根偏序集及其富反链

献给刘绍学教授 90 华诞

Claus Michael Ringel

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, Bielefeld 33 501, Germany

E-mail: ringel@math.uni-bielefeld.de

收稿日期: 2018-01-22; 接受日期: 2018-06-20; 网络出版日期: 2018-10-31

摘要 令 Δ 为一个秩为 n ($n \geq 2$) 的 (连通) Dynkin 图 (diagram), 令 $\Phi_+ = \Phi_+(\Delta)$ 为对应的根偏序集 (root poset) (它由对应于一个固定的根基 (root basis) 的所有正根构成). Φ_+ 的宽度 (width) 是 n . 本文将证明 Φ_+ 是“圆锥形的” (conical), 即它是 n 个实心链 (solid chain) 的非交并. Φ_+ 中的富反链 (rich antichain) 是基数 (cardinality) 为 $n-1$ 的反链. 众所周知, 富反链的个数等于 Φ_+ 的基数. Φ_+ 中富反链的集合 $\mathcal{R}(\Delta)$ 自身可看作是一个偏序集, 它与 Φ_+ 相似, 却并不总是同构于 Φ_+ . 本文将证明, 总是存在唯一的富反链 A 使得任意富反链都包含在由 A 生成的理想中. 对于 $\Delta \neq \mathbb{E}_6$, A 中所有根的长度都相同, 即为 e_2 , 其中 $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$ 是 Δ 的指数 (exponent). 对于 $\Delta = \mathbb{E}_6$, 反链 A 包含四个长度为 $e_2 = 4$ 的根和一个长度为 5 的根.

关键词 根 根偏序集 反链 富反链

MSC (2010) 主题分类 16E30, 18A22, 16E35

1 引言

1.1 主要结果

令 Φ 是由秩为 n 的 Dynkin 图 $\Delta = \mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n, \dots, \mathbb{G}_2$ 构成的 (连通) 根系. 根偏序集 $\Phi_+ = \Phi_+(\Delta)$ 是 Φ 中对应于某一固定根基的正根构成的集合. 这里采用如下的偏序关系: $x \leq y$ 表示 $y-x$ 是根基中元素的非负线性组合. 根偏序集及其富反链在数学研究的很多领域都有重要应用. 根偏序集 $\Phi_+(\Delta)$ 的宽度 (width) 是 Δ 的秩 (即为 Δ 的顶点的个数). 如果 P 是一个宽度为 n 的偏序集, 则 P 的基数为 $n-1$ 的反链称为富反链. 众所周知, 富反链的个数等于正根的个数. 本文将主要研究 Φ_+ 的富反链.

采用 Stanley^[1] 的定义, 一个有限偏序集 P 称为是分级的, 如果所有极大链的基数都是 m (P 的高度). 给定一个分级的偏序集 P , 记 P_t 为高度为 t 的元素构成的集合. 注意到 P_t 是一个反链. 记 P_t 的基数为 $h_t(P)$. 自然, $h_1(P)$ 即是 P 中极小元素的个数.

英文引用格式: Ringel C M. The root posets and their rich antichains (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1483–1506, doi: 10.1360/N012018-00015

给定偏序集 P , 如果子偏序集 (subposet) P' 的任意邻域都是 P 的邻域, 则称 P' 为实心的子偏序集 (即, 如果 $x < y$ 是子偏序集 P' 的邻域, 则这个邻域在 P 中不能再进一步改善). 如果 P 是一个分级的偏序集, 有唯一的极大元, 是实心子链的非交并, 并且满足每个子链都包含一个极小元 (这类子链的集合称为圆锥分解), 则称 P 是圆锥形的. 如果 $\mathcal{C}$ 是一个圆锥分解, 则 $\mathcal{C}$ 中链的个数等于 $h_1(P)$. $\mathcal{C}$ 链的基数称为 P 的指数 (exponent).

如果 P 是圆锥形的, 则 $h_t(P) \geq h_{t+1}(P)$ 对所有 $t \geq 1$ 都成立, 因而, $(h_1(P), h_2(P), \dots)$ 是一个 (Young) 划分 (partition) 并且对偶划分 $(e_1(P), e_2(P), \dots)$ 是一列指数.

最后, 给定偏序集 P 的子集 X , 记

$$\Lambda(X) = \{w \in P \mid w \leq x \text{ 对某个 } x \in X\}$$

为理想 (ideal), 记

$$V(X) = \{y \in P \mid x \leq y \text{ 对某个 } x \in X\}$$

为由 X 生成的余理想 (coideal).

现在考虑根偏序集. 由于任意根偏序集都有一个极大元素, 偏序关系 Φ_+ 的定义表明, Φ_+ 中所有的极大链都有相同的基数, 因而, Φ_+ 是一个具有唯一极大元素的分级的偏序集. 对于一个正根 x , x 在 Φ_+ 中的高度正是 x 的长度. 如果把 x 写作关于根基的线性组合, 则系数之和即为 x 的长度 (参见文献 [2]). 我们将 $(\Phi_+)_t$ 记为 Φ_t .

定理 1.1 根偏序集是圆锥形的.

定理 1.1 强化了 “ $h_t(\Phi_+) \geq h_{t+1}(\Phi_+)$ 对所有 $t \geq 1$ 都成立” 这一著名的结论. 事实上, 如上定义的 $\Phi_+(\Delta)$ 的指数序列正是 Weyl 群的不变量理论中所考虑的通常的指数序列 (这正是著名的 Shapiro-Kostant 定理, 参见文献 [3, 定理 1.4.1.1]). 我们也应当注意到

$$h_t(\Phi_+) + h_{g-t+1}(\Phi_+) = n$$

对所有 t 都成立, 其中 g 是 Δ 的 Coxeter 数 (参见文献 [4, 定理 3.20] 和 [5, 定理 5.4.1]).

注意到 $e_1 = 1$, 且对于 $n \geq 2$, 有 $e_2 \geq 2$. 因而, 满足 $2 \leq t \leq e_2$ 的所有 Φ_t 都是富反链, 而满足 $t > e_2$ 的任意 Φ_t 都是基数至多为 $n - 2$ 的反链.

