



一般框架下 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化的压缩数据分离

黄尉*, 李玲玉

合肥工业大学数学学院, 合肥 230009

E-mail: whuang@hfut.edu.cn, lilinyu210606@163.com

收稿日期: 2021-07-02; 接受日期: 2023-01-11; 网络出版日期: 2023-05-05; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 91538112) 资助项目

摘要 本文考虑一般框架下压缩数据分离问题, 即重构多模态数据中的不同子成分. 基于已有的 ABP (the analysis basis pursuit) 算法和 ADS (the analysis Dantzig selector) 算法, 结合 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) 最小化, 本文提出对偶 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 分解 ABP 算法及对偶 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 分解 ADS 算法. 若多模态数据的两个不同子成分 f_1 和 f_2 分别在不同的一般框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 下 (近似) 稀疏, 则当测量矩阵满足一定的约束等距性条件且框架间满足某个相互相干性条件时, 本文提出的两种算法均可保证多模态数据不同子成分的稳定恢复. 数值实验表明, 本文的算法相对 ℓ_1 最小化具有较高的重构成功率.

关键词 压缩数据分离 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化 限制等距性条件 对偶框架 ℓ_1 分析法

MSC (2020) 主题分类 65T60, 90C25

1 引言

压缩感知是一种新型的信号处理技术. 与传统采样方法不同, 压缩感知以远低于 Nyquist 标准 (参见文献 [7]) 对信号进行采样和处理, 从少量线性测量中恢复高维稀疏信号. 该理论目前已在医学成像 [15]、图像处理 [25] 和模式识别 [29] 等领域得到了广泛的应用. 压缩感知可归结为求解如下线性方程组:

$$y = Af + e, \quad (1.1)$$

其中, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m \ll n$) 为测量矩阵, $y \in \mathbb{R}^m$ 为采样所得观测数据, $e \in \mathbb{R}^m$ 为测量误差. 目标是基于已知的 A 和 y , 求出原始稀疏信号 $f \in \mathbb{R}^n$.

要求解这个问题, 最直观的想法是在可行解集合中寻找最稀疏的向量, 这是一个 ℓ_0 最小化问题. 但是直接求解一个 ℓ_0 最小化问题通常是 NP (non-deterministic polynomial)- 困难的, 因此在计算上是

英文引用格式: Huang W, Li L Y. Compressed data separation with general frames via $\ell_1 - \alpha\ell_2$ minimization (in Chinese). Sci Sin Math, 2023, 53: 1269–1286, doi: 10.1360/SSM-2021-0125

不可行的^[26]. 很自然地, 考虑 ℓ_1 最小化方法, 它可以看作是 ℓ_0 最小化的一个凸松弛. 这里介绍两种常见的 ℓ_1 最小化方法, 一种是 ℓ_2 残差约束下的 ℓ_1 最小化方法:

$$(\text{BP}): \min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{f}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A\tilde{f} - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (1.2)$$

模型 (1.2) 也称作 BP (the basis pursuit) 算法^[4]. 另一种方法称为 DS (the Dantzig selector) 算法^[2], 通过约束残差与 A 的列向量之间的相关性来求解稀疏恢复问题:

$$(\text{DS}): \min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{f}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A^*(A\tilde{f} - y)\|_\infty \leq \lambda, \quad (1.3)$$

这里 ϵ 和 λ 为度量噪声水平的参数. 若测量矩阵 A 满足一定的限制等距性条件^[20] (restricted isometry property, RIP) 且噪声项较小, 则 BP 算法和 DS 算法都可以稳定恢复稀疏 (或近似稀疏) 信号.

近年来, 许多非凸优化方法也被提出作为 ℓ_0 最小化的替代, 如 ℓ_p ($0 < p < 1$) 最小化^[28, 33, 34] 和 $\ell_1 - \ell_2$ 最小化^[23, 24, 30, 31]. 由于 $\ell_1 - \ell_2$ 范数更接近于 ℓ_0 拟范数, 因此使用 $\ell_1 - \ell_2$ 最小化可提高稀疏性^[31]. 文献 [31] 提出了 $\ell_1 - \ell_2$ 最小化:

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{f}\|_1 - \|\tilde{f}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|A\tilde{f} - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (1.4)$$

进一步地, 文献 [16] 通过推广 $\ell_1 - \ell_2$ 形式, 考虑脉冲噪声下的 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($\alpha \in (0, 1]$) 最小化:

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{f}\|_1 - \alpha\|\tilde{f}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|A\tilde{f} - y\|_1 \leq \epsilon, \quad (1.5)$$

得到了对信号和图像稳定重建的一个充分条件, 以及重构信号与真实信号之间近似误差的上界估计. 此后, 文献 [12] 提出了 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($\alpha \in (0, 1]$) 最小化 DS 模型:

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{f}\|_1 - \alpha\|\tilde{f}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|A^*(A\tilde{f} - y)\|_\infty \leq \eta, \quad (1.6)$$

建立了基于 RIP 条件的信号恢复保证, 并通过数值实验说明所提出的 DS 模型的性能优于现有方法.

对于在某些标准正交基下稀疏的信号, 上述方法是有效的. 但在实际应用中, 常见的信号往往不是稀疏的, 甚至也不能在标准正交基上稀疏表示, 而是在某个冗余框架 $D \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ($d > n$) 上稀疏, 即 $f = Dx$ ($x \in \mathbb{R}^d$) 是 (近似) 稀疏的 (参见文献 [3, 18]).

ℓ_1 分析法是求解这类问题的有效方法之一. 基于框架 D 的限制等距性条件 (简称 D -RIP 条件) 的恢复结果与经典压缩感知结果类似^[3, 9, 18], 它通过求解 ℓ_1 最小化问题直接恢复原始信号 f . 文献中常见的带噪声的分析算法有 ABP (the analysis basis pursuit) 算法^[3] 和 ADS (the analysis Dantzig selector) 算法^[18] 两种:

$$(\text{ABP}): \min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|D^*\tilde{f}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A\tilde{f} - y\|_2 \leq \epsilon, \quad (1.7)$$

$$(\text{ADS}): \min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|D^*\tilde{f}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|D^*A^*(A\tilde{f} - y)\|_\infty \leq \lambda. \quad (1.8)$$

当 D 是紧框架时, 文献 [3] 指出, 当测量矩阵 A 满足 D -RIP 条件 $\delta_{2s} \leq 0.08$ 和 $\|e\|_2 \leq \epsilon$ 时, 问题 (1.7) 的解 $\hat{f}$ 满足

$$\|\hat{f} - f\|_2 \leq C_0 \frac{\|D^*f - (D^*f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}} + C_1\epsilon.$$

当测量矩阵 A 满足 D -RIP 条件 $\delta_{3s} \leq \frac{1}{2}$ 且 $\|D^* A^* e\|_\infty \leq \lambda$ 时, 文献 [18] 指出问题 (1.8) 的解 $\hat{f}$ 满足

$$\|\hat{f} - f\|_2 \leq C_2 \frac{\|D^* f - (D^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}} + C_3 \sqrt{s} \lambda,$$

其中 $(D^* f)_{[s]}$ 表示保留 $D^* f$ 模最大的 s 个分量而令其他分量为 0 所得到的向量, 即 $D^* f$ 的最佳 s 项稀疏逼近. 上面提到的 D -RIP 条件 [3] 可以看作经典 RIP 条件的自然推广. 给定 $m \times n$ 阶测量矩阵 A , 如果存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得 $(1 - \delta)\|Dv\|_2^2 \leq \|ADv\|_2^2 \leq (1 + \delta)\|Dv\|_2^2$ 对于所有 s -稀疏向量 $v \in \mathbb{R}^d$ 成立, 则称测量矩阵 A 满足关于 $D \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 的 s 阶 RIP 条件 (简称为 D -RIP 条件). 其中 δ 的最小值称为测量矩阵 A 关于 D 的 s 阶 RIP 常数, 记作 δ_s .

然而, ℓ_1 分析法也存在一定的缺陷. 对于一般的框架 D , 信号 f 关于框架 D 稀疏并不意味着 $D^* f$ 一定稀疏 [5]. 给定信号 f , 用 D 的列向量来表示 f 有无数种方式, 根据框架展开的理论, f 在 D 中展开的系数对应于 D 的对偶框架 [21]. 对于任意的框架 D , 它有许多对偶框架, 其中总存在某一对偶框架 $\tilde{D}$ 使得 $\tilde{D}^* f$ 比 $D^* f$ 更稀疏. 文献 [21] 提出了基于一般框架的对偶 ABP 算法:

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{D}^* \tilde{f}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A\tilde{f} - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (1.9)$$

文献 [21] 给出, 当测量矩阵 A 满足 D -RIP 条件时, 此算法有与 ℓ_1 分析法类似的恢复结果:

$$\|\hat{f} - f\|_2 \leq \tilde{C}_0 \frac{\|\tilde{D}^* f - (\tilde{D}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}} + \tilde{C}_1 \epsilon.$$

文献 [5] 提出了基于一般框架的对偶 ADS 算法:

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{D}^* \tilde{f}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{D}^* A^* (A\tilde{f} - y)\|_\infty \leq \lambda. \quad (1.10)$$

同样, 当测量矩阵 A 满足 D -RIP 条件时, 此算法也有上述类似的恢复结果:

$$\|\hat{f} - f\|_2 \leq \tilde{C}_2 \frac{\|\tilde{D}^* f - (\tilde{D}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}} + \tilde{C}_3 \lambda.$$

关于框架下的 $\ell_1 - \alpha \ell_2$ 极小化, 文献 [17] 提出了无约束的 $\ell_1 - \alpha \ell_2$ 分析模型:

$$\min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^n} \lambda(\|\tilde{D}^* \tilde{f}\|_1 - \alpha \|\tilde{D}^* \tilde{f}\|_2) + \frac{1}{2} \|A\tilde{f} - y\|_2^2, \quad (1.11)$$

并基于 D -RIP 条件给出了恢复结果, 为所提出的非凸分析模型建立了有效的算法. 最后通过大量的数值实验说明了, 所提出的模型和算法对信号和压缩感知磁共振成像重建的性能优于现有方法.

