



非局部平面曲线流

献给姜礼尚教授 90 华诞

高来源¹, 郝瑞霞², 潘生亮^{2*}

1. 江苏师范大学数学与统计学院, 徐州 221116;

2. 同济大学数学科学学院, 上海 200092

E-mail: lygao@jsnu.edu.cn, 1710856@tongji.edu.cn, slpan@tongji.edu.cn

收稿日期: 2023-02-26; 接受日期: 2023-03-31; 网络出版日期: 2023-06-02; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 12071347) 资助项目

摘要 本文首先综述近年来关于平面曲线流 (尤其是非局部平面凸曲线流) 的一系列研究进展. 之后研究平面凸曲线的一个广义保面积流, 并证明在演化过程中, 演化曲线始终保持凸性, 并且长度递减, 最终当时间趋于无穷时, 演化曲线光滑收敛到一个圆周.

关键词 凸曲线 非局部曲率流 拟线性抛物方程

MSC (2020) 主题分类 53A04, 53E10, 35B40, 35K15

1 引言

近年来, 平面中闭曲线的曲率流引起了几何分析专家的广泛兴趣, 特别地, 带有非局部项的曲率流模型获得了细致而深入的理解. 本文在以往工作的基础上, 探讨平面凸曲线的一个广义的保面积流, 对该曲率流的全局存在性和高阶收敛性进行刻画. 为方便读者, 本文同时对近年来有关非局部平面曲线流的工作作简要的综述.

设 $X: S^1 \rightarrow \mathbb{E}^2$ 为单位圆周到 Euclid 平面的一个光滑的浸入映射, 该映射的像称为一条光滑闭曲线. 如果一条光滑闭曲线是嵌入的且在每点处曲线的相对曲率是正的, 则称该曲线为凸曲线. 本文主要介绍嵌入曲线 (特别是凸曲线) 的曲率流. 为了叙述的简洁性, 文中不区分映射 X 和它对应的像曲线.

1.1 研究背景

20 世纪 80 年代, Gage、Hamilton 和 Grayson 对平面曲线收缩流作了深入的研究, 证明了以他们的名字命名的 Gage-Hamilton-Grayson 定理 (参见文献 [15, 20, 25]), 即一条光滑嵌入的平面闭曲线, 在曲

英文引用格式: Gao L Y, Hao R X, Pan S L. Nonlocal plane curve flows (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 407–422, doi: 10.1360/SSM-2023-0043

线收缩流之下会演化成一条凸曲线, 之后演化曲线在有限时间内收缩成一个“圆点”. 由于 3 维 Euclid 空间中存在嵌入的哑铃形曲面被平均曲率流“撕开”成为两个连通分支, 每个分支都是带有奇点的曲面, 因此, 相对于高维的平均曲率流而言, 平面中的曲线收缩流具有独特的性质和研究价值. 这使得曲线的各种演化问题受到了几何分析专家们额外的关注. 例如, Chow 等^[12]、Chow 和 Tsai^[13] 建立了曲线扩张流模型, Zhu^[45]、Chou 和 Zhu^[9, 10] 发展了各项异性的曲线流理论, Sapiro 和 Tannenbaum^[40] 及 Terng 和 Wu^[41] 考虑了仿射曲线流. 此外, 高维 Euclid 空间中^[1, 2, 44]、曲面上^[4-6, 17, 18, 26, 29] 以及更一般的 Riemann 流形中^[32, 37] 的曲线流也受到关注, 取得了相应的研究结果.

除了上述的曲线收缩流工作外, 几何分析专家们还考虑了带非局部项的曲率流模型. 以平面内一条光滑的闭曲线 X_0 为初始曲线, Gage^[16] 研究了如下的非局部曲线流模型:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\kappa(\phi, t) - \frac{2\pi}{L(t)} \right) N(\phi, t), \quad (1.1)$$

其中, $X(\phi, t) : S^1 \times (0, \omega) \rightarrow \mathbb{E}^2$ 为一族闭的嵌入曲线, $X(\phi, 0) = X_0(\phi)$, $\kappa(\phi, t)$ 为曲线的相对曲率, $L(t)$ 为曲线的长度, $N(\phi, t)$ 则是曲线的单位内法向量. Gage 证明了当初始曲线 X_0 是凸曲线时, 曲率流 (1.1) 在时间区间 $[0, +\infty)$ 上有光滑解, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $X(\cdot, t)$ 按 C^∞ 度量收敛于一个半径等于 $\sqrt{\frac{A_0}{\pi}}$ 的圆周, 其中 A_0 是初始曲线所围区域的面积.

设 $X(\cdot, t)$ 为平面中一族光滑的嵌入闭曲线, 若该曲线族满足如下的演化方程:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \beta(\phi, t) N(\phi, t), \quad (1.2)$$

则演化曲线的等周差 $L^2(t) - 4\pi A(t)$ 满足

$$\frac{d}{dt}(L^2(t) - 4\pi A(t)) = -2L(t) \int \left(\kappa - \frac{2\pi}{L(t)} \right) \beta ds, \quad (1.3)$$

其中 ds 表示弧长微元. 因此在相差一个时间因子的情形下, Gage 保面积流为演化曲线等周差的梯度下降流. 注意到演化曲线的等周比 $\frac{L^2(t)}{4\pi A(t)}$ 在曲率流 (1.2) 之下满足

$$\frac{d}{dt} \frac{L^2(t)}{4\pi A(t)} = -\frac{L(t)}{2\pi A(t)} \int \left(\kappa - \frac{L(t)}{2A(t)} \right) \beta ds. \quad (1.4)$$

2008 年, Jiang 和 Pan^[28] 对凸曲线研究了如下的曲率流:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\kappa(\phi, t) - \frac{L(t)}{2A(t)} \right) N(\phi, t). \quad (1.5)$$

由上述讨论可知, 曲率流 (1.5) 在相差一个时间因子之下是等周比的梯度下降流. 他们证明了平面凸曲线 X_0 按照 (1.5) 演化可得一族光滑的凸曲线 $X(\cdot, t)$, 其中 $t \in [0, +\infty)$. 而且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 演化曲线 $X(\cdot, t)$ 收敛于一个圆周. 同年, Pan 和 Yang^[38] 研究了凸曲线的一个保长度流

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\frac{L(t)}{2\pi} - \frac{1}{\kappa(\phi, t)} \right) N(\phi, t), \quad (1.6)$$

并且证明了如果演化曲线在时间区间 $[0, +\infty)$ 上都是光滑的, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $X(\cdot, t)$ 收敛于与初值曲线具有相同长度的圆周. 接着, Ma 和 Cheng^[33] 对凸曲线考虑了一个保面积流

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\frac{1}{L(t)} \int \frac{1}{k(s, t)} ds - \frac{1}{\kappa(\phi, t)} \right) N(\phi, t), \quad (1.7)$$

Pan 和 Zhang^[39] 对凸曲线研究了一种扩张流

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\frac{2A(t)}{L(t)} - \frac{1}{\kappa(\phi, t)} \right) N(\phi, t). \quad (1.8)$$

他们证明了类似的结果, 即曲率流若全局存在, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时演化曲线收敛于一个圆周. 此后, Ma 和 Zhu^[34] 研究了凸曲线新的保长度流

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\kappa(\phi, t) - \frac{1}{2\pi} \int k^2(s, t) ds \right) N(\phi, t), \quad (1.9)$$

并证明了流 (1.9) 的全局存在性和收敛性.