只要 $V(A) \supseteq V(A')$, 那么一个偏序集的富反链的集合都可以看作是满足 $A \leq A'$ 的一个偏序集 $\mathcal{R}(\Delta)$ (注意到 $V(A)$ 是由 A 生成的余理想, 参见第 4 节). 我们将看到, 对于 $\Delta \neq \mathbb{E}_6$, 反链 Φ_{e_2} 是 $\mathcal{R}(\Delta)$ 中极大的元素, 而对于 $\Delta = \mathbb{E}_6$, 则存在一个大于 Φ_{e_2} 的富反链.

对于任意自然数 t , 令 Φ'_t 表示由 Φ_{t+1} 的连接不可约元 (join-irreducible element) 以及那些在 Φ_{t+1} 中没有连接不可约邻域的 $a \in \Phi_t$ ($a' > a$) 构成的集合. 由于 Φ_+ 是圆锥形的, 则 Φ'_t 的基数等于 Φ_t 的基数. 特别地, 对于 $t = e_2$, Φ'_{e_2} 仍然是一个富反链.

定理 1.2 令 Δ 为秩至少为 2 的 Dynkin 图, 则 Φ_+ 有唯一的极大富反链, 即 Φ'_{e_2} . 如果 $\Delta \neq \mathbb{E}_6$, 则 $\Phi'_{e_2} = \Phi_{e_2}$, 而对于 $\Delta = \mathbb{E}_6$, 反链 Φ'_{e_2} 和 Φ_{e_2} 中有一个不同的元素.

表 1 给出了 $e_2 = e_2(\Delta)$ 的值.

表 1 $e_2(\Delta)$ 的值

Δ	A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$e_2(\Delta)$	2	3	3	3	4	5	7	5	5

下面重构定理 1.2. 为找到 $\Phi_+(\Delta)$ 的富反链, 我们仅需在理想 $\Lambda(\Phi'_{e_2})$ 中寻找, 而这是一个具有 n 个极小元和 $n-1$ 个极大元的偏序集. 如下是 Δ 取值为 A_5 、 B_5 、 D_6 、 E_6 、 E_7 、 E_8 、 F_4 和 G_2 的偏序集 $\Lambda(\Phi'_{e_3})$.

众所周知, Φ_+ 中富反链的个数等于 Φ_+ 的基数. 因而, 一般地, $\mathcal{R}(\Delta)$ 的偏序集结构与 $\Phi_+(\Delta)$ 非常相似, 但这些偏序集并不总是同构的. 例如, 在 F_4 的情形, 偏序集 $\Lambda(\Phi'_{e_2})$ 有一个非平凡的对称, 因而, $\mathcal{R}(F_4)$ 也有一个非平凡的对称, 但 $\Phi_+(F_4)$ 没有非平凡的对称.

定理 1.3 $\Phi_+(\Delta)$ 中富反链的偏序集 $\mathcal{R}(\Delta)$ 同构于 $\Phi_+(\Delta)$ 当且仅当 $\Delta \neq E_8, F_4$.

1.2 注记

本文献给刘绍学教授 90 华诞. 刘绍学教授于 1985 年访问了欧洲, 那次访问成为中德合作研究有限维代数表示论的起点. 这一理论的核心是 Dynkin 代数及由其对应的根偏序集表征的不可分解表示. 令人惊讶的是, 这些根偏序集虽然看起来是毫无关联的组合, 但它们仍然有很多奇妙的性质和特征. 本文以及后续的工作¹⁾ 将尝试研究它们的某些特征.

本文早期的版本 [6] 于 2013 年在上海交通大学完成. 本文中的部分结果已经在 2013 年于悉尼召开的第 57 届澳大利亚数学会年会以及 2014 年三亚的 ICRA (International Conference on Representation Theory of Algebra) 讲座上报告过, 参见文献 [3]. 作者感谢多位数学家的评论. 特别地, 作者感谢 Thomas 指出参考文献 [4, 定理 3.20] 和 [5, 定理 5.4.1].

1) Ringel C M. Root posets and hammocks. In preparation.

由于本文的附录被学者们经常使用, 我们需要强调, 这里调整了 $\mathbb{B}_n$ 、 $\mathbb{C}_n$ 和 $\mathbb{D}_n$ 的顶点标号, 以使得我们专注于 (对于 $\Delta \neq \mathbb{A}_n$) 一个特殊的顶点, 这个顶点现在经常被标注为 c .

2 Φ_+ 的实心子链分解

我们首先证明定理 1.1: 任意根偏序集都有一个圆锥分解.

定理 1.1 的证明 结论对于 $\mathbb{A}_n$ 、 $\mathbb{B}_n$ 和 $\mathbb{G}_2$ 这三种情形显然成立. 接下来对于 $\mathbb{D}_5$ 和 $\mathbb{D}_6$ 这两种特殊的情形来证明实心子链分解, 并进而完成 $\mathbb{E}_6$ 、 $\mathbb{E}_7$ 、 $\mathbb{E}_8$ 和 $\mathbb{F}_4$ 这几类情形的证明. 我们希望 $\mathbb{D}_5$ 和 $\mathbb{D}_6$ 这两种特殊情形可以非常好地展示如何得到实心子链分解的一般规则, 进而为完成针对一般的 $\mathbb{D}_n$ 的证明提供参考.

我们总是使用实线来表示实心子链.

实心子链的极大元素用圆圈来圈出, 因而, 它们是高度为 ϵ_i 的合适的根, 其中 $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ 是特征分解. $\square$

实际上, 实心子链分解的存在性是一个局部性质, 即它与高度为 t 和 $t+1$ 的所有根的双向子偏序集 $\Phi_{t,t+1}$ 有关. 我们称这些子偏序集为 Φ_+ 的步子. 我们有

$$|\Phi_{t+1}| \leq |\Phi_t|.$$

定理 1.1 的本质结论是, 对于任意 $t \geq 1$, 存在 $\Phi_{t,t+1}$ 的一个配对 (matching) (即一个单射 $f: \Phi_{t+1} \rightarrow \Phi_t$ 使得 $f(y) < y$ 对所有 $y \in \Phi_{t+1}$ 都成立).

