研究通讯

初等算子的数值域和本性数值域

设 $B(H)$ 表示 Hilbert 空间H中线性有界算子全体构成的 Banach 代数，C_2 为 $B(H)$ 中的 Hilbert-Schmidt 算子类. 任意 A、$B\in B(H)$，定义

$$\tau_{AB}(X)=AXB,\ X\in B(H),$$

称 τ_{AB} 为由 A、B 定义的 $B(H)$ 上的初等算子.

定理1 设H为可分 Hilbert 空间，τ_{AB} 为 $C_2\to C_2$ 的初等算子，则有

$$\operatorname{clco}(V(A)V(B))\subseteq V(\tau_{AB})\subseteq[\operatorname{clco}(V(A)V(B))]_{2\|A\|\cdot\|B\|},\tag{1}$$

此处 $V(\tau_{AB})$ 表示 τ_{AB} 的代数数值域，$\operatorname{clco}(V(A)V(B))$ 表示数集 $V(A)V(B)$ 的闭凸包，$[\operatorname{clco}(V(A)V(B))]_{2\|A\|\cdot\|B\|}=\{\lambda:\lambda=\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1\in\operatorname{clco}(V(A)V(B)),|\lambda_2|\leqslant 2\|A\|\cdot\|B\|\}$.

此定理证明的关键是先证出 C_2与$H\otimes\bar{H}$同构，τ_{AB}与 $A\otimes\bar{B}^*$ 酉等价，则 (1) 式等价于

$$\operatorname{clco}(V(A)V(B))\subseteq V(A\otimes B)\subseteq[\operatorname{clco}(V(A)V(B))]_{2\|A\|\cdot\|B\|},\tag{2}$$

此处$A\otimes B$为$H\otimes H$上的算子.

定理2 设H为可分 Hilbert 空间，A, $B\in B(H)$，τ_{AB}为 $C_2\to C_2$的初等算子，则有

$$\operatorname{clco}(V_e(A)V(B)\cup V(A)V_e(B))\subseteq V_e(\tau_{AB})\subseteq[\operatorname{clco}(V_e(A)V(B)\cup V(A)V_e(B))]_{2r^2r(A)r(B)},$$

这里 $V_e(\tau_{AB})$ 为 τ_{AB} 的本性代数数值域，$r(A)$、$r(B)$ 分别为算子 A、B 的数值域半径.

此定理证明的关键是:

引理[1] 任取 $T\in B(H)$，$\varepsilon>0$，存在H的有限余维子空间 H_ε，使得T在H_ε上的压缩T_ε的数值域包含于$(V_e(T))_\varepsilon$内.

利用定理1及上述引理首先对拟对角算子 A、B 证明定理2，再将任意算子 A、B 化为拟对角算子的情形.

参 考 文 献

[1] Bojan Magalna, *Proc. Amer. Math. Soc.* **99** (1987), 1:86—92.

冯文英　王元夔

(河北师范大学数学系，石家庄 050016)

算子扰动理论的应用*

本文给出了 Crandall 和 Robinowitz[1] 的一个算子扰动定理在胎次递进人口动力学理论[2]中的应用，得到了扰动后的一阶计算公式.

定义线性算子B如下:

$$D(B)=\{X(s)\,|\,X(s),\ X'(s)-\Lambda(s)X(s)+\hat{\Lambda}(s)^TX(0)\in H,X(M)=0\},$$

$$BX(s)=X'(s)-\Lambda(s)X(s)+\hat{\Lambda}(s)^TX(0),\quad\forall X(s)\in D(B),$$

其中 $\hat{\Lambda}(s)^T$ 表示矩阵 $\hat{\Lambda}(s)$ 的转置矩阵. 记

$$F(\lambda)=1-\sum_{i=0}^{N-1}k_i\beta_0(\lambda)\beta_1(\lambda)\cdots\beta_i(\lambda),$$

* 山东省教育委员会科研基金资助课题.

这里 $B_i(\lambda)=\int_0^M \lambda_i(s)e^{-\lambda s-\int_0^s \lambda_i(\rho)d\rho}\,ds$,

$$i=0,1,\cdots N.$$

定理1 设 λ 为复数. $\lambda\in\sigma(B)=\sigma_p(B)\Longleftrightarrow F(\lambda)=0$.

定理2 $A^*=B$.