2012 年, Lin 和 Tsai^[31] 观察到以上关于平面凸曲线的保面积流和保长度流具有统一的形式, 即对于指数 $\alpha > 0$, 凸曲线 $X(\cdot, t)$ 按照以下方程演化:

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = (\kappa^\alpha(\phi, t) - \lambda(t)) N(\phi, t) \quad (1.10)$$

或者

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(\lambda(t) - \frac{1}{\kappa^\alpha(\phi, t)} \right) N(\phi, t), \quad (1.11)$$

其中可以选择适当的非局部项 $\lambda(t)$ 使得曲线流 (1.10) 和 (1.11) 保持演化曲线的长度或所围区域的面积. 他们证明了若凸曲线按照 (1.10) 或 (1.11) 演化且演化曲线在任何有限时刻都不爆破, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $L^2(t) - 4\pi A(t) \rightarrow 0$. 同时, 他们借助 Green-Osher 不等式^[27] 和 Andrews 不等式^[3] 对一般的保长度或保面积流

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = (F(\kappa(\phi, t)) - \lambda(t)) N(\phi, t) \quad (1.12)$$

也作了部分探索. 2013 年, Mao 等^[35] 考虑了当 α 为正整数时形如 (1.10) 的保面积流, 证明了流的全局存在性和收敛性. 之后, Tsai 和 Wang^[43] 于 2015 年对一般的 $\alpha \in (0, +\infty)$, 考虑了形如 (1.10) 的保面积流和保长度流, 证明了流的全局存在性和收敛性. 在 2018 年 Tsai^[42] 的工作基础上, Gao 等^[22-24] 借助数值计算, 发现了凸曲线在保面积或保长度的曲率流 (1.11) 之下演化发生爆破的许多数值例子. 进一步地, 他们证明了凸曲线保面积或保长度的曲率流 (1.11) 如果发生爆破, 则必在有限时刻爆破; 如果曲率流全局存在, 则演化曲线当时间 $t \rightarrow +\infty$ 时收敛于圆周.

最近, Gao 和 Pan^[21] 对凸曲线考虑了较一般的保长度流 (1.12), 即

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(F(\kappa(\phi, t)) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{L(t)} F(\kappa(s, t)) \kappa(s, t) ds \right) N(\phi, t). \quad (1.13)$$

如果光滑函数 $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

- (1) F 是严格单调递增的, 即 $\forall u \in (0, +\infty)$, $F'(u) > 0$ 且 $\lim_{u \rightarrow 0^+} F'(u)u = 0$;
- (2) $\forall u > 0$, $F(u) > 0$ 且 $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$;
- (3) $F(u)$ 和 $F'(u)$ 满足

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{F'(u) \cdot u^2}{F(u)} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{F'(u) \cdot u^2}{F(u)} = +\infty,$$

则可以证明凸曲线的保长度流 (1.13) 全局存在且当 $t \rightarrow +\infty$ 时演化曲线收敛于圆周.

1.2 曲率流模型和主要结果

在上述工作基础上, 本文考虑平面凸曲线一般的保面积流

$$\frac{\partial X}{\partial t}(\phi, t) = \left(F(\kappa(\phi, t)) - \frac{1}{L(t)} \int_0^{L(t)} F(\kappa(s, t)) ds \right) N(\phi, t), \quad (1.14)$$

其中初始曲线 $X(\cdot, 0) = X_0$ 为一条光滑的凸曲线. 本文的主要结果为

定理 1.1 设初始曲线 X_0 为平面中一条光滑凸曲线, $F : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个光滑的正值函数并且

- (i) $F(u)/u$ 关于 u 严格递增;
- (ii) $F(u)$ 是 u 的凸函数;
- (iii) $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{F'(u) \cdot u^2}{F(u)} = 0$,

则曲率流 (1.14) 在时间区间 $[0, +\infty)$ 上存在, 保持演化曲线的凸性, 保持演化曲线所围区域的面积不变, 且当时间趋于无穷大时将 $X(\cdot, t)$ 形变成一个圆周.

注 1.1 定理 1.1 中的条件 (i) 和 (ii) 是 Lin 和 Tsai^[31] 建议的, 条件 (i) 连同 F 的正性意味着 $u \in (0, +\infty)$ 时,

$$F'(u) > 0. \quad (1.15)$$

这保证了演化方程的严格抛物性. 条件 (ii) 用于界定曲率流方程 (1.14) 中的非局部量. 联立条件 (i) 与 (iii) 可得

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} F'(u) \cdot u = 0. \quad (1.16)$$

条件 (iii) 是受到了文献 [21] 的启发, 该条件和极限式 (1.16) 在证明曲率流的全局存在性和收敛性的过程中发挥着重要的作用.

本文余下内容结构安排如下. 第 2 节给出广义保面积流 (1.14) 的全局存在性. 第 3 节证明当时间趋于无穷大时, 演化曲线收敛成一个圆周.

2 全局存在性

2.1 短时存在性

按照处理凸曲线的曲率流的通常方法, 可以给非局部流 (1.14) 增加一个切分量, 使之成为

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial t}(\phi, t) = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial F}{\partial s} T + (F - \lambda) N, & (\phi, t) \in S^1 \times (0, \omega), \\ X(\phi, 0) = X_0(\phi), & \phi \in S^1, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 (为了书写简洁) $\lambda = \lambda(t) = \frac{1}{L(t)} \int_0^{L(t)} F(\kappa(s, t)) ds$. 实际上, (2.1) 与 (1.14) 的解仅相差一个参数变换 (参见文献 [11, 命题 1.1]). 在曲率流 (2.1) 之下, 曲线的切向角 θ 与时间无关, 并且演化曲线的曲率满足

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \kappa^2 \left[F'(\kappa) \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + F''(\kappa) \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \right)^2 + F(\kappa) - \frac{1}{L(t)} \int_0^{2\pi} \frac{F(\kappa)}{\kappa} d\theta \right], \quad (2.2)$$

其中初值 $\kappa_0(\theta) = \kappa(\theta, 0) > 0$ 满足闭条件

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{\kappa_0(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{\kappa_0(\theta)} d\theta = 0. \quad (2.3)$$

方程 (2.2) 在其初值处的线性化是一个严格抛物方程, 因此由抛物方程的经典理论^[14, 30] 知, (2.2) 在小的时间区间上存在唯一的光滑解. 由于曲率决定曲线的形状, 因此就得到了曲率流 (2.1) 和 (1.14) 的短时存在性.