如果我们希望构造一个圆锥分解, 我们可以从偏序集 Φ_+ 的顶端开始并向下前进. 如果子链到达了 Φ_{t+1} 层, 我们就要关注 $\Phi_{t,t+1}$ 并继续在一个配对内沿着向下的路径继续前进. 例如, 对于 B_3 的情形, 我们从极大元素 z 开始, 包含 z 的实心链有两个选择, 我们可以随意选取, 但接下来在 $\Phi_{2,3}$, 我们

就要小心了:

因为 $\Phi_{2,3}$ 只有一个配对, 所以, 选择中间的那一个是无效的, 即

注 2.1 正如我们提到的, 对于一个圆锥形偏序集 P , 序列 $(h_1(P), h_2(P), \dots)$ 是一个 Young 划分. 我们强调, 存在满足 $(h_1(P), h_2(P), \dots)$ 的分级偏序集, 它是 Young 划分, 但不能写成每个子链都包含一个极小元素的实心子链的非交并. 下面给出一个例子 (注意到它的宽度大于 $h_1(P)$):

3 Φ_+ 的富反链

本节证明定理 1.2.

对于一个偏序集 P , 如果 P 中任意元素要么是极小的, 要么是极大的, 但不能既是极小又是极大, 则称 P 是双向的 (bipartite). 如果 P 是双向的, 令 P_1 是极小元素构成的集合, 令 P_2 是极大元素构成的集合. P 的一个配对 (matching) 是指一个单射 $f: P_2 \rightarrow P_1$ 使得 $f(y) < y$ 对所有 $y \in P_2$ 都成立.

称 P 是一个 M -偏序集, 如果 P 是双向的, 满足 $|P_1| = |P_2| + 1$ 而且对于任意 $y \in P_2$, 存在一个配对 f 使得 P_1 中唯一不在 f 的像中的元素 x 满足 $x < y$. 注意到, 如果 P 是一个 M -偏序集, 则 P_2 中不存在连接不可约元.

如果 T 是一个有限树, 定义 $M(T)$ 为 T 的关联偏序集 (incidence poset) (其中 $M(T)_1$ 是顶点集, $M(T)_2$ 是边集, 并且, 若 x 是边 y 上的顶点, 则有 $x < y$).

例如,

命题 3.1 若 T 是有限树, 则 $M(T)$ 是 M -偏序集.

证明 假定 T 有 n 个顶点和 $n-2$ 条边, 则 $M(T)$ 是双向的且满足 $M(T)_2 = n-1$ 和 $M(T)_1 = n$. 令 y 为一条边, x 为 y 上的一个顶点. 对于每条边 y' , 令 $f(y')$ 为 y' 上与 x 距离最大的点, 则 f 是一个配对, 且 x 不在 f 的像中. 自然地, 有 $x < y$. $\square$

推论 3.1 对于任意根偏序集 $\Phi_+ = \Phi_+(\Delta)$, 偏序集 Φ_{12} 是一个 M -偏序集.

证明 显然有 $\Phi_{12} = M(\Delta)$. □

命题 3.2 假定 Δ 的秩至少为 3, 令 $\Phi = \Phi(\Delta)$, $e = e_2(\Delta)$. 若 $\Delta \neq \mathbb{D}_4, \mathbb{E}_6$, 则 $\Phi_{e,e+1}$ 是一个 M -偏序集.

我们断言, $\Phi_{e,e+1}$ 是在形如 $P = M(T)$ 的偏序集上对某些元素对 $x \in P_1$ 和 $y \in P_2$ 添加关系 $x < y$ 而得到的. 由于 $M(T)$ 是一个 M -偏序集, 则 $\Phi_{e,e+1}$ 也必须是一个 M -偏序集. 各种不同的情形图示如下, 在右侧, 有 $P = M(T)$, 图中实线表示 $M(T)$ 中的关系, 虚线是添加的关系.

$$\Phi_{2,3}(\mathbb{A}_n) \quad (n \geq 2) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \cdots \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad M(\mathbb{A}_{n-1})$$

$$\Phi_{3,4}(\mathbb{B}_n) \quad (n \geq 2) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \cdots \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad M(\mathbb{A}_{n-1})$$

$$\Phi_{3,4}(\mathbb{D}_n) \quad (n \geq 5) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \cdots \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad M(\mathbb{E}_{n-1})$$

$$\Phi_{5,6}(\mathbb{E}_7) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad M(\mathbb{A}_6)$$

$$\Phi_{7,8}(\mathbb{E}_8) \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad M(\mathbb{E}_7)$$

$$\Phi_{5,6}(\mathbb{F}_4) \quad \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad M(\mathbb{A}_3)$$

定理 1.2 的证明 如果 Δ 的秩 n 等于 2, 则 $\mathcal{R}(\Delta) = \Phi_+$. 因而, 假定 $n \geq 3$. 对于 $\Delta = \mathbb{D}_4$, $\Phi_4(\Delta)$ 即为 Φ_+ 的极大元, 而且这个极大元不属于任意一个基数大于 1 的反链. 因此, 假定 $\Delta \neq \mathbb{D}_4$.

情形 $\mathbb{E}_6$ 非常特殊 (由于 $\Phi_5(\mathbb{E}_6)$ 包含一个连接不可约元; 特别地, $\Phi_{45}(\mathbb{E}_6)$ 不是一个 M -偏序集), 需要单独讨论. 因而, 假定 Δ 的秩至少为 3 并且不同于 $\mathbb{D}_4$ 和 $\mathbb{E}_6$. 这意味着我们可以应用命题 3.2.

令 z 是长度为 $t \geq e+1$ 的根. 令 $\Phi(z)$ 是与 z 不可比的正根的集合. 我们断言 $\Phi(z)$ 的宽度至多为 $n-3$ (这表明 z 不属于任何一个基数为 $n-1$ 的反链).

令 $\mathcal{C}$ 为 Φ_+ 的一个圆锥分解. 令 $C \in \mathcal{C}$ 满足 $z \in C$. 由于 z 的长度至少为 $e+1$, 则链 C 包含一个长度为 $e+1$ 的根 y . 因为 $\Phi_{e,e+1}$ 是一个 M -偏序集, 所以存在一个配对 $f \Phi_{e+1} \rightarrow \Phi_e$ 使得 Φ_e 中唯一的不在 f 的像中的元素 x 满足 $x < y$.