在处理实际问题中, 人们经常会遇到一些复杂的数据, 如雷达数据 [32] 和神经生物学图像数据 [13] 等. 通常将它们称为多模态数据, 即由不同的子成分组成的数据. 对于这些数据, 可以尝试将其分离成合适的单个成分, 以便于进一步分析 [8, 11]. 在文献 [10, 35] 中, 典型的例子有卡通图像的纹理分离和盲源分离等, 这类问题称为压缩数据分离. 考虑信号 $f = f_1 + f_2$, 其中 f_1 和 f_2 在两个不同的一般框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 下是 (近似) 稀疏的. 希望通过观测向量 y 和测量矩阵 A 重构未知成分 f_1 和 f_2 .

关于压缩信号分离问题, Candès 等 [3] 引入了 ℓ_1 分解分析算法, 子成分 f_1 和 f_2 在不同的紧框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 下 (近似) 稀疏, 通过建立如下 ℓ_1 最小化问题来恢复 f_1 和 f_2 :

$$\min_{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathbb{R}^n} \|D_1^* \tilde{f}_1\|_1 + \|D_2^* \tilde{f}_2\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|A(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) - y\|_2 \leq \epsilon. \quad (1.12)$$

文献 [19] 利用 l_1 分解分析法得到问题 (1.12) 的最优解 $(\hat{f}_1, \hat{f}_2)$, 及重构误差上界:

$$\|\hat{f}_1 - f_1\|_2 + \|\hat{f}_2 - f_2\|_2 \leq C_0 \frac{\|D_1^* f_1 - (D_1^* f_1)_{[s_1]}\|_1 + \|D_2^* f_2 - (D_2^* f_2)_{[s_2]}\|_1}{\sqrt{s_1 + s_2}} + C_1 \epsilon, \quad (1.13)$$

其中, s_1 和 s_2 是对应于紧框架 D_1 和 D_2 的稀疏度, 且 $\Phi = [D_1 | D_2]$, $s = s_1 + s_2$. 这里假设测量矩阵 A 满足 Φ -RIP 条件 $\delta_{cs} \leq c_1$, 紧框架 D_1 和 D_2 间满足相互相干性条件 $\mu s \leq c_2$.

受文献 [16, 17] 的启发, 基于对偶 ABP 算法和 ADS 算法, 本文提出对偶 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 分解 ABP 算法 (简称为 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SABP 算法) 及对偶 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 分解 ADS 算法 (简称为 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SADS 算法) 用来求解压缩数据分离问题. 给定一般框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$, $\tilde{D}_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $\tilde{D}_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 分别为它们对应的对偶框架, 子成分 f_1 和 f_2 分别在框架 D_1 和 D_2 下 (近似) 稀疏. 令 $\tilde{\Phi} = [\tilde{D}_1 | \tilde{D}_2]$, 两种模型如下所示:

$$\begin{aligned} ((\ell_1 - \alpha\ell_2)\text{-SABP}): \quad & (\hat{f}_1^{BP}, \hat{f}_2^{BP}) = \arg \min_{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathbb{R}^n} (\|\tilde{D}_1^* \tilde{f}_1\|_1 + \|\tilde{D}_2^* \tilde{f}_2\|_1) - \alpha(\sqrt{\|\tilde{D}_1^* \tilde{f}_1\|_2^2 + \|\tilde{D}_2^* \tilde{f}_2\|_2^2}) \\ & \text{s.t.} \quad \|A(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) - y\|_2 \leq \epsilon, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} ((\ell_1 - \alpha\ell_2)\text{-SADS}): \quad & (\hat{f}_1^{DS}, \hat{f}_2^{DS}) = \arg \min_{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathbb{R}^n} (\|\tilde{D}_1^* \tilde{f}_1\|_1 + \|\tilde{D}_2^* \tilde{f}_2\|_1) - \alpha(\sqrt{\|\tilde{D}_1^* \tilde{f}_1\|_2^2 + \|\tilde{D}_2^* \tilde{f}_2\|_2^2}) \\ & \text{s.t.} \quad \|\tilde{\Phi}^* A^* (A(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) - y)\|_\infty \leq \lambda, \end{aligned} \quad (1.15)$$

其中 ϵ 和 λ 均为噪声项度量参数.

本文考虑一般框架下的压缩数据分离问题, 提出 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SABP 算法和 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SADS 算法并对算法进行性能分析. 结果表明, 在适当的条件下, 模型 (1.14) 和 (1.15) 可得到与 (1.13) 类似的恢复误差界. 本文证明了算法成功恢复的充分条件不仅与测量矩阵 A 的 Φ -RIP 条件及框架的相互相干性条件有关, 还与框架上下界之比有关.

本文余下内容的结构如下: 第 2 节介绍一些符号和要用到的定义及引理等. 第 3 节建立基于一般框架下的压缩数据分离模型, 给出 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SABP 算法和 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SADS 算法的稳定恢复结果及证明过程. 第 4 节设计简单的求解算法并进行数值实验. 最后, 第 5 节总结全文.

2 预备知识

首先对本文中所要使用的符号进行简要说明: 给定向量 $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_0$ 表示 x 中非零元素的个数, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ 表示 x 的 ℓ_2 范数, $\|x\|_\infty = \max |x_i|$, $x_{[s]}$ 表示将向量 x 的分量的绝对值从大到小的顺序排列后取前 s 个元素而令其他元素为 0 所得到的向量, 称 $x_{[s]}$ 为 x 的最佳 s 项稀疏逼近. 对于 $d \in \mathbb{N}$, $[d]$ 等价于 $\{1, 2, \dots, d\}$, 给定矩阵 $D \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 和索引集 $T \subset [d]$, T^c 表示 T 关于 $[d]$ 的补集, D_T (或 $[D]_T$) 表示由索引 T 生成的 D 的子矩阵. 对于矩阵 D_1 , D_{1T} 表示 $(D_1)_T$. D^* 表示 D 的共轭转置, D_T^* 表示 $(D_T)^*$. I 表示单位矩阵. $C > 0$ (或 c, c_1) 表示在每次出现时可能不同的常数.

定义 2.1 令 $D_1 = (d_{1i})_{1 \leq i \leq d_1}$, $D_2 = (d_{2j})_{1 \leq j \leq d_2}$, D_1 和 D_2 间的相互相干性定义为^[19]

$$\mu = \max_{i,j} |\langle d_{1i}, d_{2j} \rangle|.$$

定义 2.2 若存在常数 $0 < A \leq B < +\infty$, 使得对于任意的 $f \in \mathbb{R}^n$, 有下式成立^[6]:

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^d |\langle f, d_i \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2,$$

则称这簇向量 $\{d_i\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^n$ 构成一个框架, 其中 A 和 B 分别称为框架的上界和下界. 当 $A = B = 1$ 时, 称 $\{d_i\}_{i=1}^d$ 为 $\mathbb{R}^n$ 空间中的紧框架.

定义 2.3 如果对于任意的 $f \in \mathbb{R}^n$, 有下式成立 [6]:

$$f = \sum_{i=1}^d \langle f, d_i \rangle \tilde{d}_i = \sum_{i=1}^d \langle f, \tilde{d}_i \rangle d_i,$$

则称框架 $\{\tilde{d}_i\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^n$ 为框架 $\{d_i\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^n$ 的对偶框架, 此时也称框架 $\{d_i\}_{i=1}^d$ 为框架 $\{\tilde{d}_i\}_{i=1}^d$ 的对偶框架.

令 $D = \{d_i\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 和 $\tilde{D} = \{\tilde{d}_i\}_{i=1}^d \in \mathbb{R}^{n \times d}$ 是矩阵形式的框架和对偶框架. 对于任意的框架 D , 它有无限多个对偶框架, 即 D 的全体对偶框架类由 $\tilde{D}$ 的列向量给出:

$$\tilde{D} = (DD^*)^{-1}D + W^*(I_d - D^*(DD^*)^{-1}D) = \bar{D} + W^*P.$$

这里有 $D\tilde{D}^* = I = \tilde{D}D^*$. 当 $W = \mathbf{0}$ 时, $\tilde{D}$ 简化为标准对偶框架 $\bar{D} = (DD^*)^{-1}D$, $\bar{D}$ 的框架上界和下界分别为 $1/A$ 和 $1/B$ [6].

引理 2.1 [1] 设 q 和 r 是满足 $q \leq 3r$ 的正整数, 任意非递增的实数序列

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r \geq b_1 \geq \cdots \geq b_q \geq c_1 \geq \cdots \geq c_r \geq 0$$

满足

$$\sqrt{\sum_{i=1}^q b_i^2 + \sum_{i=1}^r c_i^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^r a_i + \sum_{i=1}^q b_i}{\sqrt{q+r}}.$$

引理 2.2 [3] 对于任意的 $u, v \in \mathbb{R}$ 和 $c > 0$, 有 $2uv \leq cu^2 + \frac{v^2}{c}$.

3 主要结果及证明

本文考虑压缩数据分离问题, 即从观测数据中重建信号的不同稀疏成分. 这里考虑由两个稀疏成分构成的信号 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 \in \mathbb{R}^n$ 和 $f_2 \in \mathbb{R}^n$ 分别在一般框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 下是 (近似) 稀疏的. 压缩数据分离问题即根据线性观测模型

$$y = A(f_1 + f_2) + e, \quad (3.1)$$

利用已知的 m ($m \ll n$) 维观测向量 y 和测量矩阵 A 重构子成分 f_1 和 f_2 .