这里 A 为胎次递进人口算子[2].

给定一组胎次递进比 $\lambda_i^{(0)}(s)$ $(i=0,1,\cdots,N)$,由它们组成的对角阵记为 $\Lambda^0(s)$,边界条件矩阵记为 $\hat{\Lambda}^0(s)$,相应的胎次人口算子记为 $A_0=L_0+K_0$,其中 L_0 是一微分算子,而 K_0 是一乘法算子. c_0, Q_0 及 f_0 是相应的有关算子. μ_0 是 A_0 的唯一实本征值, φ_0 是 A_0 的相应本征值 μ_0 的非负本征向量. ψ_0 是 A^* 的相应于本征值 μ_0 的本征向量. 设 $\delta\lambda_i(s)$ 是相应于诸 $\lambda_i^{(0)}(s)$ 的小扰动. 记 $\lambda_i(s)=\lambda_i^{(0)}(s)+\delta\lambda_i(s)$,相应地有 L, K, c, Q, f 及 $\delta K=K-K_0$, $\delta Q=Q-Q_0$, $\delta f=f-f_0$.

定理3 胎次递进人口算子 A_0 的实本征值 μ_0 为 $I+L_0^{-1}K_0$ 的 L_0^{-1}-本征值[1].

定理4 (1) $\dot{\mu}_0$ 的计算公式为

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_0=(&-\mu_0L_0[Q_0^{-1}\delta f\varphi_0-Q_0^{-1}\delta QQ_0^{-1}f_0\varphi_0]e^{-bs}\\&+\delta K\varphi_0+L_0[Q_0^{-1}\delta fK_0\varphi_0\\&-Q_0^{-1}\delta QQ_0^{-1}f_0K_0\varphi_0]e^{-bs},\\&\psi_0)/(\varphi_0,\psi_0),\end{aligned}$$

(2) $\dot{\varphi}_0$ 满足关系式

$$(\dot{\varphi}_0,\varphi_0)=0.$$

参 考 文 献

[1] Crandall, M. G. & Robinowitz, P. H. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52(1973), 161—180.

[2] 于景元、朱广田等,中国科学,A辑,1989,1: 66—78.

高述春

(烟台师范学院数学系,烟台 264000)

反射扩散过程的极集

设 $D\subset \mathbf{R}^d$ 为有界 C^3 区域,边界 ∂D 上的单位内法向为 $\boldsymbol{n}(x)=(n_1(x),\cdots,n_d(x))$, $x\in\partial D$. 对 $u\in C^1(\bar{D})$, 记

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)n_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j},\ x\in\partial D.$$

$\sigma(dx)$ 表示 ∂D 上 Lebesgue 测度. 考虑

$$L=\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^d b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c,$$

其中 (a_{ij}) 对称,一致椭圆且 $a_{ij}\in C^{2,\lambda}(\bar{D})$, $b_i\in C^{1,\lambda}(\bar{D})$, $i,j=1,\cdots,d$. $c\in C^\lambda(\bar{D})$ 且非正,此外

$$c-\sum_{i=1}^d\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\bigg|_D\leqslant 0,$$

$$K-\sum_{i=1}^d b_in_i\bigg|_{\partial D}\leqslant 0,\ K\in C^{2,\lambda}(\partial D).$$

我们利用经典方法构造了 $\bar{D}$ 上的反射扩散过程 $X=(X_t,P_x)_{x\in\bar{D}}$ 以 $p(t,x,y)$ 为转移密度,这里 $p(t,x,y)$ 为边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}=L_xu(t,x),\ x\in D,t>0,\\ K(x)u(t,x)+\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial n_x}=0,\\ \qquad\qquad x\in\partial D,\ t>0.\end{cases}$$

的唯一基本解.

我们又证明了下述广义 Dirichlet 形式所对应的扩散过程正好是 $X=(X_t,P_x)_{x\in\bar{D}}$.

$$\begin{cases}\mathscr{E}(u,v)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^d\int_D a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}dx\\ \qquad-\displaystyle\sum_{i=1}^d\int_D b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}v(x)dx\\ \qquad-\displaystyle\int_D c(x)u(x)v(x)dx\\ \qquad-\displaystyle\int_{\partial D}K(x)u(x)v(x)\sigma(dx),\\ \mathscr{D}(\mathscr{E})=H^1(\bar{D}).\end{cases}$$