令 v 为 C 中长度为 2 的根. 由于 Φ_{12} 是一个 M -偏序集, 则存在一个配对 $g \Phi_2 \rightarrow \Phi_1$ 使得不在 g 的像中的单根 u 满足 $u < v$. 将 $\mathcal{C}$ 作如下分解: 在每个基数至少为 2 的链 $C' \in \mathcal{C}$ 中把单根 v' 换成单

根 $g(v')$, 其中 v' 是 C' 中长度至少为 2 的根, 由此得到 $\mathcal{D}$, 并使用独立子 $\{u\}$ 作为 $\mathcal{D}$ 中唯一的基数为 1 的链. 因而, $\mathcal{D}$ 仍然还是 Φ_+ 的一个圆锥分解.

现在令 $y' \in \Phi_{e+1}$. 若 y' 属于 $D \in \mathcal{D}$, 则令 $J_{y'}$ 为 D 中满足 $y' \leq z'$ 的 z' 构成的集合. 类似地, 假定 $x' \in \Phi_e$ 属于 $D \in \mathcal{D}$, 并令 $I_{x'}$ 为 D 中满足 $w \leq x'$ 的 w 构成的集合. 因为 $f(y') < y'$, 所以, 并集 $I_{f(y')} \cup J_{y'}$ 是一个链.

至此, 我们已经将 Φ_+ 分解为链 $I_{x'}$ 、 $J_{y'}$ 和一个独立子 $\{u\}$, 其中 $x' \in \Phi_e$, $y' \in \Phi_{e+1}$. 我们知道所有 J_y 、 $I_{f(y)}$ 、 I_x 的元素和 u 关于 z 都是可比的, 因此, 它们属于 $\Phi(z)$. 因而, $\Phi \setminus \Phi(z)$ 由链 $I_{f(y')} \cup J_{y'}$ 覆盖, 其中 y' 是 $\Phi_{e+1} \setminus \{y\}$ 中的元素. Φ_{e+1} 的基数是 $n-2$, 因而存在 $n-3$ 个形式为 y' 的元素. 这表明 $\Phi \setminus \Phi(z)$ 由 $n-3$ 个链覆盖.

余下仅需考虑 $\Delta = E_6$ 的情形. 记 a' 为 Φ_5 的连接不可约元, 并令 a 为其在 Φ_4 中的邻居, 则 Φ'_4 可以由 Φ_4 通过将 a 换为 a' 而得到.

现在考察 $\Phi_{56}(E_6)$. 有如下 $\Phi_{56}(E_6)$ 的配对:

因而, 存在 Φ_+ 的一个圆锥分解 $\mathcal{C}$ 满足 a' 是其中某一个链的极大元. 另外, 我们可以假定对应于分支点 c 的单根在 $\mathcal{C}$ 中是单独的.

令 z 为不同于 a' 的长度至少为 5 的根. 我们将证明 z 不属于富反链. 像上面一样, 记 $\Phi(z)$ 为与 z 不可比的正根构成的集合. 我们断言 $\Phi(z)$ 的宽度至多为 3 ($= n-3$). 注意到, 对应于分支顶点 c 的单根属于 $\Phi(z)$. 因而, 我们仅需考察 $\mathcal{C}$ 中不是独立子的 5 个链.

下面看 Φ_{45} . $\Phi_5 \setminus \{a'\}$ 中的任意元素都与 Φ_4 中的两个元素相连接.

像之前一样, 我们使用 $\mathcal{C}$, 以便对于 $y \in \Phi_5$ 来定义链 J_y (满足 $J_{a'} = \{a'\}$), 并对于 $x \in \Phi_4$ 定义链 I_x . 因而, $\Phi(z)$ 以外的元素属于三个链, 它们由三个形如 J_y 的链和三个形如 I_x 的链所构成. 至此我们完成了定理的证明. $\square$

4 $\Phi_+(\Delta)$ 的富反链的偏序集 $\mathcal{R}(\Delta)$

设 P 是有限偏序集且 t 是非负整数, 令 $\mathcal{A}_t(P)$ 是 P 中基数为 t 的反链构成的集合. 对于宽度为 n 的偏序集 P , 称基数为 $n-1$ 的反链为富反链. 对于秩为 n 的 Dynkin 图 Δ , 记 $\mathcal{R}(\Delta) = \mathcal{A}_{n-1}(\Phi_+(\Delta))$.

给定具有根偏序集 Φ_+ 的秩为 n 的 Dynkin 图 Δ , 有 $|\mathcal{A}_t(\Phi_+)| = |\mathcal{A}_{n-t}(\Phi_+)|$ 对于 $0 \leq t \leq n$ 都成立 (参见文献 [7]). 特别地, 因为 $\mathcal{A}_1(\Phi_+) = \Phi_+$, 我们总是有

$$|\mathcal{R}(\Delta)| = |\Phi_+|,$$

并且很自然的一个问题是, 是否可以通过考察 $\Phi_+(\Delta)$ 中富反链的集合 $\mathcal{R}(\Delta)$ 来恢复 $\Phi_+(\Delta)$ 的偏序关系.

我们指出, 一般而言, 通过考察富反链的集合, 并不能恢复 Φ_+ 的偏序关系. 例如, 考虑 Dynkin 图 $\mathbb{F}_4$. 基于定理 1.2, $\mathcal{R}(\mathbb{F}_4)$ 是 $\Lambda(\Phi_5(\mathbb{F}_4))$ 中富反链的偏序集, 则偏序集 $\Lambda(\Phi_5(\mathbb{F}_4))$ 具有一个 2 阶自同构 ϕ , 并且 ϕ 诱导一个 $\mathcal{R}(\mathbb{F}_4)$ 上的非平凡自同构 (因为显然存在在 ϕ 的作用下不变的富反链), 但是 $\Phi_+(\mathbb{F}_4)$ 自身并没有非平凡的自同构.