由于 $\tilde{D}_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $\tilde{D}_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 分别是框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 的对偶框架, 因此对于任意的 $f \in \mathbb{R}^n$, 有 $f = D_1 \tilde{D}_1^* f$, $f = D_2 \tilde{D}_2^* f$. 设 $d = d_1 + d_2$. 令

$$\begin{aligned} \Phi &= [D_1 | D_2], \quad \tilde{\Phi} = [\tilde{D}_1 | \tilde{D}_2], \quad \bar{\Phi} = [\bar{D}_1 | \bar{D}_2], \\ \Psi &= \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & 0 \\ 0 & \bar{D}_2 \end{bmatrix}, \\ f &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{f}^{BP} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1^{BP} \\ \hat{f}_2^{BP} \end{pmatrix}, \quad \hat{f}^{DS} = \begin{pmatrix} \hat{f}_1^{DS} \\ \hat{f}_2^{DS} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

则可建立如下 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SABP 模型和 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SADS 模型:

$$((\ell_1 - \alpha\ell_2)\text{-SABP}) : \hat{f}^{BP} = \arg \min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^{2n}} \|\tilde{\Psi}^* \tilde{f}\|_1 - \alpha \|\tilde{\Psi}^* \tilde{f}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|A\Phi\tilde{\Psi}^* \tilde{f} - y\|_2 \leq \epsilon, \quad (3.3)$$

$$((\ell_1 - \alpha\ell_2)\text{-SADS}) : \hat{f}^{DS} = \arg \min_{\tilde{f} \in \mathbb{R}^{2n}} \|\tilde{\Psi}^* \tilde{f}\|_1 - \alpha \|\tilde{\Psi}^* \tilde{f}\|_2 \quad \text{s.t.} \quad \|\tilde{\Phi}^* A^* (A\Phi\tilde{\Psi}^* \tilde{f} - y)\|_\infty \leq \lambda. \quad (3.4)$$

3.1 一般对偶框架下的压缩数据分离

在分析算子是一般对偶框架的情形下, 本小节建立 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SABP 模型和 $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -SADS 算法的理论结果. 在适当的条件下, 本文提出的两种算法均可实现压缩数据子成分的稳定恢复.

定理 3.1 考虑信号分离模型 (3.1). 令 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 是任意框架且框架界分别为 $0 < A_1 \leq B_1 < +\infty$ 和 $0 < A_2 \leq B_2 < +\infty$. 令 $\tilde{D}_1$ 和 $\tilde{D}_2$ 分别是 D_1 和 D_2 相应的对偶框架且框架界分别为 $0 < \tilde{A}_1 \leq \tilde{B}_1 < +\infty$ 和 $0 < \tilde{A}_2 \leq \tilde{B}_2 < +\infty$. 此外, 令 $A = \min\{A_1, A_2\}$, $B = \max\{B_1, B_2\}$, $\tilde{A} = \min\{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\}$, $\tilde{B} = \max\{\tilde{B}_1, \tilde{B}_2\}$. Φ 、 $\tilde{\Phi}$ 、 $\tilde{\Psi}$ 和 f 如 (3.2) 所示. 对于 $0 < \alpha \leq 1$, 正整数 s 、 a 和 b 满足 $a < b \leq 4a$ 和 $\rho = \rho(s, b; \alpha) = (\sqrt{s} + \alpha)/\sqrt{b} < 1/\sqrt{B\tilde{B}}$. 若 $\|e\|_2 \leq \epsilon$, $\hat{f}^{BP}$ 是模型 (3.3) 的最优解, 假设测量矩阵 A 的 Φ -RIP 常数 δ_b 和 δ_{s+a} 与 D_1 和 D_2 间的相互相干性 μ 满足

$$\mu\tilde{B}(s+a)(1-\delta_{s+a}) + 2\rho^2\tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b) < 2(1-\rho^2B\tilde{B})(1-\delta_{s+a}), \quad (3.5)$$

则模型 (3.3) 的解 $\hat{f}^{BP}$ 满足

$$\|\hat{f}^{BP} - f\|_2 \leq C_0\epsilon + C_1 \frac{\|\tilde{\Psi}^* f - (\tilde{\Psi}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}}.$$

在相同的条件下, 若 $\|\tilde{\Phi}^* A^* e\|_\infty \leq \lambda$, $\hat{f}^{DS}$ 是模型 (3.4) 的最优解, 假设测量矩阵 A 的 Φ -RIP 常数 δ_b 和 δ_{s+a} 与 D_1 和 D_2 间的相互相干性 μ 满足

$$\mu\tilde{B}(s+a)(1-\delta_{s+a}) + 2\rho\tilde{B}(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)} < 2(1-\rho^2B\tilde{B})(1-\delta_{s+a}), \quad (3.6)$$

则模型 (3.4) 的解 $\hat{f}^{DS}$ 满足

$$\|\hat{f}^{DS} - f\|_2 \leq C_2\lambda + C_3 \frac{\|\tilde{\Psi}^* f - (\tilde{\Psi}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}},$$

其中 C_0 、 C_1 、 C_2 和 C_3 为仅依赖于 δ_b 、 δ_{s+a} 、 μ 、 s 、 a 、 b 和 α 的正常数.

注 3.1 假设 D_1 和 D_2 是一般框架, $\tilde{D}_1$ 和 $\tilde{D}_2$ 分别是它们相应的标准对偶框架, 即 $\tilde{D}_1 = (D_1 D_1^*)^{-1} D_1$, $\tilde{D}_2 = (D_2 D_2^*)^{-1} D_2$. 则 (3.5) 变为

$$\kappa\mu(s+a)(1-\delta_{s+a}) + 2\rho^2\kappa(B_1+B_2)(1+\delta_b) < 2B(1-\rho^2\kappa)(1-\delta_{s+a}),$$

(3.6) 变为

$$\kappa\mu(s+a)(1-\delta_{s+a}) + 2\rho\kappa(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)} < 2B(1-\rho^2\kappa)(1-\delta_{s+a}),$$

其中 $\kappa = B\tilde{B} = B/A$. 我们发现这个充分条件不仅取决于测量矩阵 A 的 Φ -RIP 条件及框架的相互相干性条件, 还取决于框架上下界之比.

注 3.2 假设 D_1 和 D_2 是紧框架且 $\tilde{D}_1$ 和 $\tilde{D}_2$ 分别是它们相应的标准对偶框架, 即 $\tilde{D}_1 = D_1$, $\tilde{D}_2 = D_2$. 因此有 $B_1 = B_2 = \tilde{B}_1 = \tilde{B}_2 = 1$, (3.5) 变为

$$\mu(s+a)(1-\delta_{s+a})+4\rho^2(1+\delta_b)<2(1-\rho^2)(1-\delta_{s+a}),$$

(3.6) 变为

$$\mu(s+a)(1-\delta_{s+a})+4\rho\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)}<2(1-\rho^2)(1-\delta_{s+a}).$$

定理 3.1 的证明 令 f 是原始信号, 假设 Ψ^*f 的前 s 项为绝对值最大的 s 项, $\tilde{\Psi}^*h = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$, 不失一般性, 对 $\tilde{\Psi}^*h$ 进行重排后假设有 $|x_{s+1}| \geq |x_{s+2}| \geq \dots \geq |x_d|$. 令 $T_0 = \{1, 2, \dots, s\}$, $T_1 = \{s+1, s+2, \dots, s+a\}$, $T_i = \{s+a+(i-2)b+1, \dots, s+a+(i-1)b\}$ ($i=2, 3, \dots$), 最后一个集合的长度小于等于 b . 进一步将每个 T_i ($i \geq 2$) 分成如下两部分:

$$T_{i1} = \{s+a+(i-2)b+1, \dots, s+(i-1)b\}, \quad T_{i2} = \{s+(i-1)b+1, \dots, s+(i-1)b+a\},$$

即 $|T_{i1}| = b-a$, $|T_{i2}| = a$. 记 $T_{01} = T_0 \cup T_1$, $T^1 = T \cap [d_1]$, $T^2 = \{j-d_1 \mid j \in T \setminus T^1\}$. 由于 D_1 和 D_2 均为框架, 可以证明 Ψ 和 $\tilde{\Psi}$ 也是框架, 且分别具有框架界 $0 < A \leq B < +\infty$ 和 $0 < \tilde{A} \leq \tilde{B} < +\infty$. 那么

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \|\Psi\tilde{\Psi}^*h\|_2^2 = \|\Psi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^*h\|_2^2 + \|\Psi\tilde{\Psi}_{T_{01}^c}^*h\|_2^2 \\ &= \|D_1\tilde{D}_{1T_{01}}^*h_1\|_2^2 + \|D_2\tilde{D}_{2T_{01}}^*h_2\|_2^2 + \|\Psi\tilde{\Psi}_{T_{01}^c}^*h\|_2^2 \\ &\leq \|D_1\tilde{D}_{1T_{01}}^*h_1\|_2^2 + \|D_2\tilde{D}_{2T_{01}}^*h_2\|_2^2 + B\|\tilde{\Psi}_{T_{01}^c}^*h\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

则需分别估计 $\|D_1\tilde{D}_{1T_{01}}^*h_1\|_2^2 + \|D_2\tilde{D}_{2T_{01}}^*h_2\|_2^2$ 和 $\|\tilde{\Psi}_{T_{01}^c}^*h\|_2$.

下面针对两类不同噪声情形进行具体分析.

类型一 噪声情形 $\|e\|_2 \leq \epsilon$. 令 $h = \hat{f}^{BP} - f$, 其中 $\hat{f}^{BP}$ 是模型 (3.3) 的最优解, 则 $h = [h_1; h_2]$, 其中 $h_1 = \hat{f}_1^{BP} - f_1$, $h_2 = \hat{f}_2^{BP} - f_2$.

