4h_1,4h_2}y_{h_1,h_2})-y_{h_1,h_2}\right\|_{1,\Omega}, \tag{4.11}$$

$$\left\|\frac{1}{3}(I^4_{2h_1,2h_2}p_{h_1/2,h_2/2}-I^4_{4h_1,4h_2}p_{h_1,h_2})-p_{h_1,h_2}\right\|_{1,\Omega}. \tag{4.12}$$

文献 [30] 证明了, 当 "非退化" 条件成立, 即

$$\|y-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}\geqslant C_1h^{4-\epsilon_1}, \tag{4.13}$$

$$\|p-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}\geqslant C_2h^{4-\epsilon_2}, \tag{4.14}$$

其中 $C_1,C_2,\epsilon_1$ 和 $\epsilon_2$ 为正的常数, 则 (4.11) 和 (4.12) 分别是 $\|y-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}$ 和 $\|p-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}$ 的渐近精确的后验误差估计, 即

$$\lim_{h\to0}\frac{\|\frac{1}{3}(I^4_{2h_1,2h_2}y_{h_1/2,h_2/2}-I^4_{4h_1,4h_2}y_{h_1,h_2})-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}{\|y-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}=1,$$

$$\lim_{h\to0}\frac{\|\frac{1}{3}(I^4_{2h_1,2h_2}p_{h_1/2,h_2/2}-I^4_{4h_1,4h_2}p_{h_1,h_2})-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}{\|p-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}=1.$$

下面简要介绍插值亏量校正算法, 通过构造插值校正算子得到高精度后处理数值解. 我们定义如下两个有限元投影算子 $R_{h_1,h_2}\times S_{h_1,h_2}$:

$$(\nabla(R_{h_1,h_2}y-y),\nabla v_{h_1,h_2})+(S_{h_1,h_2}p-p,v_{h_1,h_2})=0,\quad \forall\, v_{h_1,h_2}\in V^0_{h_1,h_2},$$

$$(\nabla(S_{h_1,h_2}p-p),\nabla q_{h_1,h_2})-(R_{h_1,h_2}y-y,q_{h_1,h_2})=0,\quad \forall\, q_{h_1,h_2}\in V^0_{h_1,h_2}.$$

定义校正算法为

$$y^*_{h_1,h_2}=I^4_{4h_1,4h_2}y_{h_1,h_2}+I^2_{2h_1,2h_2}y_{h_1,h_2}-I^2_{2h_1,2h_2}R_{h_1,h_2}I^4_{4h_1,4h_2}y_{h_1,h_2},$$

$$p^*_{h_1,h_2}=I^4_{4h_1,4h_2}p_{h_1,h_2}+I^2_{2h_1,2h_2}p_{h_1,h_2}-I^2_{2h_1,2h_2}S_{h_1,h_2}I^4_{4h_1,4h_2}p_{h_1,h_2}.$$

基于误差展开式 (4.7) 和 (4.8) 可以得到如下校正结果:

$$\|y^*_{h_1,h_2}-y\|_{1,\Omega}+\|p^*_{h_1,h_2}-p\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^4. \tag{4.15}$$

基于 (4.15) 的校正算法高精度结果可以构造可计算的后验误差估计量. 假设 "非退化" 条件 (4.13) 和 (4.14) 成立, 则有

$$\lim_{h\to0}\frac{\|y^*_{h_1,h_2}-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}{\|y-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}=1,\quad \lim_{h\to0}\frac{\|p^*_{h_1,h_2}-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}{\|p-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}}=1,$$

即 $\|y^*_{h_1,h_2}-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}$ 和 $\|p^*_{h_1,h_2}-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}$ 分别是 $\|y-y_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}$ 和 $\|p-p_{h_1,h_2}\|_{1,\Omega}$ 的渐近精确的后验误差估计.

此外, Chen 等人[31] 讨论了无约束椭圆方程最优控制混合元计算的外推和校正, 得到了类似结果, 这里不再详细介绍.

## 5 椭圆型方程最优控制问题的混合元超收敛

在一些最优控制问题中, 目标泛函中可能包含状态梯度的信息. 为了更精确地逼近状态梯度, 我们可以引入混合有限元方法来求解最优控制问题. 关于椭圆型方程最优控制问题的混合元, Chen 和 Liu 等做了大量的研究工作 (参见文献 [7,32]).

我们考虑以下椭圆最优控制问题:

$$\min_{u\in U_{ad}\subset L^2(\Omega_U)}\{g_1(-A\nabla y)+g_2(y)+j(u)\} \tag{5.1}$$

满足约束

$$\begin{cases}-\mathrm{div}(A\nabla y)=f+Bu, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ y=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases} \tag{5.2}$$

其中 $g_1$, $g_2$ 和 $j$ 是凸泛函. 引入辅助向量

$$\boldsymbol{r}=-A\nabla y,$$

则上述最优控制问题可以写为

$$\min_{u\in U_{ad}\subset L^2(\Omega_U)}\{g_1(\boldsymbol{r})+g_2(y)+j(u)\} \tag{5.3}$$

满足约束

$$\begin{cases}\mathrm{div}\ \boldsymbol{r}=f+Bu, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ \boldsymbol{r}=-A\nabla y, & \text{在 } \Omega \text{ 内},\\ y=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}.\end{cases} \tag{5.4}$$

定义向量值空间

$$H(\mathrm{div};\Omega)=\{\boldsymbol{v}\in(L^2(\Omega))^2:\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}\in L^2(\Omega)\}.$$

我们可以得到 (5.4) 的弱形式为

$$\begin{cases}(A^{-1}\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})-(y,\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})=0, & \forall\,\boldsymbol{v}\in H(\mathrm{div};\Omega),\\ (\mathrm{div}\ \boldsymbol{r},w)=(f+Bu,w), & \forall\,w\in L^2(\Omega).\end{cases} \tag{5.5}$$

类似于第 2 节, 我们可以证明上述最优控制问题的解的存在性和唯一性, 并可以得到如下的一阶最优性条件:

$$\begin{aligned}&(A^{-1}\boldsymbol{r},\boldsymbol{v})-(y,\mathrm{div}\ \boldsymbol{v})=0, \quad \forall\,\boldsymbol{v}\in H(\mathrm{div};\Omega),\\ &(\mathrm{div}\ \boldsymbol{r},w)=(f+Bu,w), \quad \forall\,w\in L^2(\Omega),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(A^{-1}\boldsymbol{q},\boldsymbol{v})-(z,\operatorname{div}\boldsymbol{v})=-(g_1'(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{v}),\quad \forall\,\boldsymbol{v}\in H(\operatorname{div};\Omega),\\
&(\operatorname{div}\boldsymbol{q},w)=(g_2'(y),w),\quad \forall\,w\in L^2(\Omega),\\
&(j'(u)+B^*z,v-u)_U\geqslant 0,\quad \forall\,v\in U_{ad}.
\end{aligned}
$$

下文通常假设 $j(u)=\frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2$.