注意到, 给定偏序集 P , 有多种方式可以考虑 $\mathcal{A}_t(P)$ 作为一个偏序集: 给定两个反链 x 和 y , 只要 x 落在由 y 生成的理想中, 就记 $x \leq_\Lambda y$; 类似地, 只要 y 落在由 x 生成的余理想中, 就记 $x \leq_V y$. 当然, 也存在组合这两种偏序关系的可能性, 即只要 $x \leq_\Lambda y$ 和 $x \leq_V y$ 都成立, 因而只要 $\Lambda(x) \subseteq \Lambda(y)$ 和 $V(x) \supseteq V(y)$ 都成立, 就记 $x \leq y$. 实际上, 对于 $\mathcal{R}(\Delta)$, 我们有如下的观察:

命题 4.1 令 A 和 B 为 Φ_+ 的富反链, 满足 $A \leq_V B$, 则我们可以将 A 和 B 中的元素标记为 $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$, $B = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$, 其中对所有 $1 \leq i \leq n-1$ 成立 $a_i \leq b_i$. 由此有 $A \leq_\Lambda B$.

证明 令 $\Phi_+ = \Phi_+(\Delta)$, 其中 Δ 是秩为 n 的 (连通) Dynkin 图. 假定 A 和 B 是 Φ_+ 的富反链, 满足 $A \leq_V B$. 令 z 是不属于 A 的单根. 因为 $B \subseteq V(A)$, 所以, z 不属于 B . 由定理 1.1 的附加结论知, 存在一个圆锥分解 $\mathcal{C}$ 使得 $\{z\}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个元素. 令 $C_1, \dots, C_{n-1}$ 是 $\mathcal{C}$ 中剩余的链. 因为 z 不属于 A , 所以, A 的元素属于链 C_i , $1 \leq i \leq n-1$, 故 A 中的元素 a 可以标记为 $a_1, \dots, a_{i-1}$, 其中 $a_i \in C_i$, $1 \leq i \leq n-1$. 类似地, B 中的元素可以标记为 $b_1, \dots, b_{i-1}$, 其中 $b_i \in C_i$, $1 \leq i \leq n-1$. 我们断言, 对所有的 i 都成立 $a_i \leq b_i$. 若不然, 存在某个 i 使得 $a_i > b_i$. 由于 $B \subseteq V(A)$, 则存在某个 $a_j \in A$ 使得 $b \geq a_j$. 但由于 A 是反链, 所以, $a_i > b_i \geq a_j$ 不可能成立. 这是我们的第一个结论.

当然, 若 $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ 和 $B = \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$ 满足 $a_i \leq b_i$ 对所有 i 都成立, 则 $A \leq_\Lambda B$ (同时也有 $A \leq_V B$). $\square$

我们总是将 $\mathcal{R}(\Delta)$ 看作由偏序关系 $\leq$ 给出的偏序集 (注意到这与偏序关系 $\leq_V$ 是相同的).

注 4.1 若 A 和 B 是 Φ_+ 的满足 $A \leq_\Lambda B$ 的富反链, 则 $A \leq_V B$ 可能不成立. 这里给出一个例子: $\Delta = \mathbb{A}_3$ 以及

定理 1.3 的证明 这里仅给出几个重要的步骤. 希望这里给出的讨论能够对单个根偏序集结构的研究提供参考. 对于 Δ 的秩为 2 的情形, Φ_+ 的富反链正是独立子, 因而在这种情形下, $\Phi_+(\Delta) = \mathcal{R}(\Delta)$. 特别地, 我们无需考虑 $\mathbb{G}_2$ 的情形.

如果 Δ 是 Dynkin 图且 $t \geq 1$, 记 $\Phi(\Delta, t)$ 为系数以 t 为界并且至少有一个系数等于 t 的正根构成的集合. 当然, Φ_+ 是满足 $t \geq 1$ 的子集 $\Phi(\Delta, t)$ 的非交并. 注意到 $\Phi(\Delta, 1)$ 总是 Φ_+ 的一个理想 (由所有系数都等于 1 的极小本原根生成的理想), 因而剩余的非空子偏序集 $\Phi(\Delta, t)$ 就都是区间了. 需要强调的是, 当 Δ 等于 $\mathbb{B}_n$ 和 $\mathbb{C}_n$ 时, 尽管 Φ_+ 中任意的元素 x 的系数可能取决于所考虑的 $\mathbb{B}_n$ 或 $\mathbb{C}_n$, 但 Φ_+ 的子集 $\Phi(\Delta, 2)$ 都是一样的.

接下来讨论映射 $R = R(\Delta, t) \Phi(\Delta, t) \rightarrow \mathcal{R}(\Delta)$ 及其相应的双射 $\Phi_+ \rightarrow \mathcal{R}(\Delta)$. 所有映射 $R(\Delta, t)$ 都是单射, 并且 $R(\Delta, t)$ 和 $R(\Delta, t')$ 的像对于 $t \neq t'$ 都不相交. 因而, 如果对于某个 Δ , 映射 $R(\Delta, t)$ 是对所有的 t 定义的 (这对于 Δ 取值 $\mathbb{A}_n$ 、 $\mathbb{B}_n$ 、 $\mathbb{C}_n$ 、 $\mathbb{D}_n$ 、 $\mathbb{E}_6$ 和 $\mathbb{F}_4$ 的情形都是如此), 则由 $|\mathcal{R}(\Delta)| = |\Phi_+|$ 可知, 映射的像的并一定是所有的 $\mathcal{R}(\Delta)$. 因此, 我们无需费心去验证满射的条件.

双射 $R = R(\Delta, 1)\Phi(\Delta, 1) \rightarrow \mathcal{R}(\Phi_{12})$.