首先估计 $\|\tilde{\Psi}_{T_{01}^c}^*h\|_2$. 由于 $\hat{f}^{BP}$ 是模型 (3.3) 的最优解, 所以有

$$\|\tilde{\Psi}^*\hat{f}^{BP}\|_1 - \alpha\|\tilde{\Psi}^*\hat{f}^{BP}\|_2 \leq \|\tilde{\Psi}^*f\|_1 - \alpha\|\tilde{\Psi}^*f\|_2,$$

即

$$\|\tilde{\Psi}^*\hat{f}^{BP}\|_1 - \|\tilde{\Psi}^*f\|_1 \leq \alpha\|\tilde{\Psi}^*\hat{f}^{BP}\|_2 - \alpha\|\tilde{\Psi}^*f\|_2 \leq \alpha\|\tilde{\Psi}^*h\|_2.$$

因此 $\|\tilde{\Psi}^*\hat{f}^{BP}\|_1 \leq \|\tilde{\Psi}^*f\|_1 + \alpha\|\tilde{\Psi}^*h\|_2$. 而 $\|\tilde{\Psi}^*\hat{f}^{BP}\|_1 = \|\tilde{\Psi}^*(f+h)\|_1 \geq \|\tilde{\Psi}_{T_0}^*f\|_1 - \|\tilde{\Psi}_{T_0}^*h\|_1 + \|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^*h\|_1 - \|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^*f\|_1$, 于是有

$$\|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^*h\|_1 \leq \|\tilde{\Psi}_{T_0}^*h\|_1 + 2\|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^*f\|_1 + \alpha\|\tilde{\Psi}^*h\|_2. \quad (3.8)$$

由于 $0 < b-a \leq 3a$, 对于向量 $[(\tilde{\Psi}_{T_1}^*h)^*, (\tilde{\Psi}_{T_{21}}^*h)^*, (\tilde{\Psi}_{T_{22}}^*h)^*]^*$ 和 $[(\tilde{\Psi}_{T_{(i-1)2}}^*h)^*, (\tilde{\Psi}_{T_{i1}}^*h)^*, (\tilde{\Psi}_{T_{i2}}^*h)^*]^*$ ($i=3, 4, \dots$), 利用引理 2.2 的移位不等式有

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Psi}_{T_2}^*h\|_2 &\leq \frac{\|\tilde{\Psi}_{T_1}^*h\|_1 + \|\tilde{\Psi}_{T_{21}}^*h\|_1}{\sqrt{b}}, \\ \|\tilde{\Psi}_{T_i}^*h\|_2 &\leq \frac{\|\tilde{\Psi}_{T_{(i-1)2}}^*h\|_1 + \|\tilde{\Psi}_{T_{i1}}^*h\|_1}{\sqrt{b}}, \quad i=3, 4, \dots \end{aligned}$$

然后可得

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 2} \|\tilde{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 &\leq \frac{\|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^* h\|_1}{\sqrt{b}} \leq \frac{\|\tilde{\Psi}_{T_0}^* h\|_1}{\sqrt{b}} + 2 \frac{\|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^* f\|_1}{\sqrt{b}} + \frac{\alpha \|\tilde{\Psi}^* h\|_2}{\sqrt{b}} \\ &\leq \frac{\sqrt{s} + \alpha}{\sqrt{b}} \|\tilde{\Psi}^* h\|_2 + 2 \frac{\|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^* f\|_1}{\sqrt{b}} \\ &\leq \rho \sqrt{\tilde{B}} \|h\|_2 + \beta \eta, \end{aligned}$$

其中第二个不等式成立是由于 (3.8), 第三个不等式由 Cauchy-Schwarz 不等式得到, 最后一个不等式成立是由于 $\tilde{\Psi}$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 空间中上界为 $\tilde{B}$ 的框架, 并记 $\rho = (\sqrt{s} + \alpha)/\sqrt{b}$, $\beta = \sqrt{s}/\sqrt{b}$, $\eta = 2\|\tilde{\Psi}_{T_0^c}^* f\|_1/\sqrt{s}$. 所以有

$$\|\tilde{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2 \leq \sum_{i \geq 2} \|\tilde{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 \leq \rho \sqrt{\tilde{B}} \|h\|_2 + \beta \eta. \quad (3.9)$$

接下来估计 $\|D_1 \tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|D_2 \tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2$. 因为 $\hat{f}^{BP}$ 和 f 为可行解, 所以有

$$\|A\Phi \tilde{\Psi}^* h\|_2 = \|A\Phi \tilde{\Psi}^*(\hat{f}^{BP} - f)\|_2 \leq \|A\Phi \tilde{\Psi}^* \hat{f}^{BP} - y\|_2 + \|A\Phi \tilde{\Psi}^* f - y\|_2 \leq 2\epsilon. \quad (3.10)$$

由 A 满足 Φ -RIP 条件, 得

$$\begin{aligned} \|A\Phi \tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 &= \left\| A\Phi \tilde{\Psi}^* h - \sum_{i \geq 2} A\Phi \tilde{\Psi}_{T_i}^* h \right\|_2^2 \leq \left(2\epsilon + \sqrt{1 + \delta_b} \sum_{i \geq 2} \|\Phi \tilde{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 \right)^2 \\ &\leq \left(2\epsilon + \sqrt{(1 + \delta_b)(B_1 + B_2)} \sum_{i \geq 2} \|\tilde{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 \right)^2 \\ &\leq (2\epsilon + \sqrt{(1 + \delta_b)(B_1 + B_2)} (\rho \sqrt{\tilde{B}} \|h\|_2 + \beta \eta))^2. \end{aligned}$$

上述第二个不等式成立是由于 $\|\Phi\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\Phi\Phi^*)} \leq \sqrt{\lambda_{\max}((B_1 + B_2)I)} \leq \sqrt{B_1 + B_2}$, 最后一个不等式成立是由于 (3.9). 由此可得

$$\|\Phi \tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 \leq \frac{1}{1 - \delta_{s+a}} \|A\Phi \tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 \leq \frac{1}{1 - \delta_{s+a}} (2\epsilon + \sqrt{(1 + \delta_b)(B_1 + B_2)} (\rho \sqrt{\tilde{B}} \|h\|_2 + \beta \eta))^2. \quad (3.11)$$

又因为

$$\begin{aligned} \|D_1 \tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|D_2 \tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2 &= \|\Phi \tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 - 2\langle D_1 \tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1, D_2 \tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2 \rangle \\ &\leq \|\Phi \tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 + 2|\langle D_1 \tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1, D_2 \tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2 \rangle|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2|\langle D_1 \tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1, D_2 \tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2 \rangle| &= 2 \left| \sum_{i \in T_{01}^1} \sum_{j \in T_{01}^2} \langle \tilde{d}_{1i}, h_1 \rangle \langle d_{1i}, d_{2j} \rangle \langle h_2, \tilde{d}_{2j} \rangle \right| \\
&\leq 2\mu \sum_{i \in T_{01}^1} \sum_{j \in T_{01}^2} |\langle \tilde{d}_{1i}, h_1 \rangle \langle h_2, \tilde{d}_{2j} \rangle| \\
&= 2\mu \|\tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_1 \|\tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_1 \\
&\leq 2\mu \sqrt{|T_{01}^1| |T_{01}^2|} \|\tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2 \|\tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2 \\
&\leq \mu(s+a) \|\tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2 \|\tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2 \\
&\leq \frac{\mu(s+a)}{2} (\|\tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|\tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2) \\
&\leq \frac{\mu(s+a)}{2} \|\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 \\
&\leq \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} \|h\|_2^2,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\|D_1 \tilde{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|D_2 \tilde{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{1-\delta_{s+a}} (2\epsilon + \sqrt{(1+\delta_t)(B_1+B_2)}(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta))^2 + \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} \|h\|_2^2. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

将 (3.9) 和 (3.12) 代入 (3.7), 得

$$\begin{aligned}
\|h\|_2^2 &\leq \frac{1}{1-\delta_{s+a}} (2\epsilon + \sqrt{(1+\delta_b)(B_1+B_2)}(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta))^2 + \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} \|h\|_2^2 + B(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta)^2 \\
&\leq \left(\frac{\rho^2 \tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b)}{1-\delta_{s+a}} + \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} + B\tilde{B}\rho^2 \right) \|h\|_2^2 + \frac{4\epsilon^2}{1-\delta_{s+a}} \\
&\quad + \left(\frac{\beta^2(B_1+B_2)(1+\delta_b)}{1-\delta_{s+a}} + B\beta^2 \right) \eta^2 + \frac{2\rho\sqrt{\tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} \cdot 2\epsilon\|h\|_2 \\
&\quad + \frac{2\beta\sqrt{(B_1+B_2)(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} \cdot 2\epsilon\eta + \left(\frac{\rho\beta\sqrt{\tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} + B\sqrt{\tilde{B}\rho\beta} \right) \cdot 2\eta\|h\|_2.
\end{aligned}$$

应用两次引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned}
\|h\|_2^2 &\leq \left(\frac{\rho^2 \tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b)}{1-\delta_{s+a}} + \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} + B\tilde{B}\rho^2 \right) \|h\|_2^2 + \frac{4\epsilon^2}{1-\delta_{s+a}} \\
&\quad + \left(\frac{\beta^2(B_1+B_2)(1+\delta_b)}{1-\delta_{s+a}} + B\beta^2 \right) \eta^2 + \frac{2\rho\sqrt{\tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} \left(\frac{\epsilon^2}{c_1} + c_1\|h\|_2^2 \right) \\
&\quad + \frac{2\beta\sqrt{(B_1+B_2)(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} (\epsilon^2 + \eta^2) + \left(\frac{\rho\beta\sqrt{\tilde{B}(B_1+B_2)(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} + B\sqrt{\tilde{B}\rho\beta} \right) \left(\frac{\eta^2}{c_2} + c_2\|h\|_2^2 \right).
\end{aligned}$$