下面定义 $H(\operatorname{div};\Omega)$ 的逼近空间, 常用的有 Raviart-Thomas 有限元 (RT)、Brezzi-Douglas-Marini 有限元 (BDM) 和 Brezzi-Douglas-Fortin-Marini 有限元 (BDFM) 等 (参见文献 [33]). 令 $\boldsymbol{V}_h\times W_h\subset H(\operatorname{div};\Omega)\times L^2(\Omega)$ 代表上述的混合有限元空间, 则其在二维三角形单元上可定义为

$$
\boldsymbol{V}_h=\{\boldsymbol{v}_h\in H(\operatorname{div};\Omega):\boldsymbol{v}_h\,|_{\tau}\in\boldsymbol{V}_k(\tau)\},\quad W_h=\{w_h\in L^2(\Omega):v_h\,|_{\tau}\in W_k(\tau)\},
$$

其中对应于 RTk、BDMk 和 BDFMk 单元, $\boldsymbol{V}_k(\tau)$ 分别定义为 $P_k^2+x\cdot P_k$, $P_{k+1}^2$ 和 $\{v\in P_{k+1}^2:(v\cdot n)\,|_{\partial\tau}\in P_k(\partial\tau)\}$, $W_k(\tau)$ 定义为 $P_k$, 这里 $P_k$ 是次数不超过 $k$ 次的多项式空间. 令 $U_{ad,h}=U_{ad}\cap U_{h0}$, 其中 $U_{h0}$ 由 (2.14) 定义.

基于以上定义的有限元空间, 我们可以得到最优控制问题 (5.3) 和 (5.4) 的有限元逼近

$$
\min_{u_h\in U_{ad,h}}\{g_1(\boldsymbol{r}_h)+g_2(y_h)+j(u_h)\} \tag{5.6}
$$

满足约束

$$
\begin{cases}
(A^{-1}\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{v}_h)-(y_h,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)=0,\quad \forall\,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h,\\
(\operatorname{div}\boldsymbol{r}_h,w_h)=(f+Bu_h,w_h),\qquad \forall\,w_h\in W_h.
\end{cases} \tag{5.7}
$$

同样地, 我们可以得到离散一阶最优性条件

$$
\begin{aligned}
&(A^{-1}\boldsymbol{r}_h,\boldsymbol{v}_h)-(y_h,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)=0,\quad \forall\,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h,\\
&(\operatorname{div}\boldsymbol{r}_h,w_h)=(f+Bu_h,w_h),\quad \forall\,w_h\in W_h,\\
&(A^{-1}\boldsymbol{q}_h,\boldsymbol{v}_h)-(z_h,\operatorname{div}\boldsymbol{v}_h)=-(g_1'(\boldsymbol{r}_h),\boldsymbol{v}_h),\quad \forall\,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{V}_h,\\
&(\operatorname{div}\boldsymbol{q}_h,w_h)=(g_2'(y_h),w_h),\quad \forall\,w_h\in W_h,\\
&(j'(u_h)+B^*z_h,v_h-u_h)_U\geqslant 0,\quad \forall\,v_h\in U_{ad,h}.
\end{aligned}
$$

对具有逐点控制约束 (2.3) 的最优控制问题, Chen 和 Liu [32] 研究了椭圆最优控制问题的 RT0 混合有限元方法, 得到了最优先验误差估计

$$
\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch,
$$

并得到了有限元解与真解的分片常数 $L^2$- 投影 $u_I$ 之间的超收敛性质

$$
\|u_I-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^{\frac{3}{2}}. \tag{5.8}
$$

Chen [34] 利用三角形 Raviart-Thomas 混合有限元逼近状态和伴随状态变量, 利用分片常数有限元逼近控制变量, 得到了最优控制分片常数插值和离散最优控制的超收敛结果 (5.8), 并利用文献 [15] 中的思想, 用后处理方式 (2.25) 得到了最优控制的 $O(h^2)$ 超收敛结果 (2.26).

Chen [35] 研究了椭圆方程最优控制问题的矩形 RT0 混合有限元逼近; 在 $B$ 是恒等算子、$u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ 和 $y, p \in H^{2+s}(\Omega)$ $(0 < s \leqslant 1)$ 的假设下, 证明了如下的超收敛性质:

$$\|y_h - P_h y\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{r}_h - \Pi_h \boldsymbol{r}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leqslant Ch^{1+\min\{s,\frac{1}{2}\}},$$
$$\|z_h - P_h z\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{q}_h - \Pi_h \boldsymbol{q}\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leqslant Ch^{1+\min\{s,\frac{1}{2}\}},$$

其中 $\Pi_h$ 和 $P_h$ 分别是从 $H(\mathrm{div};\Omega)$ 和 $L^2(\Omega)$ 到 $\boldsymbol{V}_h$ 和 $W_h$ 的插值算子. 利用文献 [11] 中的插值后处理技术, Chen 等得到了椭圆方程混合有限元逼近的整体超收敛结果,

$$\|y - I_{2h} y_h\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{r} - \Pi_{2h} \boldsymbol{r}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leqslant Ch^{1+\min\{s,\frac{1}{2}\}}, \tag{5.9}$$
$$\|z - I_{2h} z_h\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{q} - \Pi_{2h} \boldsymbol{q}_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \leqslant Ch^{1+\min\{s,\frac{1}{2}\}}, \tag{5.10}$$
$$\|u - \hat{u}_h\|_{0,\Omega} \leqslant Ch^{1+s}, \tag{5.11}$$

其中 $I_{2h} y_h$ 和 $\Pi_{2h} \boldsymbol{r}_h$ 是有限元解 $y_h$ 和 $\boldsymbol{r}_h$ 的插值后处理算子, 其定义类似于 (2.17) 和 (2.18), 详见文献 [7]. $\hat{u}_h$ 定义如下:

$$\hat{u}_h = P_{U_{ad}}\Big\{-\frac{1}{\alpha} I_{2h} z_h\Big\}. \tag{5.12}$$

Chen 等人[36] 利用三角形 RT0 混合有限元逼近状态和伴随状态变量, 利用分片常数有限元逼近控制变量, 得到了有限元解与真解插值之间的超收敛性质 (5.8), 并利用文献 [11] 中的插值后处理技术得到了整体超收敛结果. 文献 [37–40] 在此方向进行了进一步研究, 得到了一批最优控制问题混合元超收敛结果, 包括 RT1 元超收敛和低阶正则性问题的超收敛等.

对具有积分型控制约束 (2.4) 的最优控制问题, 文献 [41–44] 研究了线性和半线性椭圆方程混合有限元逼近的超收敛性质. 文献 [41] 考虑了 RT1 混合有限元逼近状态变量和分片常数有限元逼近最优控制, 得到了超收敛结果

$$\|u_h - \pi^a u\|_{0,\Omega} \leqslant Ch^2;$$

借助文献 [15] 中的后处理技术构造

$$u_h^* = \frac{1}{\alpha}\{\max(0, \bar{z}_h) - z_h\},$$

证明了如下超收敛结果:

$$\|u - u_h^*\|_{0,\Omega} \leqslant Ch^2. \tag{5.13}$$

文献 [45] 研究了具有积分型约束的双线性椭圆最优控制问题的超收敛, 得到了类似的结果. 此外, 文献 [31] 讨论了无约束椭圆方程最优控制混合元计算的外推和校正.