令 r 在 $\Phi(\Delta, 1)$ 中, 则 r 由其支撑集 $\text{supp } r$ 唯一决定. 支撑集 $\text{supp } r$ 由满足 $x \leq r$ 的单根 x 构成, 它是 Δ 的连通子图. 定义 $R(r)$ 如下:

$$R(r) = R(r)_1 \cup (r)_2,$$

其中

$$R(r)_1 = \{x \in \Phi_1 \mid x \not\leq r\}, \quad R(r)_2 = \{y \in \Phi_2 \mid y \leq r\}.$$

容易看到 $R(r)$ 是一个反链: $R(r)_1$ 和 $R(r)_2$ 都是反链, 而且, 如果 $x \in R(r)_1, y \in R(r)_2$, 则 $x \not\leq y$ (因为 $x < y$ 蕴含着 $x < y \leq r$, 但是 $x \not\leq r$). 同时, $R(r)$ 是富反链 (即如果 r 的长度为 m 且 Δ 的秩为 n , 则 $R(r)_1$ 的基数为 $n - m$ 并且 $R(r)_2$ 的基数为 $m - 1$).

最后, 我们断言: R 保持并反射偏序关系 (若 r 和 r' 是 $\Phi(\Delta, 1)$ 中的根, 则 $r \leq r'$ 当且仅当 $R(r') \leq_V R(r)$).

证明如下. 自然地, $r \leq r'$ 当且仅当 $\text{supp } r \subseteq \text{supp } r'$. 首先, 假定 $\text{supp } r \subseteq \text{supp } r'$. 我们想要证明 $R(r') \subseteq V(R(r))$. 我们有 $R(r')_1 \subseteq R(r)_2$, 因而只需证明任意元素 $y \in R(r')_2$ 都属于 $V(R(r))$. 令 a 和 b 为 y 的支撑集. 如果 a 不在 r 的支撑集中, 则 $a \in R(r)$, 因而 $y \in V(R(r))$. 类似地, 如果 b 不在 r 的支撑集中, 则 $y \in V(R(r))$. 最后, 如果 a 和 b 都在 r 的支撑集中, 则 $y \in R(r)_2 \subseteq V(R(r))$.

其次, 假定 $R(r') \subseteq V(R(r))$. 我们需要证明 $\text{supp } r \subseteq \text{supp } r'$. 令 x 属于支撑集 $\text{supp } r$ 且假定 x 不属于 $\text{supp } r'$, 则 $x \in R(r')_1 \subseteq V(R(r))$. 由于 x 是极小元素, 则 $x \in R(r)$, 因而 x 属于 $R(r)_1$, 从而, $x \notin \text{supp } r$, 矛盾.

$\Delta = \mathbb{A}_n$ 的情形 对于这种情形, $\Phi_+ = \Phi(\Delta, 1)$, 因而, $R = R(\Delta, 1)$ 给出了 $\Phi_+(\mathbb{A}_n)$ 与 $\mathcal{R}(\mathbb{A}_n)$ 之间的一个同构.

现在考虑偏序集 $\Phi(\Delta, t), t \geq 2$. 我们之前已经一般性地解决了 $t = 1$ 的情形, 接下来针对 $t \geq 2$ 的情形逐个讨论.

$\Delta = \mathbb{B}_n$ 的情形 集合 $\Phi(\mathbb{B}_n, 2)$ 正是由 $\mathbb{B}_2$ 的极大根生成的 Φ_+ 的余理想 (看作是 $\mathbb{B}_n$ 的一个子图).

因为 $\Phi_+(\mathbb{B}_n)$ 的富反链包含在 P 中, 故我们从偏序集 $P = \Phi(\mathbb{B}_n)_{13}$ 开始讨论.

P_{12} 中的富反链构成偏序集 $\mathcal{R}(\mathbb{A}_n)$; 它的元素的形式为 $R(r)$, 其中 r 是系数为 0 和 1 的根. 我们需要确定附加的富反链 (显然, 这样一个反链应当包含顶点 $[[2]]$).

考虑 $\mathbb{B}_n$ 的具有如下形式的根:

$$r = r(i, j) = (2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0),$$

这里有 i 个系数是 2, $j - i$ 个系数是 1, 并且 $n - j$ 个系数是 0, 其中 $0 \leq i < j \leq n$. 对于 $1 \leq i < j \leq n$, 形如 $r(i, j)$ 的根正是 $\Phi(\mathbb{B}_n, 2)$ 中的元素.

对于 $0 \leq i < j \leq n$, 我们也考虑 $\Phi_+(\mathbb{B}_n)$ 的子集

$$R(i, j) = \{[[2]], \dots, [[i+1]], [i+2], \dots, [j], j+1, \dots, n\}$$

(包括 i 个长度为 2 的根, $j-i-1$ 个长度为 1 的根, 以及 $n-j$ 个长度为 1 的根). 显然, $R(i, j)$ 是一个富反链.

我们通过关系 $R(r(i, j)) = R(i, j)$ 来定义 $R = R(\mathbb{B}_n, 2) \Phi(\mathbb{B}_n, 2) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{B}_n)$.

如下展示了 $n=5$ 的情形. 图的左侧画出了指标集 (i, j) . 映射 R 给出如下的双射: 容易验证映射

R 保持并反射相应的偏序关系.

余下需要证明偏序关系集 $\Phi(\mathbb{B}_n, 1)$ 和 $\Phi(\mathbb{B}_n, 2)$ 以及 $R(\mathbb{B}_n, 1)\Phi(\mathbb{B}_n, 1) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{B}_n)$ 和 $R(\mathbb{B}_n, 2)\Phi(\mathbb{B}_n, 2) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{B}_n)$ 的像以何种方式相联系. 这与如下的以虚线表示的邻居有关:

于是, 两个双射 $R(\mathbb{B}_n, 1)$ 和 $R(\mathbb{B}_n, 2)$ 结合在一起构成了一个同构 $\Phi_+(\mathbb{B}_n) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{B}_n)$.

$\mathbb{D}_n$ 的情形 这种情形与 $\mathbb{B}_n$ 的情形类似. 集合 $\Phi(\mathbb{D}_n, 2)$ 正是由 $\mathbb{D}_4$ 的极大根生成的 Φ_+ 的余理想. 对于 $0 \leq i < j \leq n-2$, 令 $r = r(i, j)$ 为 $\mathbb{D}_n$ 的具有如下形式的根:

$$r = r(i, j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdots 2 \ 1 \cdots 1 \ 0 \cdots 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 i 个系数是 2 并且 $j-i+2$ 个系数是 1 (确切地讲, 在短臂上的系数是 1 并且在长臂上的 $n-j-2$ 个系数是 0). 形如 $r(i, j)$ 且满足 $1 \leq i < j \leq n-2$ 的根正是 $\Phi(\mathbb{D}_n, 2)$ 中的元素.