化简得

$$K_1 \|h\|_2^2 \leq K_2 \epsilon^2 + K_3 \eta^2,$$

其中

$$\begin{aligned} K_1 &= 1 - \frac{\rho^2 \tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{1 - \delta_{s+a}} - \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} - B\tilde{B}\rho^2 - \frac{2c_1\rho\sqrt{\tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{1 - \delta_{s+a}} \\ &\quad - \frac{c_2\rho\beta\sqrt{\tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{1 - \delta_{s+a}} - c_2B\sqrt{\tilde{B}}\rho\beta, \\ K_2 &= \frac{4}{1 - \delta_{s+a}} + \frac{2\rho\sqrt{\tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{c_1(1 - \delta_{s+a})} + \frac{2\beta\sqrt{(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{1 - \delta_{s+a}}, \\ K_3 &= \frac{\beta^2(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{1 - \delta_{s+a}} + B\beta^2 + \frac{2\beta\sqrt{(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{1 - \delta_{s+a}} + \frac{\rho\beta\sqrt{\tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{c_2(1 - \delta_{s+a})} + \frac{B\sqrt{\tilde{B}}\rho\beta}{c_2}. \end{aligned}$$

假设 $K_1 > 0$, 则有

$$\|h\|_2 \leq \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}\epsilon + \sqrt{\frac{K_3}{K_1}}\eta.$$

下面考虑如何选择参数 c_1 和 c_2 使得 $K_1 > 0$. 观察 $K_1 = K_1(c_1, c_2)$ 可以发现, K_1 随着 c_1 和 c_2 的增大而减小, 因此使 c_1 和 c_2 尽可能地小, 即 $c_1 \rightarrow 0_+$, $c_2 \rightarrow 0_+$, 此时 $K_1(c_1, c_2)$ 变为

$$K_1 = 1 - \frac{\rho^2 \tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{1 - \delta_{s+a}} - \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} - \rho^2 B\tilde{B}.$$

此时 $K_1 > 0$ 等价于 $\mu\tilde{B}(s+a)(1 - \delta_{s+a}) + 2\rho^2 \tilde{B}(B_1 + B_2)(1 + \delta_b) < 2(1 - \rho^2 B\tilde{B})(1 - \delta_{s+a})$. 至此完成了定理 3.1 中关于模型 (3.3) 结论的证明.

类型二 噪声情形 $\|\tilde{\Phi}^* A^* e\|_\infty \leq \lambda$. 第二类噪声情形下的证明过程与第一类相似, 令 $h = \hat{f}^{DS} - f$, 其中 $\hat{f}^{DS}$ 是问题 (3.4) 的最优解. (3.10) 变为

$$\|\tilde{\Phi}^* A^* A\Phi\tilde{\Psi}^* h\|_\infty \leq \|\tilde{\Phi}^* A^* (A\Phi\tilde{\Psi}^* f - y)\|_\infty + \|\tilde{\Phi}^* A^* (A\Phi\tilde{\Psi}^* \hat{f}^{DS} - y)\|_\infty \leq 2\lambda. \quad (3.13)$$

所以由限制等距性质得

$$\begin{aligned} |\langle A\Phi\tilde{\Psi}^* h, A\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h \rangle| &= |\langle A^* A\Phi\tilde{\Psi}^* h, \Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h \rangle| = \frac{1}{2} |\langle A^* A\Phi\tilde{\Psi}^* h, \tilde{\Phi}\Phi^* \Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h \rangle| \\ &= \frac{1}{2} |\langle \tilde{\Phi}^* A^* A\Phi\tilde{\Psi}^* h, \Phi^* \Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h \rangle| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\Phi}^* A^* A\Phi\tilde{\Psi}^* h\|_\infty \|\Phi^* \Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_1 \\ &\leq \lambda\sqrt{s+a} \|\Phi^* \Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2 \\ &\leq \lambda(B_1 + B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)} \|h\|_2, \end{aligned}$$

其中第二个等号成立是由于 $\tilde{\Phi}\Phi^* = \tilde{D}_1 D_1^* + \tilde{D}_2 D_2^* = 2I$, 最后一个不等号是由 $\|\Phi\| \leq \sqrt{B_1 + B_2}$ 及 $\tilde{\Psi}$ 是框架的事实得到的. 于是有

$$\begin{aligned} (1 - \delta_{s+a}) \|\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 &\leq \|A\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 \leq |\langle A\Phi\tilde{\Psi}^* h, A\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h \rangle| + \sum_{i \geq 2} |\langle A\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h, A\Phi\tilde{\Psi}_{T_i}^* h \rangle| \\ &\leq \lambda(B_1 + B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)} \|h\|_2 + \sqrt{(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)} \|\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2 \sum_{i \geq 2} \|\Phi\tilde{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 \\ &\leq \lambda(B_1 + B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)} \|h\|_2 + (B_1 + B_2)\sqrt{(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)} \|\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2 \sum_{i \geq 2} \|\tilde{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 \end{aligned}$$

$$\leq \lambda(B_1 + B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)}\|h\|_2 + (B_1 + B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)\tilde{B}}\|h\|_2(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta).$$

上述第 3 个不等式利用了 Φ -RIP 条件, 第 4 个不等式由 $\|\Phi\| \leq \sqrt{B_1 + B_2}$ 得到, 最后一个不等式是根据 $\tilde{\Psi}$ 是框架及 (3.9) 得到的.

结合 3.11, 有

$$\|\Phi\tilde{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 \leq \frac{1}{1-\delta_{s+a}}[\lambda(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)}\|h\|_2 + (B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)\tilde{B}}\|h\|_2(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta)].$$

同理, (3.12) 变成

$$\begin{aligned} & \|D_1\tilde{D}_{1T_{01}}^* h_1\|_2^2 + \|D_2\tilde{D}_{2T_{01}}^* h_2\|_2^2 \\ & \leq \frac{1}{1-\delta_{s+a}}[\lambda(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)}\|h\|_2 + (B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)\tilde{B}}\|h\|_2(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta)] \\ & \quad + \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2}\|h\|_2^2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 & \leq \frac{1}{1-\delta_{s+a}}[\lambda(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)}\|h\|_2 + (B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)\tilde{B}}\|h\|_2(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta)] \\ & \quad + \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2}\|h\|_2^2 + B(\rho\sqrt{\tilde{B}}\|h\|_2 + \beta\eta)^2. \end{aligned}$$

通过类似的计算过程, 可以得到

$$\|h\|_2 \leq \sqrt{\frac{K_5}{K_4}}\lambda + \sqrt{\frac{K_6}{K_4}}\eta,$$

其中

$$\begin{aligned} K_4 &= 1 - \frac{\rho\tilde{B}(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} - \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} - \rho^2 B\tilde{B} - \frac{c_1(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)}}{2(1-\delta_{s+a})} \\ & \quad - \frac{c_2\beta(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)}}{2(1-\delta_{s+a})} - c_2 B\sqrt{\tilde{B}}\rho\beta, \\ K_5 &= \frac{(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(s+a)}}{2c_1(1-\delta_{s+a})}, \\ K_6 &= \frac{\beta(B_1+B_2)\sqrt{\tilde{B}(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)}}{2c_2(1-\delta_{s+a})} + B\beta^2 + \frac{B\sqrt{\tilde{B}}\rho\beta}{c_2}. \end{aligned}$$

这里假设 $K_4 > 0$. 同理, 取 $c_1 \rightarrow 0_+$, $c_2 \rightarrow 0_+$, 此时 $K_4 > 0$ 等价于

$$1 - \frac{\rho\tilde{B}(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)}}{1-\delta_{s+a}} - \frac{\mu(s+a)\tilde{B}}{2} - \rho^2 B\tilde{B} > 0.$$

化简得

$$\mu\tilde{B}(s+a)(1-\delta_{s+a}) + 2\rho\tilde{B}(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)} < 2(1-\rho^2 B\tilde{B})(1-\delta_{s+a}).$$

综合以上两种噪声情形, 定理 3.1 得证. $\square$

3.2 标准对偶框架下的压缩数据分离

本小节考虑分析算子简化为标准对偶框架的情形, 即 $\tilde{D} = \bar{D} = (DD^*)^{-1}D$, 上述算法稳定恢复的充分条件可以得到进一步改进.

定理 3.2 考虑信号分离模型 (3.1), $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$ 是任意框架且框架界为 $0 < A_1 \leq B_1 < +\infty$, $0 < A_2 \leq B_2 < +\infty$. 令 $\bar{D}_1$ 和 $\bar{D}_2$ 分别是 D_1 和 D_2 相应的标准对偶框架. 此外, 令 $A = \min\{A_1, A_2\}$, $B = \max\{B_1, B_2\}$. Φ 、 $\bar{\Phi}$ 、 $\bar{\Psi}$ 和 f 如 (3.2) 所示. 对于 $0 < \alpha \leq 1$, 令 $\kappa = B/A$, 正整数 s 、 a 和 b 满足 $a < b \leq 4a$ 及 $\rho = \rho(s, b; \alpha) = (\sqrt{s} + \alpha)/\sqrt{b} < 1/\sqrt{\kappa}$. 若 $\|e\|_2 \leq \epsilon$, $\hat{f}^{BP}$ 是模型 (3.3) 的最优解, 假设测量矩阵 A 的 Φ -RIP 常数 δ_b 和 δ_{s+a} 与 D_1 和 D_2 间的相互相干性 μ 满足

$$\kappa^3 \mu(s+a)(1 - \delta_{s+a}) + 2\rho^2 \kappa^3 (B_1 + B_2)(1 + \delta_b) < 2B(1 - \rho^2 \kappa)^2 (1 - \delta_{s+a}), \quad (3.14)$$

则模型 (3.3) 的解 $\hat{f}^{BP}$ 满足

$$\|\hat{f}^{BP} - f\|_2 \leq C'_0 \epsilon + C'_1 \frac{\|\bar{\Psi}^* f - (\bar{\Psi}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}}.$$

在相同的条件下, 若 $\|\bar{\Phi}^* A^* e\|_\infty \leq \lambda$, $\hat{f}^{DS}$ 是模型 (3.4) 的最优解, 假设测量矩阵 A 的 Φ -RIP 常数 δ_b 和 δ_{s+a} 与 D_1 和 D_2 间的相互相干性 μ 满足

$$\kappa^3 \mu(s+a)(1 - \delta_{s+a}) + 2\rho \kappa^3 (B_1 + B_2) \sqrt{(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)} < 2B(1 - \rho^2 \kappa)^2 (1 - \delta_{s+a}), \quad (3.15)$$

则模型 (3.4) 的解 $\hat{f}^{DS}$ 满足

$$\|\hat{f}^{DS} - f\|_2 \leq C'_2 \lambda + C'_3 \frac{\|\bar{\Psi}^* f - (\bar{\Psi}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}},$$

其中 C'_0 、 C'_1 、 C'_2 和 C'_3 为仅依赖于 δ_b 、 δ_{s+a} 、 μ 、 s 、 a 、 b 和 α 的正常数.