引理 2.1 在某个小的时间区间中, 曲率流 (2.1) 和 (1.14) 存在唯一的光滑解.

通过构造辅助函数以及使用极大值原理, 可以证明, 在曲率流 (2.1) 之下演化曲线总是一条严格凸的闭曲线. 因此, 以后都可以选取切向角 θ 作为曲线的参数.

引理 2.2 在曲率流 (2.1) 之下, 演化曲线总是凸的.

证明 由引理 2.1 知, 曲率流 (2.1) 在某个时间区间 $[0, \omega)$ 上有唯一解. 由演化曲线的连续性知, 在某个更小的时间区间上, 演化曲线是严格凸的. 假设存在 $t_0 \in (0, \omega)$ 使得 $X(\cdot, t)$ 在时间区间 $[0, t_0)$ 中都是凸曲线, 而 $\kappa_{\min}(t_0) := \min\{\kappa(\theta, t_0) \mid \theta \in [0, 2\pi]\} = 0$.

由解的连续性知, 存在正常数 M 使得 $\max\{\kappa(\theta, t) \mid \theta \in [0, 2\pi], t \in [0, t_0]\} \leq M$. 令

$$f(t) := \frac{\min_{\theta} \kappa_0(\theta)}{1 + F(M) \cdot \min_{\theta} \kappa_0(\theta)t},$$

则 $f(0) = \min_{\theta} \kappa_0(\theta) \leq \kappa_0(\theta)$ 且 $f'(t) = -F(M)f^2(t) \leq 0$.

定义 $g(\theta, t) := \kappa(\theta, t) - f(t) + \varepsilon t$, 其中 ε 是正常数, $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, t_0)$. 下面证明 $g(\theta, t) \geq 0$, $t \in [0, t_0)$. 采用反证法. 若不然, 则存在 $(\theta_1, t_1) \in [0, 2\pi] \times [0, t_0)$ 使得

$$g(\theta_1, t_1) = \min_{\theta} g(\theta, t_1) < 0 \quad \text{且} \quad \frac{\partial g}{\partial t}(\theta_1, t_1) \leq 0.$$

经计算 (利用 κ 的演化方程), 可得

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \kappa^2 \left[F'(\kappa) \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + F''(\kappa) \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \kappa^2 F(\kappa) - \kappa^2 \frac{1}{L} \int_0^L F(\kappa) ds + F(M)f^2(t) + \varepsilon.$$

因为

$$\begin{aligned} & \kappa^2 F(\kappa) - \kappa^2 \frac{1}{L} \int_0^L F(\kappa) ds + F(M)f^2(t) + \varepsilon \\ & \geq -\kappa^2 F(M) + F(M)f^2(t) + \varepsilon \\ & = \varepsilon t(\kappa + f(t))F(M) - F(M)(\kappa + f(t))g + \varepsilon, \end{aligned}$$

以及 $\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(\theta_1, t_1) \geq 0$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta_1, t_1) = 0$, 所以, 在 (θ_1, t_1) 处, 有 $\frac{\partial g}{\partial t}(\theta_1, t_1) \geq \varepsilon > 0$, 与假设矛盾.

又由 $\varepsilon > 0$ 的任意性可知, $\kappa(\theta, t) - f(t) \geq 0$, 从而, 对于任意 $\theta \in [0, 2\pi]$, 都有 $\kappa(\theta, t_0) \geq f(t_0)$ 成立. 故有

$$\kappa_{\min}(t_0) \geq f(t_0) > 0,$$

与假设 $\kappa_{\min}(t_0) = 0$ 矛盾, 从而完成该引理的证明. □

经直接计算可知, 演化曲线所围面积 $A(t)$ 和长度 $L(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= - \int_0^L \left(F(\kappa) - \frac{1}{L} \int_0^L F(\kappa) ds \right) ds = - \int_0^L F(\kappa) ds + \int_0^L F(\kappa) ds = 0, \\ \frac{dL}{dt} &= - \int_0^L \left(F(\kappa) - \frac{1}{L} \int_0^L F(\kappa) ds \right) \kappa ds = - \int_0^L F(\kappa) \kappa ds + \frac{2\pi}{L} \int_0^L F(\kappa) ds \leq 0,\end{aligned}$$

这里最后一步使用了 Andrews 不等式 [3]. 由此可知, 演化曲线的等周比

$$I(t) := \frac{L^2(t)}{4\pi A}$$

在曲率流 (2.1) 之下是递减的.

2.2 支撑函数的一致上下界

对于平面中的凸曲线, Bonnesen 不等式 [7, 8, 19, 36] 断言:

$$rL - A - \pi r^2 \geq 0, \quad r \in [r_{\text{in}}, r_{\text{out}}],$$

其中 r_{in} 和 r_{out} 分别为凸曲线 $X(\cdot, t)$ 的最大内切圆半径和最小外接圆半径. 于是易见,

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi} \leq r_{\text{in}} \leq r_{\text{out}} \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi A}}{2\pi}.$$

因此在曲率流 (2.1) 之下,

$$\frac{r_{\text{out}}(t)}{r_{\text{in}}(t)} \leq \frac{L(t) + \sqrt{L(t)^2 - 4\pi A}}{L(t) - \sqrt{L(t)^2 - 4\pi A}} = (\sqrt{I(t)} + \sqrt{I(t) - 1})^2 \leq (\sqrt{I(0)} + \sqrt{I(0) - 1})^2.$$

注意到 $r_{\text{out}}(t) \geq \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, 则有

$$r_{\text{in}}(t) \geq \sqrt{\frac{A}{\pi}} (\sqrt{I(0)} + \sqrt{I(0) - 1})^{-2} =: r_0 > 0. \quad (2.4)$$

选择初始凸曲线 X_0 的某个最大内切圆的圆心作为原点 O . 令 E_0 为一个圆周, 其半径为 r_0 且圆心为 O . 令 E_0 按照如下的流收缩:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} = F(\hat{\kappa}) N_{\text{in}}, \\ E(\cdot, 0) = E_0, \end{cases} \quad (2.5)$$