## 6 Stokes 方程最优控制问题的超收敛及自适应有限元方法

本节考虑 Stokes 方程的分布最优控制问题, 以下内容主要是总结了 Liu 和 Yan [46–52] 的研究成果. 设

$$\boldsymbol{Y} = (H_0^1(\Omega))^2, \quad \boldsymbol{U} = (L^2(\Omega_U))^2, \quad \boldsymbol{H} = (L^2(\Omega))^2, \quad Q = L_0^2(\Omega).$$

状态空间和控制空间分别为 $\boldsymbol{Y}\times Q$ 和 $\boldsymbol{U}$. 设 $B$ 是从 $\boldsymbol{U}$ 到 $\boldsymbol{H}$ 的连续线性算子. 设容许控制空间 $\boldsymbol{U}_{ad}$ 具有如下形式:

$$\boldsymbol{U}_{ad}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}:\mathbf{v}\geqslant 0,\text{a.e. }x\in\Omega_U\},$$

则 Stokes 方程最优控制问题可以描述为, 寻找 $(\boldsymbol{y},r,\boldsymbol{u})\in\boldsymbol{Y}\times Q\times\boldsymbol{U}$ 使得

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}_{ad}\subset\boldsymbol{U}} J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d\|_{\boldsymbol{H}}^2+\frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2$$

满足约束

$$-\triangle\boldsymbol{y}+\nabla r=\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u},\quad \text{在 }\Omega\text{ 内},\tag{6.1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{y}=0,\quad \text{在 }\Omega\text{ 内},\tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{y}=0,\quad \text{在 }\partial\Omega\text{ 上},\tag{6.3}$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)$ 代表流体的流动速度, $r$ 是压力, $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)\in\boldsymbol{H}$, $\alpha$ 是正的常数. 为了考虑最优控制问题的有限元逼近, 我们引入下面的状态方程弱形式. 设

$$\begin{aligned}
a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})&=\int_\Omega\nabla\boldsymbol{y}\cdot\nabla\boldsymbol{w},\quad \forall\,\boldsymbol{y},\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Y},\\
b(\boldsymbol{v},r)&=\int_\Omega r\operatorname{div}\boldsymbol{v},\quad \forall\,(\boldsymbol{v},r)\in\boldsymbol{Y}\times Q,\\
(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})&=\int_\Omega(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{w},\quad \forall\,(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\in\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{Y},
\end{aligned}$$

则状态方程 (6.1)–(6.3) 的标准弱形式是, 对于给定的 $\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{H}$, 求 $(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}),r(\boldsymbol{u}))\in\boldsymbol{Y}\times Q$ 满足

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{w})-b(\boldsymbol{w},r(\boldsymbol{u}))=(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\quad \forall\,\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Y},\\
&b(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}),\phi)=0,\quad \forall\,\phi\in Q.
\end{aligned}$$

由文献 [53] 可知, 上面 Stokes 方程的变分形式满足 Babuška-Brezzi 条件.

应用上面的弱形式, 我们的最优控制问题可以重新写成下面的形式:

$$\min_{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{U}_{ad}\subset\boldsymbol{U}} J(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}),\boldsymbol{u})=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{y}_d\|_{\boldsymbol{H}}^2+\frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{U}}^2$$

满足约束

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{y}(u),\boldsymbol{w})-b(\boldsymbol{w},r(\boldsymbol{u}))=(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\quad \forall\,\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Y},\\
&b(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{u}),\phi)=0,\quad \forall\,\phi\in Q.
\end{aligned}$$

由文献 [1] 可知, Stokes 方程最优控制问题有唯一解 $(\boldsymbol{y},r,\boldsymbol{u})\in\boldsymbol{Y}\times Q\times\boldsymbol{U}$ 的充要条件是, 存在唯一伴随状态量 $(\boldsymbol{p},s)\in\boldsymbol{Y}\times Q$ 使得 $(\boldsymbol{y},r,\boldsymbol{p},s,\boldsymbol{u})$ 满足下面一阶最优性条件:

$$a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{w})-b(\boldsymbol{w},r)=(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}),\quad \forall\,\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{Y},\tag{6.4}$$

$$b(\boldsymbol{y},\phi)=0,\quad \forall\,\phi\in Q,\tag{6.5}$$

$$a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+b(\boldsymbol{q},s)=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_d,\boldsymbol{q}),\quad \forall\,\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{Y},\tag{6.6}$$

$$b(\boldsymbol{p},\psi)=0,\quad \forall\,\psi\in Q, \tag{6.7}$$

$$(\alpha\boldsymbol{u}+B^*\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{U}}\geqslant 0,\quad \forall\,\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{U}_{ad}\subset\boldsymbol{U}, \tag{6.8}$$

其中 $B^*$ 是 $B$ 的对偶算子, $(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{U}}$ 是控制空间 $\boldsymbol{U}$ 上的内积.

下面考虑 Stokes 方程最优控制问题的有限元逼近. 本节使用线性混合有限元格式计算状态方程和伴随状态方程. 对于区域的剖分, 我们考虑被广泛应用的矩形剖分和三角形剖分.

设 $\boldsymbol{Y}_h\subset(H_0^1(\Omega))^2$ 和 $Q_h\subset L_0^2(\Omega)$ 分别是基于剖分 $\mathcal{T}_h$ 的关于速度和压力的混合有限元空间. 假设 $P_r$ 是三角形上不超过 $r$ 次的多项式集合, 其中 $r\geqslant 0$, $Q_r$ 是矩形上双 $r$ 次多项式的集合. 如果是三角形剖分, 设分片多项式空间 $\boldsymbol{Y}_h$ 包含 $P_1$, 对于矩形剖分, 设 $\boldsymbol{Y}_h$ 包含 $Q_1$. 分片多项式空间 $Q_h$ 包含 $P_0$, 即为分片常数空间. 为了得到唯一的有限元解, 两个有限元空间 $\boldsymbol{Y}_h$ 和 $Q_h$ 要满足下面的逼近性质:

**性质 P1** (速度近似空间 $\boldsymbol{Y}_h$ 的逼近性质)　对于任意 $\boldsymbol{y}\in(H^{m+1}(\Omega))^2$, 有

$$\inf_{\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{Y}_h}(\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_h\|_{0,\Omega}+h\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}_h\|_{1,\Omega})\leqslant Ch^{m+1}\|\boldsymbol{y}\|_{m+1,\Omega},\quad m=0,1.$$

**性质 P2** (压力近似空间 $Q_h$ 的性质)　对于任意的 $r\in H^m(\Omega)$, 有

$$\inf_{q_h\in Q_h}\|r-q_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^m\|r\|_{m,\Omega},\quad m=0,1.$$

**性质 P3** (一致 Babuška-Brezzi 条件)

$$\sup_{\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{Y}_h}\frac{b(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{q}_h)}{\|\boldsymbol{v}_h\|_{1,\Omega}}\geqslant C\|q_h\|_{0,\Omega},\quad \forall\,q_h\in Q_h.$$

常用的满足上面的假设条件的混合有限元空间包括稳定化的 $Q_1$-$P_0$ 元、Mini 混合元和线性 Bernardi-Raugel 混合元等, 参见文献 [53, 54].