注 3.3 在定理 3.2 的假设下, 若 e 为 Gauss 噪声, 服从独立同分布均值为 0 的 Gauss 分布, 则 $e \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I}_m \sigma^2)$, $d = d_1 + d_2$. 若 Gauss 噪声满足 $\|e\|_2 \leq \sigma \sqrt{m + 2\sqrt{m \log m}}$ (参见文献 [18, 引理 2.2 和注 2.4]), 则结合定理 3.2 可以得到, 在概率至少为 $1 - 1/m$ 下, 模型 (3.3) 的解 $\hat{f}^{BP}$ 满足

$$\|\hat{f}^{BP} - f\|_2 \leq C'_0 \sigma \sqrt{m + 2\sqrt{m \log m}} + C'_1 \frac{\|\bar{\Psi}^* f - (\bar{\Psi}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}}.$$

若 Gauss 噪声满足 $\|\bar{\Phi}^* A^* e\|_\infty \leq 2\sigma \sqrt{2 \log d}$, 则在概率至少为 $1 - 1/(d\sqrt{2\pi \log d})$ 下, 模型 (3.4) 的解 $\hat{f}^{DS}$ 满足

$$\|\hat{f}^{DS} - f\|_2 \leq C'_2 \sigma \sqrt{\log d} + C'_3 \frac{\|\bar{\Psi}^* f - (\bar{\Psi}^* f)_{[s]}\|_1}{\sqrt{s}}.$$

注 3.4 当 D_1 和 D_2 都是紧框架且 $\bar{D}_1$ 和 $\bar{D}_2$ 是它们对应的标准对偶框架时, 即 $\bar{D}_1 = D_1$, $\bar{D}_2 = D_2$, 此时 $B_1 = B_2 = 1$, $\kappa = 1$, (3.14) 变为

$$\mu(s+a)(1 - \delta_{s+a}) + 4\rho^2 (1 + \delta_b) < 2(1 - \rho^2)^2 (1 - \delta_{s+a}),$$

(3.15) 变为

$$\mu(s+a)(1 - \delta_{s+a}) + 4\rho \sqrt{(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)} < 2(1 - \rho^2)^2 (1 - \delta_{s+a}).$$

定理 3.2 的证明 当 $\bar{D}_1$ 和 $\bar{D}_2$ 分别是 D_1 和 D_2 的标准对偶框架时, 有 $\bar{D}_1 = (D_1 D_1^*)^{-1} D_1$, $\bar{D}_2 = (D_2 D_2^*)^{-1} D_2$, 所以有

$$\Psi \bar{\Psi}^* = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

类型一 噪声情形 $\|e\|_2 \leq \epsilon$. (3.9) 和 (3.12) 分别变为

$$\|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2 \leq \sum_{i \geq 2} \|\bar{\Psi}_{T_i}^* h\|_2 \leq \frac{\rho}{\sqrt{A}} \|h\|_2 + \beta \eta, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} & \|D_1 \bar{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|D_2 \bar{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2 \\ & \leq \frac{1}{1 - \delta_{s+a}} \left(2\epsilon + \sqrt{(1 + \delta_t)(B_1 + B_2)} \left(\frac{\rho}{\sqrt{A}} \|h\|_2 + \beta \eta \right) \right)^2 + \frac{\mu(s+a)}{2A} \|h\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

(3.7) 变为

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &= \|\Psi \bar{\Psi}^* h\|_2^2 \leq B \|\bar{\Psi}^* h\|_2^2 = B \|\bar{\Psi}_{T_{01}}^* h\|_2^2 + B \|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2^2 \\ &= B (\|\bar{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|\bar{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2) + B \|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2^2 \\ &= B (\langle (D_1 D_1^*)^{-1} h_1, D_1 \bar{D}_{1T_{01}^1}^* h_1 \rangle + \langle (D_2 D_2^*)^{-1} h_2, D_2 \bar{D}_{2T_{01}^2}^* h_2 \rangle) + B \|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2^2 \\ &\leq \frac{B}{A} (\|D_1 \bar{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2 \|h_1\|_2 + \|D_2 \bar{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2 \|h_2\|_2) + B \|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2^2. \end{aligned}$$

利用引理 2.2, 有

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &\leq \frac{B}{A} \left[\left(\frac{c_1 \|h_1\|_2^2}{2} + \frac{\|D_1 \bar{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2}{2c_1} \right) + \left(\frac{c_1 \|h_2\|_2^2}{2} + \frac{\|D_2 \bar{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2}{2c_1} \right) \right] + B \|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2^2 \\ &\leq \frac{c_1 B}{2A} \|h\|_2^2 + \frac{B}{2Ac_1} (\|D_1 \bar{D}_{1T_{01}^1}^* h_1\|_2^2 + \|D_2 \bar{D}_{2T_{01}^2}^* h_2\|_2^2) + B \|\bar{\Psi}_{T_{01}^c}^* h\|_2^2. \end{aligned}$$

令 $\kappa = B/A$, 可得

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 &\leq \frac{c_1 \kappa}{2} \|h\|_2^2 + \frac{\kappa}{2c_1} \left(\frac{1}{1 - \delta_{s+a}} \left(2\epsilon + \sqrt{(1 + \delta_b)(B_1 + B_2)} \left(\rho \sqrt{\frac{\kappa}{B}} \|h\|_2 + \beta \eta \right) \right)^2 + \frac{\kappa \mu(s+a)}{2B} \|h\|_2^2 \right) \\ &\quad + B \left(\rho \sqrt{\frac{\kappa}{B}} \|h\|_2 + \beta \eta \right)^2. \end{aligned}$$

化简得

$$K'_1 \|h\|_2^2 \leq K'_2 \epsilon^2 + K'_3 \eta^2,$$

其中

$$\begin{aligned} K'_1 &= 1 - \frac{c_1 \kappa}{2} - \frac{\rho^2 \kappa^2 (B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{2c_1 B(1 - \delta_{s+a})} - \frac{\kappa^2 \mu(s+a)}{4c_1 B} - \rho^2 \kappa - \frac{c_2 \rho \kappa \sqrt{\kappa(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{c_1 \sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})} \\ &\quad - \frac{c_3 \rho \beta \kappa \sqrt{\kappa(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{2c_1 \sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})} - c_3 \rho \beta \sqrt{\kappa B}, \\ K'_2 &= \frac{2\kappa}{c_1(1 - \delta_{s+a})} + \frac{\kappa \beta \sqrt{(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{c_1(1 - \delta_{s+a})} + \frac{\kappa \rho \sqrt{\kappa(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{c_1 c_2 \sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})}, \\ K'_3 &= \frac{\kappa \beta^2 (B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{2c_1(1 - \delta_{s+a})} + \frac{\kappa \beta \sqrt{(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{c_1(1 - \delta_{s+a})} + \frac{\rho \beta \kappa \sqrt{\kappa(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}}{2c_1 c_3 \sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})} + B \beta^2 + \frac{\rho \beta \sqrt{\kappa B}}{c_3}. \end{aligned}$$

假设 $K'_1 > 0$, 则有

$$\|h\|_2 \leq \sqrt{\frac{K'_2}{K'_1}}\epsilon + \sqrt{\frac{K'_3}{K'_1}}\eta.$$

下面考虑如何选择参数 c_1 、 c_2 和 c_3 使得 $K'_1 > 0$. 观察 $K'_1 = K'_1(c_1, c_2, c_3)$ 可以发现, K'_1 随着 c_2 和 c_3 的增大而减小, 因此使 c_2 和 c_3 尽可能地小, 即 $c_2 \rightarrow 0_+$, $c_3 \rightarrow 0_+$, 此时 $K'_1(c_1, c_2, c_3)$ 变为

$$K'_1(c_1) = 1 - \frac{c_1\kappa}{2} - \frac{\rho^2\kappa^2(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{2c_1B(1 - \delta_{s+a})} - \frac{\kappa^2\mu(s + a)}{4c_1B} - \rho^2\kappa.$$

对 $K'_1(c_1)$ 求导数可知, 当 $c_1^* = \sqrt{\frac{\rho^2\kappa(B_1+B_2)(1+\delta_b)}{B(1-\delta_{s+a})} + \frac{\kappa\mu(s+a)}{2B}}$ 时, $K_1(c_1)$ 取得最大值. 取 $c_1 = c_1^*$, 此时 $K'_1 > 0$ 等价于

$$1 - \rho^2\kappa - \kappa\sqrt{\frac{\rho^2\kappa(B_1 + B_2)(1 + \delta_b)}{B(1 - \delta_{s+a})} + \frac{\kappa\mu(s + a)}{2B}} > 0.$$

化简得

$$\kappa^3\mu(s + a)(1 - \delta_{s+a}) + 2\rho^2\kappa^3(B_1 + B_2)(1 + \delta_b) < 2B(1 - \rho^2\kappa)^2(1 - \delta_{s+a}).$$

至此完成了定理 3.2 中关于模型 (3.3) 结论的证明.