其中 $\hat{\kappa}$ 是演化曲线 E 的曲率. 由极大值原理知, $E(\cdot, t)$ 是一族圆周, 其半径的演化方程为

$$\frac{dr(t)}{dt} = -F\left(\frac{1}{r(t)}\right).$$

令 $t_* := r_0 / (2F(\frac{2}{r_0}))$, 则可以证明

$$r(t) > \frac{r_0}{2}, \quad t \in [0, t_*).$$

假设存在 $\tilde{t} \in (0, t_*)$ 使得当 $t \in (0, \tilde{t})$ 时有 $r(t) > \frac{r_0}{2}$ 且 $r(\tilde{t}) = \frac{r_0}{2}$. 因为 F 递增, 于是

$$\frac{dr}{dt} > -F\left(\frac{2}{r_0}\right), \quad t \in [0, \tilde{t}),$$

从而

$$r(t) \geq r_0 - F\left(\frac{2}{r_0}\right)t.$$

由 $r(t)$ 的连续性知,

$$r(\tilde{t}) \geq r_0 - F\left(\frac{2}{r_0}\right)\tilde{t} > r_0 - F\left(\frac{2}{r_0}\right)t_* = \frac{r_0}{2},$$

这与前面 $\tilde{t}$ 的选取矛盾. 因此 $r(t) > \frac{r_0}{2}$ 对 $t \in [0, t_*)$ 都成立.

记 $T_1 = \min\{t_*, \omega\}$. 由比较原理知, 当 $t \in [0, T_1)$ 时, 圆周 $E(\cdot, t)$ 被曲线 $X(\cdot, t)$ 包围. 因此支撑函数 $p(\theta, t) := -\langle X(\theta, t), N(\theta, t) \rangle$ (相对于 O 点) 满足

$$p(\theta, t) \geq r(t) \geq \frac{r_0}{2} > 0, \quad t \in [0, T_1).$$

进一步地, $X(\cdot, t)$ 的长度 $L(t)$ 是递减的, 于是

$$p(\theta, t) \leq \frac{L(t)}{2} \leq \frac{L_0}{2},$$

其中 L_0 是初始曲线 X_0 的长度.

令 $\delta = \frac{r_0}{4}$, 则当 $t \in [0, T_1)$ 时, 支撑函数满足

$$2\delta \leq p(\theta, t) \leq \frac{L_0}{2}. \quad (2.6)$$

2.3 曲率的一致界限

引理 2.3 设曲率流 (2.1) 在时间区间 $[0, \omega)$ 上有光滑解, 则存在一个仅与初始曲线 X_0 和函数 F 有关但与 ω 无关的常数 M , 使得对于任意 $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \omega)$ 都成立下述估计:

$$\kappa(\theta, t) \leq M. \quad (2.7)$$

证明 当 $t \in [0, T_1)$ 时, 令

$$\varphi(\theta, t) := \frac{F(\kappa(\theta, t))}{p(\theta, t) - \delta},$$

则有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{p - \delta} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{F}{(p - \delta)^2} \frac{\partial p}{\partial \theta},$$

且

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{p - \delta} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{2}{(p - \delta)^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{F}{(p - \delta)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{2F}{(p - \delta)^3} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2.$$

由曲率的演化方程 (2.2) 知, 函数 F 满足

$$\frac{\partial F}{\partial t} = F' \kappa^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + F - \lambda(t) \right]. \quad (2.8)$$

支撑函数 p 的演化方程为

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda(t) - F. \quad (2.9)$$

因此可得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F' \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2F' \kappa^2}{p - \delta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{F' \kappa \varphi}{p - \delta} - \frac{\delta F' \kappa^2 \varphi}{p - \delta} - \frac{\lambda F' \kappa^2}{p - \delta} - \frac{\lambda \varphi}{p - \delta} + \varphi^2,$$

这里的计算使用了恒等式

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + p = \frac{1}{\kappa}.$$

将 φ 的演化方程重新写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= F' \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2F' \kappa^2}{p - \delta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\lambda F' \kappa^2}{p - \delta} - \frac{\lambda \varphi}{p - \delta} \\ &\quad + \frac{F' \kappa}{p - \delta} \left(1 - \frac{\delta}{2} \kappa \right) \varphi + \left(1 - \frac{\delta F' \kappa^2}{2F} \right) \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

由条件 (i) 知, $F(u)/u$ 关于 $u \in (0, +\infty)$ 递增, 于是 $F'(u) \cdot u \geq F(u)$. 因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &\leq F' \kappa^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{2F' \kappa^2}{p - \delta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\lambda F' \kappa^2}{p - \delta} - \frac{\lambda \varphi}{p - \delta} \\ &\quad + \frac{F' \kappa}{p - \delta} \left(1 - \frac{\delta}{2} \kappa \right) \varphi + \left(1 - \frac{\delta}{2} \kappa \right) \varphi^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

假设 $\varphi(\theta, t)$ 在点 (θ_*, t) 处关于 θ 取到最大值. 若

$$\varphi(\theta_*, t) > \frac{1}{\delta} F\left(\frac{2}{\delta}\right), \quad (2.12)$$

则利用支撑函数的上下界可得

$$F(\kappa(\theta_*, t)) = (p - \delta) \varphi(\theta_*, t) > \frac{p - \delta}{\delta} F\left(\frac{2}{\delta}\right) > F\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

因为 $F(u)$ 关于 u 是单调递增的, 所以当 (2.12) 成立时, 由上式有 $\kappa(\theta_*, t) > \frac{2}{\delta}$. 而当

$$1 - \frac{\delta}{2} \kappa(\theta_*, t) < 0 \quad (2.13)$$

时, (2.11) 意味着函数 $\varphi_{\max}(t) := \max\{\varphi(\theta, t) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ 一定单调递减. 由抛物方程的极大值原理知

$$\varphi(\theta, t) \leq \max \left\{ \max_{\theta} \varphi(\theta, 0), \frac{1}{\delta} F\left(\frac{2}{\delta}\right) \right\} =: C_1. \quad (2.14)$$

因此存在一个仅与初始曲线 X_0 和函数 F 有关的正数 C_1 使得当 $t \in [0, T_1)$ 时, 有

$$F(\kappa) \leq \left(\frac{L_0}{2} - \delta \right) C_1. \quad (2.15)$$

如果 $\omega = +\infty$, 则在每个小的时间区间 $[kT_1, (k+1)T_1)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 上单独考虑问题. 否则, 当 ω 是有限正数时, 可找到一个最小的正整数 n 使得 $nT_1 \leq \omega < (n+1)T_1$. 不论哪种情形, 由第 2.1 小节的讨论知, 在每个形如 $[kT_1, (k+1)T_1)$ 或者 $[nT_1, \omega)$ 的时间区间上, 可以选择适当的原点 O 使得演化曲线的支撑函数都有一致的上下界 (2.6), 且对上述的辅助函数 $\varphi(\theta, t)$ 使用极大值原理一样可以得到估计式 (2.15). 此时利用数学归纳法可证明 (2.15) 对 $t \in [0, \omega)$ 都成立.