基于剖分 $\mathcal{T}_h^U$ 构造 $L^2(\Omega_U)$ 的有限维子空间 $W_h^U$. 空间 $W_h^U$ 内的函数定义为, 对于 $\forall\chi\in W_h^U$ 和 $\tau_U\in\mathcal{T}_h^U$, $\chi\,|_{\tau_U}$ 是 0 阶多项式, 也就是分片常数空间, 这里不要求函数在整个区域内连续. 设 $\boldsymbol{U}_h=(W_h^U)^2$, 显然有 $\boldsymbol{U}_h\subset\boldsymbol{U}$.

根据上面的定义, 无限维控制问题可以转换成下面的近似有限维控制问题:

$$\min_{\boldsymbol{u}_h\in\boldsymbol{U}_{ad,h}\subset\boldsymbol{U}_h}J(\boldsymbol{y}_h,\boldsymbol{u}_h)=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}_h-\boldsymbol{y}_d\|_{\boldsymbol{H}}^2+\frac{\alpha}{2}\|\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}^2$$

满足约束

$$a(\boldsymbol{y}_h,\boldsymbol{w}_h)-b(\boldsymbol{w}_h,r_h)=(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{w}_h),\quad \forall\,\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{Y}_h\subset\boldsymbol{Y},$$

$$b(\boldsymbol{y}_h,\phi_h)=0,\quad \forall\,\phi_h\in Q_h\subset Q,$$

其中 $\boldsymbol{U}_{ad,h}$ 是空间 $\boldsymbol{U}^h$ 的一个闭凸子集, 它是 $\boldsymbol{U}_{ad}$ 的逼近, 本文设 $\boldsymbol{U}_{ad,h}=\boldsymbol{U}^h\cap\boldsymbol{U}_{ad}$.

上述最优控制问题有唯一解 $(\boldsymbol{y}_h,r_h,\boldsymbol{u}_h)\in\boldsymbol{Y}^h\times Q^h\times\boldsymbol{U}^h$ 的充分必要条件是, 存在唯一的伴随状态量 $(\boldsymbol{p}_h,s_h)\in\boldsymbol{Y}^h\times Q^h$ 使得 $(\boldsymbol{y}_h,r_h,\boldsymbol{p}_h,s_h,\boldsymbol{u}_h)$ 满足下面一阶最优性条件:

$$a(\boldsymbol{y}_h,\boldsymbol{w}_h)-b(\boldsymbol{w}_h,r_h)=(\boldsymbol{f}+B\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{w}_h),\quad \forall\,\boldsymbol{w}_h\in\boldsymbol{Y}_h\subset\boldsymbol{Y}, \tag{6.9}$$

$$b(\boldsymbol{y}_h,\phi_h)=0,\quad \forall\,\phi_h\in Q_h\subset Q, \tag{6.10}$$

$$a(\boldsymbol{q}_h,\boldsymbol{p}_h)+b(\boldsymbol{q}_h,s_h)=(\boldsymbol{y}_h-\boldsymbol{y}_d,\boldsymbol{q}_h),\quad \forall\,\boldsymbol{q}_h\in\boldsymbol{Y}_h\subset Y, \tag{6.11}$$

$$b(\boldsymbol{p}_h,\psi_h)=0,\quad \forall\,\psi_h\in Q_h\subset Q, \tag{6.12}$$

$$(\alpha\boldsymbol{u}_h+B^*\boldsymbol{p}_h,\boldsymbol{v}_h-\boldsymbol{u}_h)_{\boldsymbol{U}}\geqslant 0,\quad \forall\,\boldsymbol{v}_h\in\boldsymbol{U}_{ad,h}\subset\boldsymbol{U}. \tag{6.13}$$

定义误差

$$\begin{aligned} e=&\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_{\boldsymbol{U}}}+\|\nabla\boldsymbol{y}-\nabla\boldsymbol{y}_h\|_{0,\Omega}+\|r-r_h\|_{0,\Omega}\\ &+\|\nabla\boldsymbol{p}-\nabla\boldsymbol{p}_h\|_{0,\Omega}+\|s-s_h\|_{0,\Omega}, \end{aligned} \tag{6.14}$$

其中 $(\boldsymbol{y},r,\boldsymbol{p},s,\boldsymbol{u})$ 和 $(\boldsymbol{y}_h,r_h,\boldsymbol{p}_h,s_h,\boldsymbol{u}_h)$ 分别是方程 (6.4)–(6.8) 和 (6.9)–(6.13) 的解. 假如 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$, $r,s\in H^1(\Omega)\cap L_0^2(\Omega)$, $\boldsymbol{u}\in(H^1(\Omega_{\boldsymbol{U}}))^2$, 则有下面的最优误差估计:

$$e\leqslant C(h+h_{\boldsymbol{U}}).$$

文献 [47,48,50,51] 得到了 Stokes 方程分布最优控制问题的控制量 $\boldsymbol{u}$ 的超收敛结果. 设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}_h$ 分别是分布控制问题控制量的准确解和数值解. 假设 $\boldsymbol{u}\in(W^{1,\infty}(\Omega_{\boldsymbol{U}}))^2$, $\boldsymbol{y}\in(H^2(\Omega))^2$, $\boldsymbol{p}\in(W^{1,\infty}(\Omega))^2\cap(H^2(\Omega))^2$, 则有

$$\|\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_I\|_{0,\Omega_U}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{6.15}$$

$$\|R_h\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega_U}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{6.16}$$

其中 $R_h$ 是由 (3.1) 定义的.

下面考虑 Stokes 方程最优控制问题状态量 $\boldsymbol{y}$ 和 $r$ 及伴随状态量 $\boldsymbol{p}$ 和 $s$ 的有限元超收敛结果. 首先选取 $\boldsymbol{Y}_h$ 和 $Q_h$ 为 $Q_1$-$P_0$ 混合有限元空间. 假设 $\Omega$ 是一个多边形区域, 设 $\mathcal{T}_h=\{e\}$ 是 $\Omega$ 的一致矩形剖分, 网格大小为 $h$. 假设剖分 $\mathcal{T}_h$ 是由另一个剖分 $\mathcal{T}_{2h}=\{\tau\}$ 的每个矩形单元平均分成四个小矩形得到的, 即 $\tau=\bigcup_{i=1}^4 e_i$. 为得到 $r$ 和 $s$ 的超逼近结果, 我们还要在剖分 $\mathcal{T}_{2h}$ 的单元 $\tau$ 上定义算子 $\pi_h$:

$$\pi_h r\,|_{e_i}=\begin{cases} r_I-\dfrac{1}{4}\alpha_\tau, & i=1,4,\\ r_I+\dfrac{1}{4}\alpha_\tau, & i=2,3,\end{cases}$$