类型二 噪声情形 $\|\bar{\Phi}^*A^*e\|_\infty \leq \lambda$. (3.17) 变为

$$\begin{aligned} & \|D_1\bar{D}_{1T_{01}^1}^*h_1\|_2^2 + \|D_2\bar{D}_{2T_{01}^2}^*h_2\|_2^2 \\ & \leq \frac{1}{1 - \delta_{s+a}} \left[\lambda(B_1 + B_2)\sqrt{\frac{s+a}{A}}\|h\|_2 + (B_1 + B_2)\sqrt{\frac{(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)}{A}}\|h\|_2 \left(\frac{\rho}{\sqrt{A}}\|h\|_2 + \beta\eta \right) \right] \\ & \quad + \frac{\mu(s+a)}{2A}\|h\|_2^2. \end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned} \|h\|_2^2 & \leq \frac{\kappa}{2c_1} \left(\frac{1}{1 - \delta_{s+a}} \left(\lambda(B_1 + B_2)\sqrt{\frac{\kappa(s+a)}{B}}\|h\|_2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (B_1 + B_2)\sqrt{\frac{\kappa(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)}{B}}\|h\|_2 \left(\rho\sqrt{\frac{\kappa}{B}}\|h\|_2 + \beta\eta \right) \right) \right) \\ & \quad + \frac{c_1\kappa}{2}\|h\|_2^2 + \frac{\kappa}{2c_1} \frac{\kappa\mu(s+a)}{2B}\|h\|_2^2 + B \left(\rho\sqrt{\frac{\kappa}{B}}\|h\|_2 + \beta\eta \right)^2. \end{aligned}$$

化简得

$$\|h\|_2 \leq \sqrt{\frac{K'_5}{K'_4}}\lambda + \sqrt{\frac{K'_6}{K'_4}}\eta,$$

其中

$$\begin{aligned} K'_4 & = 1 - \frac{c_1\kappa}{2} - \frac{\rho\kappa^2(B_1 + B_2)\sqrt{(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)}}{2c_1B(1 - \delta_{s+a})} - \frac{\kappa^2\mu(s + a)}{4c_1B} - \rho^2\kappa \\ & \quad - \frac{c_2\kappa(B_1 + B_2)\sqrt{\kappa(s + a)}}{4c_1\sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})} - \frac{c_3\kappa\beta(B_1 + B_2)\sqrt{\kappa(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)}}{4c_1\sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})} - c_3\rho\beta\sqrt{\kappa B}, \\ K'_5 & = \frac{\kappa(B_1 + B_2)\sqrt{\kappa(s + a)}}{4c_1c_2\sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})}, \\ K'_6 & = \frac{\kappa\beta(B_1 + B_2)\sqrt{\kappa(1 + \delta_{s+a})(1 + \delta_b)}}{4c_1c_3\sqrt{B}(1 - \delta_{s+a})} + B\rho^2 + \frac{\rho\beta\sqrt{\kappa B}}{c_3}. \end{aligned}$$

假设 $K'_4 > 0$. 同理, 当 $c_1^* = \sqrt{\frac{\rho\kappa(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)}}{B(1-\delta_{s+a})}} + \frac{\kappa\mu(s+a)}{2B}$ 时, $K'_4 > 0$ 等价于

$$\kappa^3\mu(s+a)(1-\delta_{s+a}) + 2\rho\kappa^3(B_1+B_2)\sqrt{(1+\delta_{s+a})(1+\delta_b)} < 2B(1-\rho^2\kappa)^2(1-\delta_{s+a}).$$

综合以上两种噪声情形, 定理 3.2 得证. $\square$

4 数值实验

为了验证本文的模型对信号的重构能力, 我们进行了相关的数值实验. 这里利用交替方向乘子法 (alternating direction method of multipliers, ADMM)^[27] 来求解模型 (3.3) (参见文献 [16]). ADMM 将大的全局问题分解为多个较小、较易求解的局部子问题, 每个子问题都有闭式解, 通过求解子问题进而得到大的全局问题的解. 给定框架 $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ 和 $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$, 存在许多对偶框架, 这里只考虑它们的标准对偶框架 $\bar{D}_1 = (D_1 D_1^*)^{-1} D_1$ 和 $\bar{D}_2 = (D_2 D_2^*)^{-1} D_2$. 令 $B = A\Phi\bar{\Psi}^*$. 对于模型 (3.3), 将它改写成 ADMM 的形式:

$$\min_{w,f} g(w) + h(f) \quad \text{s.t.} \quad \bar{\Psi}^* f - w = \mathbf{0}, \quad (4.1)$$

其中, $g(w) = \lambda(\|w\|_1 - \alpha\|w\|_2)$, $h(f) = \frac{1}{2}\|Bf - y\|_2^2$. 引入 Lagrange 乘子 v , 问题 (4.1) 的增广 Lagrange 表达式为

$$\mathcal{L}_\rho(w, f; v) = \lambda(\|w\|_1 - \alpha\|w\|_2) + \frac{1}{2}\|Bf - y\|_2^2 + \frac{\rho}{2}\|\bar{\Psi}^* f - w\|_2^2 + \langle v, \bar{\Psi}^* f - w \rangle, \quad (4.2)$$

其中 $\rho > 0$. 算法的迭代过程表示为

$$\begin{cases} w_{i+1} = \arg \min_w \mathcal{L}_\rho(w, f_i; v_i), \\ f_{i+1} = \arg \min_f \mathcal{L}_\rho(w_{i+1}, f; v_i), \\ v_{i+1} = v_i + \rho(\bar{\Psi}^* f_{i+1} - w_{i+1}). \end{cases} \quad (4.3)$$

为了求解 (4.3) 的 w -子问题, 下面介绍一个临近点算子的结果. 文献 [22, 命题 7.1] 和 [23, 第 2 节] 给出 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 临近点算子

$$\text{Prox}_{\lambda(\ell_1 - \alpha\ell_2)}(b) = \arg \min_x \frac{1}{2}\|x - b\|_2^2 + \lambda(\|x\|_1 - \alpha\|x\|_2), \quad \lambda > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

在某些特殊情形下具有闭式解. (4.3) 中 w -子问题有如下的闭式解:

$$w_{i+1} = \text{Prox}_{\frac{\lambda}{\rho}(\ell_1 - \alpha\ell_2)}\left(\bar{\Psi}^* f_i + \frac{v_i}{\rho}\right). \quad (4.4)$$

接下来, (4.3) 中 f -子问题有如下的闭式解:

$$f_{i+1} = (B^* B + \rho\bar{\Psi}\bar{\Psi}^*)^{-1} \left(B^* y + \rho\bar{\Psi} \left(w_{i+1} - \frac{v_i}{\rho} \right) \right), \quad (4.5)$$

其中 $(B^* B + \rho\bar{\Psi}\bar{\Psi}^*)$ 的逆由 Woodbury 矩阵恒等式^[14] 计算. 算法 1 是求解问题 (4.1) 的具体算法.

算法 1 基于 $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化的 ADMM

输入: A 、 D_1 、 D_2 、 y 、 α ($0 < \alpha \leq 1$)、 λ 、 ρ 、Tol 和 Maxiter.

初始化: $(w, f; v) = (w_0, f_0; v_0)$, $i = 0$.

步骤 1: 若 $i < \text{Maxiter}$, 进行步骤 2-5.

步骤 2: 通过 (4.4) 计算 w_{i+1} .

步骤 3: 通过 (4.5) 计算 f_{i+1} .

步骤 4: 更新变量 $v_{i+1} = v_i + \rho(\bar{\Psi}^* f_{i+1} - w_{i+1})$.

步骤 5: 若 $(\|f_{i+1} - f_i\|_2) / \|f_i\|_2 < \text{Tol}$, 则输出 f_{i+1} . 否则 $i := i + 1$, 转步骤 1.

在算法中, 设置了最大迭代数 $\text{Maxiter} = 1,000$ 和误差容限 $\text{Tol} = 10^{-6}$. 在实验部分, 取 $m = 128$, $n = 256$, 测量矩阵 $A \in \mathbb{R}^{128 \times 256}$ 为 Gauss 随机矩阵. 考虑 D_1 和 D_2 是紧框架的情形, 即 $\bar{D}_1 = D_1$, $\bar{D}_2 = D_2$, 其中 D_1 和 D_2 分别由 $n \times d_1$ 和 $n \times d_2$ 的离散余弦变换 (discrete cosine transform, DCT) 字典生成, 这里 $d_1 = d_2 = 512$. 在线性测量 $y = A\Phi\Psi^* f + e$ 中, 设定噪声矢量 e 是服从均值为 0、方差为 0.05 的 Gauss 分布. 原始信号 f 由 $f = \Phi x$ 合成, 其中 $x \in \mathbb{R}^{1024}$ 是一个 s -稀疏信号. 在实验中, 考虑在稀疏度改变的情形下, $\ell_1 - \alpha\ell_2$ 最小化算法与 ℓ_1 最小化算法的恢复成功率 (见表 1) 和信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR) (见表 2) 的比较.

表 1 给出了 200 次独立实验算法成功率的比较. 如果重构信号 $\hat{f}$ 与原始信号 f 之间的相对误差 $\|\hat{f} - f\|_2 / \|f\|_2 \leq 10^{-2}$, 则认为本次重构成功, 成功率定义为成功模拟的实验次数除以实验的总次数.