再由条件 (i) 知, 当 $u > 1$ 时, 有 $F(u) > F(1)u$. F 是取正值的函数, 故

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty.$$

结合估计式 (2.15), 曲率 $\kappa(\cdot, t)$ 必有一个与时间无关的上界 $M := F^{-1}((\frac{L_0}{2} - \delta)C_1)$, $t \in [0, \omega)$. $\square$

由于 F 是凸函数, 利用 Jensen 不等式可得

$$\lambda(t) = \frac{1}{L(t)} \int_0^L F(\kappa) ds = \frac{\int_0^{2\pi} F(\kappa) \cdot \frac{1}{\kappa} d\theta}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa} d\theta} \geq F\left(\frac{\int_0^{2\pi} \kappa \cdot \frac{1}{\kappa} d\theta}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa} d\theta}\right) = F\left(\frac{2\pi}{L(t)}\right).$$

注意到 $L(t)$ 是递减的, 而 $F(u)$ 是递增的, 因此

$$F\left(\frac{2\pi}{L(t)}\right) \geq F\left(\frac{2\pi}{L(0)}\right).$$

从而存在一个不依赖于时间的正常数 $c_0 := F(\frac{2\pi}{L(0)})$, 使得当 $t \in [0, \omega)$ 时总有

$$\lambda(t) \geq c_0 > 0.$$

引理 2.4 存在一个仅与初始曲线 X_0 和函数 F 有关但与 ω 无关的正数 m 使得

$$\kappa(\theta, t) \geq m \quad (2.16)$$

对于任意 $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \omega)$ 都成立.

证明 当 $t \in [0, T_1)$ 时, 令

$$\psi := \frac{F}{\Delta - p},$$

其中 Δ 是满足 $\Delta \geq 2p$ 的正常数. 例如, 可以取 $\Delta = L(0)$. 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= F' \kappa^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{2F' \kappa^2}{\Delta - p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{F' \kappa \psi}{\Delta - p} + \frac{\Delta F' \kappa^2 \psi}{\Delta - p} - \frac{\lambda F' \kappa^2}{\Delta - p} + \frac{\lambda \psi}{\Delta - p} - \psi^2 \\ &= F' \kappa^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{2F' \kappa^2}{\Delta - p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\Delta F' \kappa^2 \psi}{\Delta - p} + \left(\frac{\lambda}{\Delta - p} - \frac{F' \kappa}{\Delta - p} - \frac{\lambda F' \kappa^2}{F} - \psi \right) \psi. \end{aligned}$$

由极限式 (1.16) 知, 存在一个常数 $u_1 > 0$ 使得当 $u \in (0, u_1)$ 时, 有

$$F'(u) \cdot u < \frac{c_0}{3} < \frac{\lambda}{3}.$$

由条件 (iii) 知, 存在一个常数 $u_2 > 0$ 使得当 $u \in (0, u_2)$ 时, 有

$$\frac{F'(u) \cdot u^2}{F(u)} < \frac{1}{3(\Delta - p)}.$$

假如 $\psi < \min\{\frac{c_0}{3L(0)}, \frac{F(\min\{u_1, u_2\})}{L(0)}\}$, 则 $\psi < \frac{c_0}{3L(0)} < \frac{\lambda}{3(\Delta-p)}$ 且

$$F(\kappa) < \frac{\Delta-p}{L(0)} F(\min\{u_1, u_2\}) < F(\min\{u_1, u_2\}).$$

又由于 $F(u)$ 递增, 所以 $\kappa < \min\{u_1, u_2\}$, 这样必有

$$\frac{\lambda}{\Delta-p} - \frac{F'\kappa}{\Delta-p} - \frac{\lambda F'\kappa^2}{F} - \psi > 0.$$

在此情形下, 函数 $\psi_{\min}(t) := \min\{\psi(\theta, t) \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$ 也是递增的. 由抛物方程的极大值原理知,

$$\psi_{\min}(t) \geq \min\left\{\min_{\theta \in [0, 2\pi]} \psi_0(\theta), \frac{c_0}{3L(0)}, \frac{F(\min\{u_1, u_2\})}{L(0)}\right\} =: C_2.$$

因此, 对于 $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, T_1]$ 有

$$F(\kappa(\theta, t)) \geq \frac{L_0}{2} C_2 > 0, \quad (2.17)$$

其中 L_0 和 C_2 都是与时间无关的常数.

通过与引理 2.3 中一样的讨论, 借助数学归纳法可以证明估计式 (2.17) 对所有 $t \in [0, \omega)$ 都成立. 由定理 1.1 的条件知, 当 $u \in (0, +\infty)$ 时, 正函数 $F(u)$ 单调递增 (参见注 1.1), 因此右极限 $\lim_{u \rightarrow 0^+} F(u) \geq 0$ 存在. 再由条件 (i) 知, $F(u)/u$ 关于 u 严格递增, 因此必有

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} F(u) = 0. \quad (2.18)$$

由 (2.17) 立即知道存在一个仅与初始曲线 X_0 和函数 F 有关但与 ω 无关的正数 $m := F^{-1}(\frac{L_0}{2} C_2)$, 使得 (2.16) 对于任意 $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \omega)$ 都成立. $\square$

2.4 全局存在性的证明

曲率函数的一致界限 $0 < m \leq \kappa \leq M$ 意味着存在与时间无关的常数 C_n 使得在曲率流 (2.1) 之下有

$$\left| \frac{d^n F}{du^n}(\kappa) \right| \leq \tilde{C}_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

同时存在与时间无关的常数 c_1 使得对一切 $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \omega)$, 下式都成立:

$$F'(\kappa(\theta, t)) \geq c_1. \quad (2.20)$$

有了这些铺垫就能证明曲率流 (2.1) 的全局存在性.

定理 2.1 曲率流 (2.1) 在时间区间 $[0, +\infty)$ 上存在.

证明 假设曲率流 (2.1) 在极大时间区间 $[0, \omega)$ 中存在, 其中 ω 是有限正数. 由引理 2.3 和 2.4 知, 曲率 κ 和 $F(\kappa)$ 在区域 $[0, 2\pi] \times [0, \omega)$ 上一致有界. 由下一节的引理 3.1 知, $|\frac{\partial F(\kappa)}{\partial \theta}|$ 在同一区域一致有界. 抛物方程的经典理论^[14, 30] 告诉我们, 高阶导数也满足 $|\frac{\partial^k F(\kappa)}{\partial \theta^k}|$ 在区域 $[0, 2\pi] \times [0, \omega)$ 上一致有界. 因此存在子列极限

$$F(\kappa(\theta, \omega)) := \lim_{t_i \uparrow \omega} F(\kappa(\theta, t_i)).$$

由 F 的演化方程知, 关于时间的导数 $\frac{\partial F}{\partial t}$ 在相应的区域上也一致有界. 利用文献 [42] 中的方法可以证明当 $t \rightarrow \omega$ 时 $F(\kappa(\theta, t))$ 有极限. 由曲率流 (2.1) 解的存在唯一性定理知, 将此方程对时间积分可得一条光滑曲线 $X(\cdot, \omega)$.