其中 $\tau=\bigcup_{i=1}^4 e_i$, $\alpha_\tau=r_1^\tau-r_2^\tau-r_3^\tau+r_4^\tau$, $r_i^\tau=r_I\,|_{e_i}$ $(i=1,2,3,4)$, $r_I$ 为 $r$ 在单元 $e$ 上的积分平均. 设 (6.15) 的条件成立, $\mathcal{T}_h$ 是一致矩形剖分, $(\boldsymbol{y},r,\boldsymbol{p},s)$ 是方程 (6.4)–(6.8) 的解并且 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{p}\in(H^3(\Omega))^2$, $r,s\in H^2(\Omega)$. $(\boldsymbol{y}_h,r_h,\boldsymbol{p}_h,s_h)$ 是方程 (6.9)–(6.13) 的解, 则

$$\|\boldsymbol{y}_h-\boldsymbol{y}_I\|_{1,\Omega}+\|r_h-\pi_h r\|_{0,\Omega}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{6.17}$$

$$\|\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}_I\|_{1,\Omega}+\|s_h-\pi_h s\|_{0,\Omega}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{6.18}$$

其中 $\boldsymbol{y}_I,\boldsymbol{p}_I$ 是 $y$ 和 $p$ 的插值.

为了得到状态量 $\boldsymbol{y}$ 和 $r$ 及伴随状态量 $\boldsymbol{p}$ 和 $s$ 的整体超收敛结果, 令 $\Pi_{2h}$ 和 $I_{2h}$ 是由 (2.17) 和 (2.18) 定义的插值后处理算子. 基于超逼近结果 (6.17) 和 (6.18), 我们有以下整体超收敛结果:

$$\|\Pi_{2h}\boldsymbol{y}_h-\boldsymbol{y}\|_{1,\Omega}+\|I_{2h}r_h-r\|_{0,\Omega}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}), \tag{6.19}$$

$$\|\Pi_{2h}\boldsymbol{p}_h-\boldsymbol{p}\|_{1,\Omega}+\|I_{2h}s_h-s\|_{0,\Omega}\leqslant C(h^2+h_U^{\frac{3}{2}}). \tag{6.20}$$

以上超收敛结果建立在特殊矩形剖分的基础上, 所以应用范围比较窄. 基于 Wang [55] 的思想和技术, 可建立一般三角形剖分和四边形剖分的有限元超收敛分析. 下面讨论基于一般三角形剖分和四边形剖分的线性协调混合元的超收敛性质, 如 Mini 混合元和线性 Bernardi-Raugel 混合元等.

下面构造粗网格上的状态量 $\boldsymbol{y}$ 和 $r$ 的有限元解及对偶状态量 $\boldsymbol{p}$ 和 $s$ 的有限元解的后处理算子. 相对于以上定义的剖分 $\mathcal{T}_h$, 设 $\mathcal{T}_{H_i}$, $i=1,2$ 是区域 $\Omega$ 的另两个剖分, 且网格的直径为 $H_i$, $h<H_i$ $(i=1,2)$. 这里允许 $H_i$ 比 $h$ 充分的大, 这一点在证明超收敛性质时发挥重要的作用. 我们要求剖分 $\mathcal{T}_{H_i}$ $(i=1,2)$ 是拟一致的, 即剖分是正规的且满足逆条件. 基于剖分 $\mathcal{T}_{H_1}$ 和 $\mathcal{T}_{H_2}$, 我们分别构造两个有限元空间 $\boldsymbol{Y}_{H_1}$ 和 $Q_{H_2}$, 如果是三角形剖分, 它们分别是二次多项式空间和线性多项式空间; 如果是四边形剖分, 它们分别是双二次多项式空间和双线性多项式空间. 定义 $\mathcal{P}_{H_1}$ 和 $\mathcal{P}_{H_2}$ 是两个从 $L^2(\Omega)$ 分别映射到 $\boldsymbol{Y}_{H_1}$ 和 $Q_{H_2}$ 的 $L^2$ 投影算子, 则我们可以发现 $\mathcal{P}_{H_1}\boldsymbol{y}_h$, $\mathcal{P}_{H_1}\boldsymbol{p}_h$, $\mathcal{P}_{H_2}r_h$ 和 $\mathcal{P}_{H_2}s_h$ 分别是 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{p}$, $r$ 和 $s$ 的近似解, 且比 $\boldsymbol{y}_h$, $\boldsymbol{p}_h$, $r_h$ 和 $s_h$ 要好.

我们的后处理算子是把有限元解投影到另一个粗网格上的高次有限元空间上, 选择适当的 $H_i=H_i(h)$ 可以得到状态量和伴随状态量的超收敛结果. 设

$$H_i=h^{\alpha_i},\quad i=1,2,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2\in(0,1)$. 参数 $\alpha_i$ 在得到超收敛解的过程中扮演重要角色. 假设 $\boldsymbol{y},p\in H^3(\Omega)$, $r,s\in H^2(\Omega)$. 令 $\alpha_1=\alpha_2=\frac{2}{3}$, 即

$$H_1=h^{2/3},\quad H_2=h^{2/3},$$

则有

$$|\boldsymbol{y}-\mathcal{P}_{H_1}\boldsymbol{y}_h|_{1,\Omega}+|\boldsymbol{p}-\mathcal{P}_{H_1}\boldsymbol{p}_h|_{1,\Omega}\leqslant C(h^{\frac{4}{3}}+h_{\boldsymbol{U}}^{\frac{3}{2}}),\tag{6.21}$$

$$\|r-\mathcal{P}_{H_2}r_h\|_{0,\Omega}+\|s-\mathcal{P}_{H_2}s_h\|_{0,\Omega}\leqslant C(h^{\frac{4}{3}}+h_{\boldsymbol{U}}^{\frac{3}{2}}).\tag{6.22}$$

此外, Rösch 和 Vexler [56] 利用稳定化方法考虑了 Stokes 方程分布控制问题, 采用了稳定化的等阶有限元方法逼近状态, 对最优控制使用分片常数有限元逼近. 他们采用文献 [15] 中的技术和后处理思想进行了超收敛分析, 得到了最优控制的 $O(h^2)$ 阶的超收敛性.