表 1 算法的恢复成功率对比

算法	稀疏度						
	1	8	16	24	32	40	48
ℓ_1	1	1	0.96	0.65	0.06	0	0
$\ell_1 - 0.1\ell_2$	1	1	0.99	0.97	0.76	0.22	0.02
$\ell_1 - 0.3\ell_2$	1	1	0.99	0.96	0.77	0.20	0.01
$\ell_1 - 0.5\ell_2$	1	1	0.99	0.97	0.70	0.21	0.02
$\ell_1 - 0.7\ell_2$	1	1	0.99	0.97	0.69	0.18	0
$\ell_1 - 0.9\ell_2$	1	1	0.99	0.98	0.67	0.14	0
$\ell_1 - \ell_2$	1	1	0.99	0.98	0.66	0.15	0.01

表 2 算法的 SNR 对比

算法	稀疏度						
	1	8	16	24	32	40	48
ℓ_1	58.51	56.98	53.74	41.47	20.66	11.80	9.06
$\ell_1 - 0.1\ell_2$	59.07	58.01	56.64	53.32	45.89	28.76	15.36
$\ell_1 - 0.3\ell_2$	59.06	57.98	56.59	53.09	45.85	27.70	14.87
$\ell_1 - 0.5\ell_2$	59.08	57.99	56.35	53.11	44.71	27.54	15.04
$\ell_1 - 0.7\ell_2$	59.07	57.97	56.34	52.62	44.57	26.71	13.81
$\ell_1 - 0.9\ell_2$	59.09	57.92	56.23	52.43	43.97	25.89	13.59
$\ell_1 - \ell_2$	59.07	57.87	56.25	52.31	42.94	25.55	13.79

表 2 给出了相应的平均信噪比, 这里信噪比定义为 $\text{SNR}(\hat{f}, f) = 20 \log_{10}(\|f\|_2 / \|\hat{f} - f\|_2)$. 由表 1 可以看出, 当稀疏度较小时, 本文所提出的方法具有较高的成功率, 即算法对信号重构具有一定的鲁棒性; 当稀疏度较大时, 本文所提出的方法的成功率也明显高于 ℓ_1 最小化. 表 2 表明, 随着稀疏度的增加, SNR 逐渐减小; 但相同稀疏度的情形下, 本文所提出的方法的成功率高于 ℓ_1 最小化. 综上所述, $\ell_1 - \alpha \ell_2$ 最小化相对于 ℓ_1 最小化具有一定优势.

5 结论

本文研究了基于一般框架下 $\ell_1 - \alpha \ell_2$ 极小化的压缩数据分离问题, 考虑在较少的线性随机测量下分离多模态数据的不同子成分. 在已有的 ABP 算法和 ADS 算法的基础上, 本文提出了 $(\ell_1 - \alpha \ell_2)$ -SABP 算法和 $(\ell_1 - \alpha \ell_2)$ -SADS 算法, 并得到了保证压缩数据稳定重建的充分条件. 最后, 通过一些实验来测试算法 1. 数值实验表明, 该算法具有较好的重构效果.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见, 感谢李朋老师在数值实验上给予的指导.

参考文献

- 1 Cai T T, Wang L, Xu G W. Shifting inequality and recovery of sparse signals. *IEEE Trans Signal Process*, 2010, 58: 1300–1308
- 2 Candès E, Tao T. The Dantzig selector: Statistical estimation when p is much larger than n . *Ann Statist*, 2007, 35: 2313–2351
- 3 Candès E J, Eldar Y C, Needell D, et al. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries. *Appl Comput Harmon Anal*, 2011, 31: 59–73
- 4 Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Rev*, 2001, 43: 129–159
- 5 Choe C G, Rim M G, Ryang J S. Sparse recovery with general frame via general-dual-based analysis Dantzig selector. *Asian-Eur J Math*, 2019, 12: 2050143
- 6 Christensen O. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Boston: Birkhäuser, 2003
- 7 Donoho D L. Compressed sensing. *IEEE Trans Inform Theory*, 2006, 52: 1289–1306
- 8 Donoho D L, Kutyniok G. Microlocal analysis of the geometric separation problem. *Comm Pure Appl Math*, 2013, 66: 1–47
- 9 Elad M, Milanfar P, Rubinstein R. Analysis versus synthesis in signal priors. *Inverse Problems*, 2007, 23: 947–968
- 10 Elad M, Starck J L, Querre P, et al. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (MCA). *Appl Comput Harmon Anal*, 2005, 19: 340–358
- 11 Eldar Y C, Kutyniok G. *Compressed Sensing: Theory and Applications*. New York: Cambridge University Press, 2012
- 12 Ge H, Li P. The Dantzig selector: Recovery of signal via $\ell_1 - \alpha \ell_2$ minimization. *Inverse Problems*, 2022, 38: 015006
- 13 Göbel W, Helmchen F. In vivo calcium imaging of neural network function. *Physiology*, 2007, 22: 358–365
- 14 Hager W W. Updating the inverse of a matrix. *SIAM Rev*, 1989, 31: 221–239
- 15 Haldar J, Hernando D, Liang Z. Compressed-sensing MRI with random encoding. *IEEE Trans Med Imaging*, 2011, 30: 893–903
- 16 Li P, Chen W, Ge H, et al. $\ell_1 - \alpha \ell_2$ minimization methods for signal and image reconstruction with impulsive noise removal. *Inverse Problems*, 2020, 36: 055009
- 17 Li P, Ge H, Geng P. Signal and image reconstruction with tight frames via unconstrained $\ell_1 - \alpha \ell_2$ -analysis minimizations. *Signal Process*, 2023, 203: 108755
- 18 Lin J H, Li S. Sparse recovery with coherent tight frames via analysis Dantzig selector and analysis LASSO. *Appl Comput Harmon Anal*, 2014, 37: 126–139
- 19 Lin J H, Li S, Shen Y. Compressed data separation with redundant dictionaries. *IEEE Trans Inform Theory*, 2013, 59: 4309–4315
- 20 Lin J H, Li S, Shen Y. New bounds for restricted isometry constants with coherent tight frames. *IEEE Trans Signal Process*, 2013, 61: 611–621
- 21 Liu Y, Mi T, Li S. Compressed sensing with general frames via optimal-dual-based ℓ_1 -analysis. *IEEE Trans Inform Theory*, 2012, 58: 4201–4214

- 22 Liu T, Pong T K. Further properties of the forward-backward envelope with applications to difference-of-convex programming. *Comput Optim Appl*, 2017, 67: 489–520
- 23 Lou Y, Yan M. Fast $L_1 - L_2$ minimization via a proximal operator. *J Sci Comput*, 2018, 74: 767–785
- 24 Ma T H, Lou Y, Huang T Z. Truncated ℓ_{1-2} models for sparse recovery and rank minimization. *SIAM J Imag Sci*, 2017, 10: 1346–1380
- 25 Majumdar A, Ward R K. Compressed sensing of color images. *Signal Process*, 2010, 90: 3122–3127
- 26 Mendelson S, Pajor A, Tomczak-Jaegermann N. Uniform uncertainty principle for Bernoulli and subgaussian ensembles. *Constr Approx*, 2008, 28: 277–289
- 27 Wang Y, Yin W, Zeng J. Global convergence of ADMM in nonconvex nonsmooth optimization. *J Sci Comput*, 2019, 78: 29–63
- 28 Wen J, Li D, Zhu F. Stable recovery of sparse signals via ℓ_p -minimization. *Appl Comput Harmon Anal*, 2015, 38: 161–176
- 29 Wright J, Ma Y, Mairal J, et al. Sparse representation for computer vision and pattern recognition. *Proc IEEE*, 2010, 98: 1031–1044
- 30 Yan L, Shin Y, Xiu D. Sparse approximation using $\ell_1 - \ell_2$ minimization and its application to stochastic collocation. *SIAM J Sci Comput*, 2017, 39: A229–A254
- 31 Yin P, Lou Y, He Q, et al. Minimization of ℓ_{1-2} for compressed sensing. *SIAM J Sci Comput*, 2015, 37: A536–A563
- 32 Zeng J, Lin S, Wang Y, et al. $L_{1/2}$ regularization: Convergence of iterative half thresholding algorithm. *IEEE Trans Signal Process*, 2014, 62: 2317–2329
- 33 Zhang R, Li S. Optimal RIP bounds for sparse signals recovery via ℓ_p minimization. *Appl Comput Harmon Anal*, 2017, 47: 566–584
- 34 Zhu C W. Stable recovery of sparse signals via regularized minimization. *IEEE Trans Inform Theory*, 2008, 54: 3364–3367
- 35 Zibulevsky M, Pearlmutter B A. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary. *Neural Comput*, 2014, 13: 863–882

Compressed data separation with general frames via $\ell_1 - \alpha\ell_2$ minimization

Wei Huang & Lingyu Li

Abstract In this paper, we deal with the problem of compressed data separation with general frames, i.e., the reconstruction of different subcomponents of multimodal data. Based on the existing ABP (the analysis basis pursuit) algorithm and ADS (the analysis Dantzig selector) algorithm, combining with $\ell_1 - \alpha\ell_2$ ($0 < \alpha \leq 1$) minimization, we propose the dual $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -split ABP algorithm and the dual $(\ell_1 - \alpha\ell_2)$ -split ADS algorithm. If two different components f_1 and f_2 of multimodal data are (approximately) sparse in terms of two different general frames $D_1 \in \mathbb{R}^{n \times d_1}$ and $D_2 \in \mathbb{R}^{n \times d_2}$, respectively, the two algorithms can ensure the stable recovery of the different subcomponents of the multimodal data when the measurement matrix satisfies a restricted isometry property and the frames satisfy a mutual coherence condition. Numerical experiments are carried out to show that our algorithm has a higher reconstruction success rate compared with ℓ_1 minimization.

Keywords compressed data separation, $\ell_1 - \alpha\ell_2$ minimization, restricted isometry property, dual frames, ℓ_1 -analysis

MSC(2020) 65T60, 90C25

doi: 10.1360/SSM-2021-0125