令凸曲线 $X(\cdot, \omega)$ 沿着曲率流 (2.1) 演化. 借助流的短时存在性结果, 可以将曲率流 (2.1) 延长至更大的时间区间 $[0, \omega + \varepsilon)$ 上, 其中 $\varepsilon > 0$. 这与 ω 的极大性矛盾. $\square$

3 收敛性

第 2 节证明了曲率流 (2.1) 的全局存在性. 本节分别给出曲率函数和演化曲线当时间 t 趋于正无穷大时的收敛性. 以下记下标为相应的偏导数, 如 $F_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta}$.

3.1 曲率收敛

构造一个函数

$$Q(\theta, t) = F^2(\kappa(\theta, t)) + (F_\theta)^2, \quad (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty).$$

借助这个函数可以作 F 的梯度估计.

引理 3.1 对于函数 $Q(\theta, t)$ 有如下的估计:

$$\max_{[0, 2\pi] \times [0, t]} Q \leq \max \left\{ \max_{[0, 2\pi] \times [0, t]} F^2, \max_{[0, 2\pi] \times \{0\}} Q \right\}, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (3.1)$$

特别地, 存在一个仅依赖于初始曲线 X_0 的常数 $C > 0$, 使得

$$|F_\theta| \leq C, \quad \forall (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \infty). \quad (3.2)$$

证明 借助 F 的演化方程, 可得

$$\begin{aligned} Q_t &= 2FF'\kappa^2(F_{\theta\theta} + F - \lambda) \\ &\quad + 2F_\theta \left\{ \frac{F''}{F'} \kappa^2 F_\theta (F_{\theta\theta} + F - \lambda) + 2\kappa F_\theta (F_{\theta\theta} + F - \lambda) + F' \kappa^2 (F_\theta + F_{\theta\theta\theta}) \right\}. \end{aligned}$$

因为 $Q_\theta = 2F_\theta(F + F_{\theta\theta})$ 且 $Q_{\theta\theta} = 2F_{\theta\theta}(F + F_{\theta\theta}) + 2F_\theta(F_\theta + F_{\theta\theta\theta})$, 所以上述方程可写为

$$\begin{aligned} Q_t &= F' \kappa^2 Q_{\theta\theta} + \left(\frac{F''}{F'} \kappa^2 F_\theta + 2\kappa F_\theta \right) Q_\theta - 2F' \kappa^2 F_{\theta\theta} (F + F_{\theta\theta}) + 2FF' \kappa^2 (F + F_{\theta\theta}) \\ &\quad - \frac{2F''}{F'} \kappa^2 (F_\theta)^2 \lambda - 4\kappa (F_\theta)^2 \lambda - 2FF' \kappa^2 \lambda. \end{aligned} \quad (3.3)$$

记 $Q_{\max}(t) = Q(\theta(t), t)$. 固定 $t_0 > 0$, 令 $\sigma = \max_{S^1 \times [0, t_0]} F^2$. 在任何一个时刻 $t \in [0, t_0]$, 一旦 $Q_{\max}(t) > \sigma$, 在点 $(\theta(t), t)$ 处就立即有

$$Q_\theta = 2F_\theta(F + F_{\theta\theta}) = 0 \quad \text{且} \quad Q_{\theta\theta} \leq 0.$$

由于当 $Q(\theta(t), t) > \sigma$ 时, $F_\theta(\theta(t), t) \neq 0$, 于是 $F(\theta(t), t) + F_{\theta\theta}(\theta(t), t) = 0$. 进一步地, κ 、 $\lambda(t)$ 、 F 、 F' 和 F'' 都非负. 因此方程 (3.3) 意味着 $Q_t(\theta(t), t) \leq 0$. 借助极大值原理就有估计 (3.1), 再利用 F 的一致有界性即得估计 (3.2). $\square$

由于 $\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial \theta} / F'(\kappa)$, 注意到 (2.20) 和 (3.2), 导数 $\frac{\partial \kappa}{\partial \theta}$ 在区域 $[0, 2\pi] \times [0, \infty)$ 上一致有界, 从而 $\kappa(\theta, t)$ 关于 θ 等度连续. 由 (2.7) 和 (2.16) 知曲率函数一致有界, Arzelà-Ascoli 定理意味着存在收敛子列 $\kappa(\theta, t_i)$, 其中 t_i 趋于正无穷. 下面将证明 $\kappa(\theta, t)$ 实际上收敛于一个正常数 $\sqrt{\frac{\pi}{A}}$.

引理 3.2 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$\frac{dL}{dt}(t) \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

证明 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[- \int_0^{2\pi} F(\kappa) d\theta + \frac{2\pi}{L(t)} \int_0^{2\pi} \frac{F(\kappa)}{\kappa} d\theta \right] \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial t} d\theta + \frac{2\pi}{L} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{F}{\kappa^2} \frac{\partial \kappa}{\partial t} \right) d\theta \\ &\quad - \frac{2\pi}{L^2} \left[- \int_0^{2\pi} F(\kappa) d\theta + \frac{2\pi}{L(t)} \int_0^{2\pi} \frac{F(\kappa)}{\kappa} d\theta \right] \int_0^{2\pi} \frac{F(\kappa)}{\kappa} d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} F' \kappa^2 \left[F' \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + F'' \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \right)^2 + F(\kappa) - \lambda(t) \right] d\theta \\ &\quad + \frac{2\pi}{L} \int_0^{2\pi} F' \kappa \left[F' \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + F'' \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \right)^2 + F(\kappa) - \lambda(t) \right] d\theta \\ &\quad - \frac{2\pi}{L} \int_0^{2\pi} F \left[F' \frac{\partial^2 \kappa}{\partial \theta^2} + F'' \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \theta} \right)^2 + F(\kappa) - \lambda(t) \right] d\theta \\ &\quad + \frac{2\pi \lambda}{L} \left[\int_0^{2\pi} F(\kappa) d\theta - 2\pi \lambda \right]. \end{aligned}$$

借助分部积分可知, 上式右边的每一项都是有界的, 所以 $\frac{d^2 L}{dt^2}$ 有一个与时间无关的上界.