对于 $0 \leq i < j \leq n-2$, 我们也考虑 $\Phi_+(\mathbb{D}_n)$ 的对应的子集 $R(i, j)$. 对于 $i = 0$, $R(i, j)$ 是包含如下根的富反链:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \ 0 \cdots 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \ 0 \cdots 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中有 $j-1$ 个高度为 2 的附加根和 $n-j-2$ 个单根. 对于 $i > 0$, $R(i, j)$ 包含 $\Phi(\mathbb{D}_4)_3$, 其中有 $j-i-1$ 个高度为 2 的附加根和 $n-j-2$ 个单根. 我们通过 $R(r(i, j)) = R(i, j)$ 来定义 $R\Phi(\mathbb{D}_n, 2) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{D}_n)$.

如下给出 $n = 7$ 的情形. 左侧画出指标集 (i, j) . 映射 R 给出了如下的双射:

像情形 $\mathbb{B}_n$ 一样, 我们在情形 $\mathbb{D}_n$ 同样也可以看到, 两个双射 $R(\mathbb{D}_n, 1)$ 和 $R(\mathbb{D}_n, 2)$ 结合到一起给出同构 $\Phi_+(\mathbb{D}_n) \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{D}_n)$.

$\Delta = \mathbb{E}_6$ 和 $\Delta = \mathbb{E}_7$ 的情形 这里, 除了 $\Phi(\Delta, 1)$ 以外, 我们还需要考虑子集 $\Phi(\Delta, 2)$ 、 $\Phi(\Delta, 3)$ 和 $\Phi(\mathbb{E}_7, 4)$. 注意到偏序集 $\Phi(\mathbb{E}_6, 2)$ 、 $\Phi(\mathbb{E}_7, 2)$ 和 $\Phi(\mathbb{E}_7, 3)$ 分别是形如 $[3] \times [3]$ 、 $[3] \times W(4)$ 和 $[2] \times [4]$ 的积, 其中 $[m]$ 代表基数为 m 的链, $W(4)$ 是偏序集.

$\mathbb{E}_6$ 的情形 我们知道, 在 $\Phi_+(\mathbb{E}_5)$ 与 $\mathcal{R}(\mathbb{E}_6)$ 之间存在一个偏序集同构.

$\mathbb{E}_7$ 的情形

余下需要给出 Φ'_4 与 Φ_5 之间的富反链. 它们包含在 $\Phi_{4,5}$ 中:

如下给出 Φ'_4 与 Φ_5 之间的富反链:

综合以上结果, 我们看到 $\Phi_+(\mathbb{E}_7)$ 与 $\mathcal{R}(\mathbb{E}_7)$ 之间存在偏序集同构.

$\mathbb{E}_8$ 的情形 令 $\Phi_+ = \Phi_*(\mathbb{E}_8)$. 考察 $\mathcal{R}(\mathbb{E}_8)$ 的包含 Φ_{67} 中富反链的实心子偏序集:

由定理 1.1 知, Φ_7 是 $\mathcal{R}(\mathbb{E}_8)$ 的极大元. 因而我们看到, 对偶偏序集 $(\mathcal{R}(\mathbb{E}_8))^*$ 有两个高度为 5 的不同元素, 而 $(\Phi_+)^*$ 只有一个高度为 5 的元素. 这表明 $\mathcal{R}(\mathbb{E}_8)$ 与 Φ_+ 不同构.

$\mathbb{F}_4$ 的情形 令 $\Phi_+ = \Phi_*(\mathbb{F}_4)$. 考察 $\mathcal{R}(\mathbb{F}_4)$ 的包含 Φ_{45} 中富反链的实心子偏序集:

由定理 1.1 知, Φ_5 是 $\mathcal{R}(\mathbb{F}_4)$ 的极大元. 因而我们看到, 对偶偏序集 $(\mathcal{R}(\mathbb{F}_4))^*$ 有两个高度为 3 的不同元素, 而 $(\Phi_+)^*$ 只有一个高度为 3 的元素. 这表明 $\mathcal{R}(\mathbb{F}_4)$ 与 Φ_+ 不同构.

至此, 我们完成了定理 1.3 的证明. □

参考文献

- 1 Stanley R. Enumerative Combinatorics, Vol. 1. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49. Cambridge: Cambridge University Press, 1995
- 2 Bourbaki N. Groupes et Algebres de Lie: Chapitres IV–VI. Paris: Hermann, 1968
- 3 Ringel C M. The Catalan combinatorics of the hereditary artin algebras. In: Recent Developments in Representation Theory. Contemporary Mathematics, vol. 673. Providence: Amer Math Soc, 2016
- 4 Humphreys J E. Reflection Groups and Coxeter Groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990
- 5 Armstrong D. Generalized Noncrossing Partitions and Combinatorics of Coxeter Groups. Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 949. Providence: Amer Math Soc, 2009
- 6 Ringel C M. The $(n-1)$ -antichains in a root poset of width n . ArXiv:1306.1593, 2013
- 7 Athanasiadis C A. On a refinement of the generalized Catalan numbers for Weyl groups. Trans Amer Math Soc, 2004, 357: 179–196

附录 A 根偏序集的一些图

我们直观地来看一下根偏序集 $\mathbb{D}_n$ 、 $\mathbb{E}_6$ 、 $\mathbb{E}_7$ 、 $\mathbb{E}_8$ 和 $\mathbb{F}_4$, 因为在写作本文时, 我们发现这些偏序集非常有用. 事实上, 我们以前所发现的图和从网上所看到的图看起来并不是特别明白. 下图所示的结果让我们注意到如下事实: 对于任意元素对 $x, z \in \Phi_+$, 区间 $\{y \in \Phi_+ \mid x \leq y \leq z\}$ 是一个分配格, 它可以通过使用分割、平方和 (3 维) 立方体很方便地构造出来. 这里的可视化图的一个缺点是, 它并没有考虑不同的边的多样性 (它可以通过使用不同的斜率来得到). 作为弥补, 我们用对应的基向量来标记边 (由于模性 (modularity) 把这些信息传递到剩余的边, 因此在边界处这样做就足够了).