与椭圆方程最优控制问题类似, 我们也可以基于超收敛分析, 得到重构型后验误差估计. 假设误差 $e$ 满足 "非退化" 条件

$$c(h+h_{\boldsymbol{U}})\leqslant e,$$

其中 $c$ 是与 $h$ 和 $h_{\boldsymbol{U}}$ 无关的正常数. 定义重构型后验误差指示子

$$\begin{aligned}\eta_g=&\|R_h\boldsymbol{u}_h-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega_{\boldsymbol{U}}}+\|\mathcal{M}_h\boldsymbol{y}_h-\nabla\boldsymbol{y}_h\|_{0,\Omega}+\|\mathcal{M}_h\boldsymbol{p}_h-\nabla\boldsymbol{p}_h\|_{0,\Omega}\\&+\|\mathcal{N}_hr_h-r_h\|_{0,\Omega}+\|\mathcal{N}_hs_h-s_h\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{M}_h$ 表示重构 $\boldsymbol{y}_h$ 和 $\boldsymbol{p}_h$ 的算子 $\nabla\Pi_{2h}$ 或 $\nabla\mathcal{P}_{H_1}$, $\mathcal{N}_h$ 表示重构 $r_h$ 和 $s_h$ 的算子 $I_{2h}$ 或 $\mathcal{P}_{H_2}$, 算子 $R_h$ 由 (3.1) 定义, 则 $\eta_g$ 是误差 $e$ 很好的逼近. 基于 (6.16) 和 (6.19)–(6.22) 的超收敛结果可以证明, 当 "非退化" 条件成立时, 我们有

$$\lim_{h,h_{\boldsymbol{U}}\to0}\frac{\eta_g}{e}=1.$$

因此可知, 假如 "非退化" 条件满足且超收敛结果成立, 则重构型后验误差指示子 $\eta_g$ 是渐近精确的.

## 7 抛物型方程最优控制问题的有限元超收敛

本节主要考虑以下抛物方程分布最优控制问题:

$$\min_{u\in U_{ad}} J(y,u)=\frac{r_1}{2}\|y-y_d\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{r_2}{2}\|y(T)-y_T\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega_U))} \tag{7.1}$$

满足状态方程约束

$$\begin{cases} y_t-\Delta y=f+Bu, & \Omega\times(0,T],\\ y=0, & \partial\Omega\times(0,T],\\ y(\cdot,0)=y_0, & \Omega,\end{cases} \tag{7.2}$$

其一阶最优性条件可以写为

$$\begin{cases} y_t-\Delta y=f+Bu, \quad \Omega\times(0,T],\\ y=0, \quad \partial\Omega\times(0,T], \quad y(\cdot,0)=y_0, \quad \Omega,\\ -p_t-\Delta p=r_1(y-y_d), \quad \Omega\times[0,T),\\ p=0, \quad \partial\Omega\times[0,T), \quad p(\cdot,T)=r_2(y(\cdot,T)-y_T), \quad \Omega,\\ \displaystyle\int_0^T\int_{\Omega_U}(\alpha u+B^*p)(v-u)dxdt\geqslant 0, \quad \forall\, v\in U_{ad}.\end{cases} \tag{7.3}$$

下文考虑 $r_2=0$, 即无终端时间状态观测的情形.

类似于椭圆最优控制问题, 若 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n=2,3)$ 是凸多边形或多面体区域, 则有

$$y,p\in L^2(0,T;H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

若控制约束集 $U_{ad}$ 具有逐点约束形式

$$U_{ad}:=\{u\in U:\beta_l(x,t)\leqslant u(x,t)\leqslant\beta_u(x,t), \text{a.e. } (x,t)\in\Omega_U\times(0,T)\}, \tag{7.4}$$

则有

$$u\in L^2(0,T;W^{1,s}(\Omega_U))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega_U)),$$

其中当 $n=2$ 时, $s<\infty$; 当 $n=3$ 时, $s\leqslant 6$. 若控制约束集 $U_{ad}$ 具有积分型约束形式 (2.4) 或者 $U_{ad}=L^2(0,T;L^2(\Omega_U))$, 则有

$$u\in L^2(0,T;H^2(\Omega_U))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega_U)).$$

本节考虑抛物型方程最优控制问题的有限元方法. 在全离散的情形下, 我们需要对时间区域进行剖分, 对于时间离散, 我们采用向后 Euler 格式, 或者等价地分片常数不连续 Galerkin 格式. 考虑对时间区域 $I=[0,T]$ 的剖分,

$$\overline{I}=I_1\cup I_2\cup\cdots\cup I_N,$$

其中 $I_i=[t_{i-1},t_i]$, 其长度记为 $k_i$, 时间剖分点记为

$$0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=T.$$

定义分片常数时间步长参数 $k$ 满足 $k\,|_{I_i}= k_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$. 定义全离散有限元空间

$$V_{h,k} := \{v : \bar{\Omega} \times I \to \mathbb{R}, v(\cdot, t)\,|_{\bar{\Omega}} \in V_h, v(x, \cdot)\,|_{I_i} \in \mathbb{P}_0, i = 1, \dots, N\}.$$

注意到 $v \in V_{h,k}$ 关于时间变量是分片常数. 类似地, 我们可以定义最优控制的全离散空间 $U_{h,k}$.

对抛物型最优控制问题的研究可以追溯到 19 世纪 70 年代末, 文献 [57,58] 研究了抛物最优控制问题的 Ritz-Galerkin 逼近, 得到了关于最优控制、最优状态和目标泛函的先验误差估计. Liu 和 Yan [59] 首次研究了抛物控制问题的后验误差估计. 随后, Rösch [60] 研究了对最优控制的分片线性有限元逼近, 在具有逐点控制约束的情形下得到了关于空间离散的 $O(h^{\frac{3}{2}})$ 的收敛阶. Meidner 和 Vexler [61] 考虑了具有逐点控制约束的抛物最优控制问题的全离散有限元逼近, 对分片常数、分片线性、变分离散和后处理四种格式离散最优控制的不同情形得到了最优的收敛阶为

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C(h + k), \quad \text{分片常数离散}, \tag{7.5}$$
$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C(h^{\frac{3}{2}-\frac{1}{s}} + k), \quad \text{分片线性离散}, \tag{7.6}$$
$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C(h^2 + k), \quad \text{变分离散}, \tag{7.7}$$
$$\|u - \hat{u}_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C(h^{2-\frac{1}{s}} + k), \quad \text{分片常数离散 + 后处理}. \tag{7.8}$$

关于抛物最优控制问题的混合有限元方法, 文献 [62] 考虑了半离散混合有限元逼近, 利用 RT0 有限元逼近状态变量、分片常数逼近最优控制, 得到了 $O(h)$ 的收敛性. 随后, 文献 [63, 64] 研究了线性和半线性抛物最优控制问题全离散混合有限元逼近, 对控制逐点约束的问题进行了先验误差估计, 得到了如下收敛阶:

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C(h + k). \tag{7.9}$$

关于抛物最优控制问题的超收敛, 文献 [65] 考虑了具有逐点控制约束的抛物最优控制问题的半离散混合有限元逼近, 得到了真解的插值与有限元解之间的超收敛性,

$$\|u_I - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|y_I - y_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|p_I - p_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant Ch^{\frac{3}{2}}, \tag{7.10}$$

其中 $y_I$, $p_I \in V_h$ 是 $y$ 和 $p$ 的插值. 文献 [66] 考虑了抛物最优控制问题的半离散有限元逼近, 得到了真解的插值与有限元解之间 $O(h^2)$ 的超收敛性. 关于具有逐点控制约束和积分控制约束的线性和半线性抛物方程及双曲方程最优控制问题相关的研究可参见文献 [67–70].