此外, $L(t)$ 是单调递减的, 而且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dL}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) - L(0) \geq -L(0),$$

于是立即可得 (3.4). □

引理 3.3 当时间趋于无穷大时, $\kappa(\theta, t)$ 收敛于一个正常数, 即

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa(\theta, t) = \sqrt{\frac{\pi}{A(0)}}. \quad (3.5)$$

证明 将一致收敛的子列 $\kappa(\theta, t_i)$ 代入 $L(t)$ 的演化方程中, 再令 t_i 趋于无穷, 并记

$$\lim_{t_i \rightarrow +\infty} \kappa(\theta, t_i) = \kappa_\infty(\theta),$$

可得

$$0 = - \int_0^{2\pi} F(\kappa_\infty(\theta)) d\theta + 2\pi \frac{\int_0^{2\pi} \frac{F(\kappa_\infty(\theta))}{\kappa_\infty(\theta)} d\theta}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\kappa_\infty(\theta)} d\theta}.$$

由 Andrews 不等式^[3]的取等情形知 $\kappa_\infty(\theta)$ 是一个常数.

将任一演化曲线 $X(\cdot, t)$ 平移成为一条包含原点的凸曲线 $\tilde{X}(\cdot, t)$, 则平移后得到的这些曲线位于有界区域 $B(O, \frac{L_0}{2})$ 中. 由经典的 Blaschke 选择定理 (参见文献 [11, 定理 3.1]) 知 $\tilde{X}(\cdot, t)$ 按照 Hausdorff 度量有一个收敛子列, 记为

$$\lim_{t_i \rightarrow +\infty} \tilde{X}(\cdot, t_i) := \tilde{X}_\infty(\cdot). \quad (3.6)$$

由于 $\tilde{X}(\cdot, t_i)$ 的曲率是 $\kappa(\cdot, t_i)$, 而 $\kappa(\cdot, t_i)$ 一致收敛于常函数 κ_∞ , 因此 $\tilde{X}_\infty(\cdot)$ 是一个圆周. 由曲率流的保面积性质可知 $\kappa_\infty(\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{A(\infty)}} = \sqrt{\frac{\pi}{A(0)}}$. 因此子列 $\kappa(\cdot, t_i)$ 当 $t_i \rightarrow +\infty$ 时收敛于常函数 $\sqrt{\frac{\pi}{A(0)}}$. 由收敛子列的任意性知, 曲率函数有极限 (3.5). $\square$

3.2 演化曲线收敛

如果流 (2.1) 的速率是指数衰减的, 那么演化曲线 $X(\cdot, t)$ 当时间趋于无穷时收敛到某个极限圆周. 本文最后来证明这个结论.

引理 3.4 当时间 t 充分大时, $\int_0^{2\pi} (\frac{\partial F}{\partial \theta})^2 d\theta$ 指数衰减.

证明 利用 F 的演化方程直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial t} d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \frac{\partial F}{\partial t} d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} F' \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + F - \lambda(t) \right) d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} F' \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta + \int_0^{2\pi} F' \kappa^2 \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{F''}{F'} \kappa^2 (F - \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta + 2 \int_0^{2\pi} \kappa (F - \lambda) \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

由极限 (3.5) 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} F'(\kappa) \kappa^2 = F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A}$$

以及

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (F(\kappa) - \lambda(t)) = 0.$$

于是, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_0 > 0$, 使得当 $t > T_0$ 时, 有 $|F - \lambda| < \varepsilon$ 且

$$F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A} - \varepsilon \leq F'(\kappa) \kappa^2 \leq F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A} + \varepsilon.$$

因此, 当 $t > T_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta &\leq - \left(F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A} - \varepsilon \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta \\ &\quad + \left(F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A} + \varepsilon \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \\ &\quad + \left(\frac{\tilde{C}_2}{c_1} M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \end{aligned} \quad (3.7)$$

利用 Wirtinger 不等式可得

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta \geq 4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 d\theta,$$

因此当 t 充分大时有

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right)^2 d\theta \geq (4 - \varepsilon) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \quad (3.8)$$

将 (3.8) 代入 (3.7), 可知对充分大的 t 有

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right) \leq \left((\varepsilon - 3)F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A} + 5\varepsilon + \frac{\tilde{C}_2}{c_1} M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon \right) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta.$$

选择 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ 充分小使得 $5\varepsilon + \frac{\tilde{C}_2}{c_1} M^2 \varepsilon + 2M\varepsilon < 2F'(\sqrt{\frac{\pi}{A}}) \frac{\pi}{A}$. 于是当时间 t 充分大时有

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \leq -F' \left(\sqrt{\frac{\pi}{A}} \right) \frac{\pi}{A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta.$$

因此 $\int_0^{2\pi} (\frac{\partial F}{\partial \theta})^2 d\theta$ 当时间 t 充分大时指数衰减. □

引理 3.5 当时间充分大时, 曲率流 (2.1) 的速率指数衰减.

证明 一方面, 利用 Sobolev 不等式, 有

$$|F - \lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} (F - \lambda)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

另一方面, 可作如下估计:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (F - \lambda)^2 d\theta &= \int_0^L (F - \lambda)^2 \kappa ds \leq M \int_0^L (F - \lambda)^2 ds \\ &= M \int_0^{2\pi} (F - \lambda)^2 \frac{L}{2\pi} d\xi \leq \frac{L}{2\pi} M \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \quad \left(\text{置 } \xi = \frac{2\pi s}{L} \right) \\ &= \frac{L}{2\pi} M \int_0^L \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right)^2 \frac{L^2}{4\pi^2} \frac{2\pi}{L} ds \leq \frac{L^2}{4\pi^2} M^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \\ &\leq \frac{L_0^2}{4\pi^2} M^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

因为当 t 充分大时 $\int_0^{2\pi} (\frac{\partial F}{\partial \theta})^2 d\theta$ 指数衰减, 所以 $|F - \lambda|$ 也指数衰减. □

定理 3.1 在曲率流 (2.1) 之下, 当时间趋于无穷时, 演化曲线收敛成一个圆周.

证明 当时间充分大时, 曲率流 (2.1) 的速率指数衰减, 因此将曲率流方程作积分就得到一条极限曲线 $X_\infty(\cdot) := X(\cdot, 0) + \int_0^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial t}(\cdot, t) dt$. 由引理 3.3 知, 极限曲线是一个圆周. □

最后, 结合定理 2.1、引理 3.3 和定理 3.1, 可以给出定理 1.1 的证明.

致谢 感谢张运涛副教授对本文的兴趣, 跟他的讨论使本文增色不少. 同时, 非常感谢审稿人对本文的评价意见.