为了讨论更加完整, 我们也需要包括 $\mathbb{A}_n$ 、 $\mathbb{B}_n$ 、 $\mathbb{C}_n$ 和 $\mathbb{G}_2$ 这些情形. 众所周知, 只要不涉及对于边的标号, 根偏序集 $\mathbb{B}_n$ 和 $\mathbb{C}_n$ 就是相同的. 但由于我们在讨论 $\mathbb{D}_n$ 、 $\mathbb{E}_m$ 和 $\mathbb{F}_4$ 这些情形时都赋予了标号, 则我们在讨论 $\mathbb{B}_n$ 和 $\mathbb{C}_n$ 时也需要赋予标号, 因而我们需要分别讨论这些类型.

$\mathbb{D}_n$ 、 $\mathbb{E}_m$ 和 $\mathbb{F}_4$ 的立体图强化了正根到“层级”的分隔, 这看起来是正根复杂度的某一类测度. 属于一个固定层级的根构成了一个平面图, 并且这个图经常是一个三角形. 所有的层级都有唯一的极大元. 层级 1 有 $n-1$ 个极小元, 其他的层级都有唯一的极小元. 我们下面列出极小元、极大元以及属于每个层级的根的个数. 关于根偏序集的进一步讨论将在进一步的工作¹⁾ 中给出. $\mathbb{D}_n$ 、 $\mathbb{E}_6$ 、 $\mathbb{E}_7$ 、 $\mathbb{E}_8$ 和 $\mathbb{F}_4$ 的层级分别在表 A1–A5 中给出.

根偏序集 $\mathbb{A}_5$ 根偏序集 $\mathbb{A}_6$ 根偏序集 $\mathbb{B}_5$

1) Ringel C M. Root posets and hammocks. In preparation.

根偏序集 $\mathbb{C}_5$

根偏序集 $\mathbb{B}_6$

根偏序集 $\mathbb{C}_6$

根偏序集 $\mathbb{D}_5$

根偏序集 $\mathbb{D}_6$

表 A1 $\mathbb{D}_n$ 的层级

层级	条件	极小元	极大元	个数
1	$u = 0$	$n - 1$ 个单根	0 $1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1$	$\binom{n}{2}$
2	$u = 1$	1 $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0$	1 $1 \ 2 \ \dots \ 2 \ 2 \ 1$	$\binom{n}{2}$

遗憾的是, 立体图隐藏了由 2 阶同构给出的对称性. 因而, 我们可能需要稍微“挤压”这个图. 如下给出 $n = 6$ 的情形:

表 A2 $\mathbb{E}_6$ 的层级

层级	条件	极小元	极大元	个数
1	$u = 0$	5 个单根	$\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{smallmatrix}$	15
2	$u = 1$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{smallmatrix}$	$3 \times 3 + 1$
3	$c \geq 2$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 1\ 2\ 3\ 2\ 1 \end{smallmatrix}$	$3 \times 3 + 2$

根偏序集 $\mathbb{E}_7$

表 A3 $\mathbb{E}_7$ 的层级

层级	条件	极小元	极大元	个数
1	$u = 0$	6 个单根	0 1 1 1 1 1 1	21
2	$u = 1, c \leq 1$	1 0 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1	$3 \times 4 + 1$
3	$c = 2, d = 1$	1 0 1 2 1 0 0	1 1 2 2 1 1 1	3×3
4	$d \geq 2$	1 0 1 2 2 1 0	2 2 3 4 3 2 1	$5 \times 3 + 5$

根偏序集 $\mathbb{B}_8$

表 A4 E_8 的层级

层级	条件	极小元	极大元	个数
1	$u = 0$	7 个单根	0 1 1 1 1 1 1 1	28
2	$u = 1, c \leq 1$	1 0 0 0 0 0 0 0	1 1 1 1 1 1 1 1	$3 \times 5 + 1$
3	$c = 2, d = 1$	1 0 1 2 1 0 0 0	1 1 2 2 1 1 1 1	3×4
4	$d = 2, e = 1$	1 0 1 2 2 1 0 0	2 1 2 3 2 1 1 1	5×3
5	$d = 2, e = 3$	1 0 1 2 2 2 1 0	2 1 2 3 2 2 2 1	5×3
6	$d \geq 3$	1 1 2 3 3 2 1 0	2 2 4 6 5 4 3 12	$5 \times 4 + 14$

根偏序集 $\mathbb{F}_4$

表 A5 F_4 的层级

层级	条件	极小元	极大元	个数
1	$b \leq 1$	4 个单根	1 1 1 1	10
2	$b \geq 2$	0 2 1 0	2 4 3 2	$3 \times 3 + 5$

根偏序集 $\mathbb{G}_2$

The root posets and their rich antichains

Claus Michael Ringel

Abstract Let Δ be a (connected) Dynkin diagram of rank $n \geq 2$ and $\Phi_+ = \Phi_+(\Delta)$ the corresponding root poset (it consists of all positive roots with respect to a fixed root basis). The width of Φ_+ is n . We will show that Φ_+ is “conical”: It is the disjoint union of n solid chains. The rich antichains in Φ_+ are the antichains of cardinality $n - 1$. It is well known that the number of rich antichains is equal to the cardinality of Φ_+ . The set $\mathcal{R}(\Delta)$ of rich antichains in Φ_+ can itself be considered as a poset which is quite similar, but not always isomorphic, to Φ_+ . We will show that there always exists a unique rich antichain A such that any rich antichain is contained in the ideal generated by A . For $\Delta \neq \mathbb{E}_6$ all roots in A have the same length, namely e_2 , where $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_n$ are the exponents of Δ . For $\Delta = \mathbb{E}_6$, the antichain A consists of four roots of length $e_2 = 4$ and one root of length 5.

Keywords root, root poset, antichain, rich antichain

MSC(2010) 16E30, 18A22, 16E35

doi: 10.1360/N012018-00015