文献 [71] 研究了线性抛物最优控制问题全离散有限元逼近的超收敛性,

$$\|Q_h u - u_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|P_h y - y_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|P_h p - p_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leqslant C(h^{\frac{3}{2}} + k), \tag{7.11}$$

其中 $Q_h$ 和 $P_h$ 分别是 $L^2$ 投影算子和 Riesz 投影算子; 进一步得到了重构型后验误差估计子:

$$\eta_g^2 = \|u_h - R_h u_h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla y_h - G_h y_h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla p_h - G_h p_h\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \tag{7.12}$$

其中 $R_h$ 和 $G_h$ 由 (3.1) 和 (3.2) 所定义; 基于超收敛结果 (7.11), 证明了上述后验误差估计子是渐近精确的. 文献 [72] 把上述结果推广到半线性抛物方程最优控制问题.

## 8 结语

本文简要回顾了偏微分方程最优控制问题的有限元高精度分析和基于高精度分析的高效有限元算法的若干研究工作, 包括椭圆型方程、抛物型方程最优控制问题的有限元超收敛, 椭圆型方程、Stokes 方程最优控制问题的混合有限元超收敛, 基于高精度分析的后验误差估计和自适应有限元方法, 以及有限元外推和校正. 由以上综述可见, 将林群院士倡导的有限元高精度分析思想和技术应用于偏微分方程最优控制问题的数值分析和计算, 取得了一批有意义的工作. 通过高精度分析, 可构造一批高效计算方法, 大大提高计算精度和计算效率, 具有重要的理论价值和实际意义.

目前关于偏微分方程最优控制问题的有限元高精度分析已取得一批有意义的工作, 但许多理论结果都局限于较为简单的模型问题, 特别是目前外推和校正的结果仅限于最为简单的无约束椭圆型分布控制问题. 对于更多的实际问题 (如非线性最优控制问题、边界控制问题等) 的有限元高精度分析是更为困难且具有挑战性的研究课题, 需要进一步地研究. 此外, 如何利用已知的高精度分析结果构造高效计算方法, 并且应用到更多实际最优控制问题的数值计算中也是未来的研究课题之一.

**致谢** 感谢审稿人所提的宝贵意见.

## 参考文献

1 Lions J L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. New York/Berlin: Springer-Verlag, 1971
2 Falk F S. Approximation of a class of optimal control problems with order of convergence estimates. J Math Anal Appl, 1973, 44: 28–47
3 Liu W, Yan N. A posteriori error estimates for some model boundary control problems. J Comput Appl Math, 2000, 120: 159–173
4 Liu W, Yan N. A posteriori error estimates for distributed convex optimal control problems. Adv Comput Math, 2001, 15: 285–309
5 Becker R, Rannacher R. An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. Acta Numer, 2001, 10: 1–102
6 Neittaanmaki P, Tiba D. Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems: Theory, Algorithms and Applications. New York: Marcel Dekker, 1994
7 Liu W, Yan N. Adaptive Finite Element Methods for Optimal Control Governed by PDEs. Beijing: Science Press, 2008
8 Hinze M, Pinnau R, Ulbrich M, et al. Optimization with PDE Constraints. Mathematical Modelling: Theory and Applications. New York: Springer, 2009
9 Zhu Q, Lin Q. Superconvergence Theory of Finite Element Methods. Changsha: Hunan Science Press, 1989
10 Lin Q, Zhu Q. The Preprocessing and Postprocessing for the Finite Element Method. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1994
11 Lin Q, Yan N. Structure and Analysis for Efficient Finite Element Methods. Baoding: Publishers of Hebei University, 1996
12 Lin Q, Lin J. Finite Element Methods: Accuracy and Improvement. Beijing: Science Press, 2006
13 Yan N. Superconvergence Analysis and a Posteriori Error Estimation in Finite Element Methods. Beijing: Science Press, 2006
14 Du L, Yan N. High-accuracy finite element method for optimal control problem. J Syst Sci Complex, 2001, 14: 106–110
15 Meyer C, Rösch A. Superconvergence properties of optimal control problems. SIAM J Control Optim, 2004, 43: 970–985
16 Yan N. Superconvergence and recovery type a posteriori error estimate for constrained convex optimal control problems. In: Advance in Scientific Computing and Applications. Beijing/New York: Science Press, 2004, 408–419
17 Yang D, Chang Y, Liu W. A priori error estimate and superconvergence analysis for an optimal control problem of bilinear type. J Comput Math, 2008, 26: 471–487

18 Chang Y, Yang D. Superconvergence analysis of finite element methods for optimal control problems of the stationary Benard type. J Comput Math, 2008, 26: 660–676

19 Chen Y, Dai Y. Superconvergence for optimal control problems governed by semi-linear elliptic equations. J Sci Comput, 2009, 39: 206–221

20 Yan N. Recovery type a posteriori error estimate for distributed convex optimal control problems governed by integral-differential equations. In: Recent Advances in Adaptive Computation, Contemporary Mathematics 383. Providence, RI: Amer Math Soc, 2005, 345–360

21 Yan N. Superconvergence analysis and a posteriori error estimation of a FEM for an optimal control problem governed by integral equations. Appl Math, 2009, 54: 267–283

22 Chen Y, Yi N, Liu W. A Legendre-Galerkin spectral method for optimal control problems governed by elliptic equations. SIAM J Numer Anal, 2008, 46: 2254–2275

23 Liu W, Yang D, Yuan L, et al. Finite element approximations of an optimal control problem with integral state constraint. SIAM J Numer Anal, 2010, 48: 1163–1185

24 Zienkiewicz O C, Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, I: The recovery technique. Internat J Numer Methods Engrg, 1992, 33: 1331–1364

25 Zienkiewicz O C, Zhu J. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, II: Error estimates and adaptivity. Internat J Numer Methods Engrg, 1992, 33: 1365–1382

26 Yan N, Zhou A. Gradient recovery type a posteriori error estimates for finite element approximations on irregular meshes. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2001, 190: 4289–4299

27 Naga A, Zhang Z. A posteriori error estimates based on polynomial preserving recovery. SIAM J Numer Anal, 2004, 42: 1780–1800

28 Yan N. A posteriori error estimators of gradient recovery type for FEM of optimal control problem. Adv Comput Math, 2003, 19: 323–336

29 Li R, Liu W, Yan N. A posteriori error estimates of recovery type for distributed convex optimal control problems. J Sci Comput, 2007, 33: 155–182

30 Liu T, Yan N, Zhang S. Richardson extrapolation and defect correction of finite element methods for optimal control problems. J Comput Math, 2010, 28: 55–71

31 Chen Y, Huang Y, Hou T. Richardson extrapolation and defect methods for elliptic optimal control problems. J Korean Math Soc, 2012, 49: 549–569

32 Chen Y, Liu W. Error estimates and superconvergence of mixed finite element for quadratic optimal control. Int J Numer Anal Model, 2006, 3: 311–321

33 Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. New York: Springer-Verlag, 1991

34 Chen Y. Superconvergence of quadratic optimal control problems by triangular mixed finite elements. Internat J Numer Methods Engrg, 2008, 75: 881–898