参考文献

- 1 Altschuler S J. Singularities of the curve shrinking flow for space curves. J Differential Geom, 1991, 34: 491–514

- 2 Altschuler S J, Grayson M A. Shortening space curves and flow through singularities. *J Differential Geom*, 1992, 35: 283–298
- 3 Andrews B. Evolving convex curves. *Calc Var Partial Differential Equations*, 1998, 7: 315–371
- 4 Angenent S. Parabolic equations for curves on surfaces: Part I. Curves with p -integrable curvature. *Ann of Math (2)*, 1990, 132: 451–483
- 5 Angenent S. Parabolic equations for curves on surfaces: Part II. Intersections, blow-up and generalized solutions. *Ann of Math (2)*, 1991, 133: 171–215
- 6 Angenent S. Curve shortening and the topology of closed geodesics on surfaces. *Ann of Math (2)*, 2005, 162: 1187–1241
- 7 Bonnesen T. *Les Problèmes des Isopérimètres et des Isépiphanes*. Paris: Gauthier-Villars, 1929
- 8 Bonnesen T, Fenchel W. *Theorie der Konvexen Körper*. Berlin: Springer-Verlag, 1974
- 9 Chou K-S, Zhu X-P. Anisotropic flows for convex plane curves. *Duke Math J*, 1999, 97: 579–619
- 10 Chou K-S, Zhu X-P. A convexity theorem for a class of anisotropic flows of plane curves. *Indiana Univ Math J*, 1999, 48: 139–154
- 11 Chou K-S, Zhu X-P. *The Curve Shortening Problem*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001
- 12 Chow B, Liou L P, Tsai D-H. Expansion of embedded curves with turning angle greater than $-\pi$. *Invent Math*, 1996, 123: 415–429
- 13 Chow B, Tsai D-H. Geometric expansion of convex plane curves. *J Differential Geom*, 1996, 44: 312–330
- 14 Friedman A. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964
- 15 Gage M E. Curve shortening makes convex curves circular. *Invent Math*, 1984, 76: 357–364
- 16 Gage M E. On an area-preserving evolution equation for plane curves. In: *Nonlinear Problems in Geometry. Contemporary Mathematics*, vol. 51. Providence: Amer Math Soc, 1986, 51–62
- 17 Gage M E. Curve shortening on surfaces. *Ann Sci Éc Norm Supér (4)*, 1990, 23: 229–256
- 18 Gage M E. Deforming curves on convex surfaces to simple closed geodesics. *Indiana Univ Math J*, 1990, 39: 1037–1059
- 19 Gage M E. Positive centers and the Bonnesen inequality. *Proc Amer Math Soc*, 1990, 110: 1041–1048
- 20 Gage M E, Hamilton R S. The heat equation shrinking convex plane curves. *J Differential Geom*, 1986, 23: 69–96
- 21 Gao L Y, Pan S L. Evolving convex curves by a generalized length-preserving flow. *arXiv:2012.11549*, 2020
- 22 Gao L Y, Pan S L, Tsai D-H. On a length-preserving inverse curvature flow of convex closed plane curves. *J Differential Equations*, 2020, 269: 5802–5831
- 23 Gao L Y, Pan S L, Tsai D-H. Nonlocal flow driven by the radius of curvature with fixed curvature integral. *J Geom Anal*, 2020, 30: 2939–2973
- 24 Gao L Y, Pan S L, Tsai D-H. On an area-preserving inverse curvature flow of convex closed plane curves. *J Funct Anal*, 2021, 280: 108931
- 25 Grayson M A. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points. *J Differential Geom*, 1987, 26: 285–314
- 26 Grayson M A. Shortening embedded curves. *Ann of Math (2)*, 1989, 129: 71–111
- 27 Green M, Osher S. Steiner polynomials, Wulff flows, and some new isoperimetric inequalities for convex plane curves. *Asian J Math*, 1999, 3: 659–676
- 28 Jiang L S, Pan S L. On a non-local curve evolution problem in the plane. *Comm Anal Geom*, 2008, 16: 1–26
- 29 Johnson D L, Muraleetharan M. Singularity formation of embedded curves evolving on surfaces by curvature flow. *Int J Pure Appl Math*, 2010, 61: 121–146
- 30 Ladyženskaja O A, Solonnikov V A, Ural'ceva N N. *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*. Providence: Amer Math Soc, 1968
- 31 Lin Y-C, Tsai D-H. Application of Andrews and Green-Osher inequalities to nonlocal flow of convex plane curves. *J Evol Equ*, 2012, 12: 833–854
- 32 Ma L, Chen D Z. Curve shortening in a Riemannian manifold. *Ann Mat Pura Appl (4)*, 2007, 186: 663–684
- 33 Ma L, Cheng L. A non-local area preserving curve flow. *Geom Dedicata*, 2014, 171: 231–247
- 34 Ma L, Zhu A Q. On a length preserving curve flow. *Monatsh Math*, 2012, 165: 57–78
- 35 Mao Y Y, Pan S L, Wang Y L. An area-preserving flow for closed convex plane curves. *Internat J Math*, 2013, 24: 1350029
- 36 Osserman R. Bonnesen-style isoperimetric inequalities. *Amer Math Monthly*, 1979, 86: 1–29
- 37 Pan S J. Singularities of the curve shortening flow in a Riemannian manifold. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2021, 37: 1783–1793
- 38 Pan S L, Yang J N. On a non-local perimeter-preserving curve evolution problem for convex plane curves. *Manuscripta Math*, 2008, 127: 469–484
- 39 Pan S L, Zhang H. On a curve expanding flow with a non-local term. *Commun Contemp Math*, 2010, 12: 815–829

- 40 Sapiro G, Tannenbaum A. On affine plane curve evolution. *J Funct Anal*, 1994, 119: 79–120
- 41 Terng C-L, Wu Z W. n -dimension central affine curve flows. *J Differential Geom*, 2019, 111: 145–189
- 42 Tsai D-H. On flows that preserve parallel curves and their formation of singularities. *J Evol Equ*, 2018, 18: 303–321
- 43 Tsai D-H, Wang X-L. On length-preserving and area-preserving nonlocal flow of convex closed plane curves. *Calc Var Partial Differential Equations*, 2015, 54: 3603–3622
- 44 Yang Y Y, Jiao X X. Curve shortening flow in arbitrary dimensional Euclidian space. *Acta Math Sin (Engl Ser)*, 2005, 21: 715–722
- 45 Zhu X-P. Asymptotic behavior of anisotropic curve flows. *J Differential Geom*, 1998, 48: 225–274

Nonlocal plane curve flows

Laiyuan Gao, Ruixia Hao & Shengliang Pan

Abstract In this paper, we first survey some progress of plane curve flows (especially nonlocal convex curve flows) in recent years. Then we study a generalized area-preserving flow of convex curves. We prove that this flow keeps the convexity of the evolving curve and decreases its perimeter during the evolution process. Finally, as time goes to infinity, the evolving curve will converge smoothly to a circle.

Keywords convex curves, nonlocal curvature flow, quasilinear parabolic equation

MSC(2020) 53A04, 53E10, 35B40, 35K15

doi: 10.1360/SSM-2023-0043