35 Chen Y. Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems. Math Comput, 2008, 77: 1269–1291

36 Chen Y, Huang Y, Liu W, et al. Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for convex optimal control problems. J Sci Comput, 2010, 42: 382–403

37 Chen Y, Dai L, Lu Z. Superconvergence of rectangular mixed finite element methods for constrained optimal control problem. Adv Appl Math Mech, 2010, 2: 56–75

38 Chen Y, Zheng W, Hou T. Error estimates and Superconvergence of mixed finite element methods for optimal control problems with low regularity. Adv Appl Math Mech, 2012, 4: 751–768

39 Hou T, Chen Y. Superconvergence for elliptic optimal control problems discretized by RT1 mixed finite elements and linear discontinuous elements. J Ind Manag Optim, 2013, 9: 631–642

40 Hou T, Chen Y. Superconvergence of RT1 mixed finite element approximations for elliptic control problems. Sci China Math, 2013, 56: 267–281

41 Zhou J, Chen Y, Dai Y. Superconvergence of triangular mixed finite elements for optimal control problems with an integral constraint. Appl Math Comput, 2010, 217: 2057–2066

42 Deng K, Chen Y, Lu Z. Higher order triangular mixed finite element methods for semilinear quadratic optimal control problems. Numer Math Theory Methods Appl, 2011, 4: 180–196

43 Chen Y, Hou T. Superconvergence and $L^\infty$-error estimates of RT1 mixed methods for semilinear elliptic control problems with an integral constraint. Numer Math Theory Methods Appl, 2012, 5: 423–446

44 Chen Y, Hou T. Error estimates and superconvergence of RT0 mixed methods for a class of semilinear elliptic optimal control problems. Numer Math Theory Methods Appl, 2013, 6: 637–656

45 Chen Y, Lu Z, Huang Y. Superconvergence of triangular Raviart-Thomas mixed finite element methods for bilinear constrained optimal control problem. Comput Math Appl, 2013, 66: 1498–1513
46 Liu W, Yan N. A posteriori error estimates for control problems governed by Stokes equations. SIAM J Numer Anal, 2002, 40: 1850–1869
47 Liu H, Yan N. Superconvergence and a posteriori error estimates for optimal control problems governed by Stokes equations. Numer Math J Chinese Univ, 2005, 27: 56–60
48 Liu H, Yan N. Global superconvergence for optimal control problems governed by Stokes equations. Int J Numer Anal Model, 2006, 3: 283–302
49 Liu H, Yan N. Superconvergence and a posteriori error estimates for boundary control governed by Stokes equations. J Comput Math, 2006, 24: 343–356
50 Liu H, Yan N. Superconvergence analysis for optimal control problems governed by Stokes equations. J Numer Methods Comput Appl, 2006, 27: 281–291
51 Liu H, Yan N. Recovery type superconvergence and a posteriori error estimates for control problems governed by Stokes equations. J Comput Appl Math, 2007, 209: 187–207
52 Liu H, Yan N. Superconvergence and a posteriori error estimates of nonconforming FEM for boundary control governed by Stokes equations. In: Recent Advances in Computational Sciences. Singapore: World Scientific Publishing, 2008, 133–155
53 Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms. New York: Springer-Verlag, 1986
54 Bernardi C, Raugel G. Analysis of some finite elements for the Stokes problem. Math Comp, 1985, 44: 71–79
55 Wang J. A superconvergence analysis for finite element solutions by the least-squares surface fitting on irregular meshes for smooth problems. J Math Study, 2000, 33: 229–243
56 Rösch A, Vexler B. Optimal control of the Stokes equations: A priori error analysis for finite element discretization with postprocessing. SIAM J Numer Anal, 2006, 44: 1903–1920
57 Lasiecka I, Malanowski K. On discrete-time Ritz-Galerkin approximation of control constrained optimal control problems for parabolic systems. Control Cybernet, 1978, 7: 21–36
58 Malanowski K. Convergence of approximations vs. regularity of solutions for convex, control-constrained optimal-control problems. Appl Math Optim, 1981, 8: 69–95
59 Liu W, Yan N. A posteriori estimates for optimal control problems governed by parabolic equations. Numer Math, 2003, 93: 497–521
60 Rösch A. Error estimates for parabolic optimal control problems with control constraints. Z Anal Anwend, 2004, 23: 353–376
61 Meidner D, Vexler B. A priori error estimates for space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems, II: Problems with control constraints. SIAM J Control Optim, 2008, 47: 1301–1329
62 Xing X, Chen Y. Error estimates of mixed methods for optimal control problems governed by parabolic equations. Internat J Numer Methods Engrg, 2008, 75: 735–754
63 Chen Y, Lu Z. Error estimates for parabolic optimal control problem by fully discrete mixed finite element methods. Finite Elem Anal Des, 2010, 46: 957–965
64 Chen Y, Lu Z. Error estimates of fully discrete mixed finite element methods for semilinear quadratic parabolic optimal control problem. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2010, 199: 1415–1423
65 Xing X, Chen Y. Superconvergence of mixed methods for optimal control problems governed by parabolic equations. Adv Appl Math Mech, 2011, 3: 401–419
66 Hou C, Chen Y, Lu Z. Superconvergence property of finite element methods for parabolic optimal control problems. J Ind Manag Optim, 2011, 7: 927–945
67 Tang Y, Hua Y. Superconvergence of fully discrete finite elements for parabolic control problems with integral constraints. East Asian J Appl Math, 2013, 3: 138–153
68 Tang Y, Chen Y. Superconvergence of finite element methods for optimal control problems governed by parabolic equations with time-dependent coefficients. East Asian J Appl Math, 2013, 3: 209–227
69 Dai Y, Chen Y. Superconvergence for general convex optimal control problems governed by semilinear parabolic equations. ISRN Appl Math, 2014, 2014: 579047
70 Chen Y, Sun C. Error estimates and superconvergence of mixed finite element methods for fourth order hyperbolic control problems. Appl Math Comput, in press, 2014
71 Tang Y, Chen Y. Recovery type a posteriori error estimates of fully discrete finite element methods for general convex parabolic optimal control problems. Numer Math Theory Methods Appl, 2012, 5: 573–591

72 Tang Y, Chen Y. Superconvergence analysis of fully discrete finite element methods for semilinear parabolic optimal control problems. Front Math China, 2013, 8: 443–464

# High accuracy analysis of finite element methods for optimal control problems and its application

GONG Wei, LIU HuiPo & YAN NingNing

**Abstract** In this paper, we briefly review the recent advances of superconvergence analysis and related efficient finite element algorithms for PDE-constrained optimal control problems. The emphasis is on the superconvergence of finite element approximations to optimal control problems governed by elliptic and parabolic equations, the superconvergence of mixed finite element approximations to optimal controls of elliptic and Stokes equations, the recovery type a posteriori error estimates and the extrapolation and defect correction methods for optimal controls. We give a survey on the above topics and perspectives for future work are included.

**Keywords** **optimal control problem, finite element method, superconvergence**

**MSC(2010)** **49J20, 65N15, 65N30**

**doi: 10.1360/N012014-00182**