最小支撑树博弈: 重新审视 Bird 配置

献给越民义教授 100 华诞

庄尔覃¹, 谭志斌^{1*}, 白云飞², 曹志刚^{1*}

1. 北京交通大学经济管理学院, 北京 100044;

2. 北京交通大学理学院, 北京 100044

E-mail: zhuangertan@bjtu.edu.cn, tanzhibin@bjtu.edu.cn, baiyunfei@bjtu.edu.cn, zgcao@bjtu.edu.cn

收稿日期: 2020-02-29; 接受日期: 2020-06-02; 网络出版日期: 2020-09-08; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 71922003, 71871009, 11471326 和 71961137005) 资助项目

摘要 最小支撑树博弈是合作博弈中的经典模型, 自 1973 年被 Claus 和 Kleitman 提出后持续得到学术界关注. 最小支撑树博弈不仅跟图论和组合优化中的最小支撑树问题一脉相承, 还在水网、电网和公路铁路网建设中的成本分摊问题中有重要应用. Bird 配置因其简洁性和直观性持续受到大量关注, 是最小支撑树博弈最著名的求解方案. 本文基于 Edmonds 对最小支撑树问题的线性规划表示, 利用对偶定理给出 Bird 配置一种新的等价公式. 本文还研究了最小支撑树博弈的一种推广, 即点加权的 minimum-cost spanning tree game, 并证明了 Bird 配置的一个变形依然在这个推广博弈的核中.

关键词 合作博弈 最小支撑树博弈 核 Bird 配置

MSC (2010) 主题分类 90C27, 91A80, 94C15

1 引言

博弈论的研究内容可以粗略划分为非合作博弈和合作博弈. 作为一个集合函数, 最一般的合作博弈显式表达需要的空间为参与人个数的指数量级, 因此通常很难进行深入分析和有效求解. 但是对于现实中很多具体的合作博弈, 由于有各种组合结构的存在, 不需要将相应的集合函数显式表达, 这就使得深入分析和有效计算求解成为可能. 这类博弈通常由一个组合优化问题决定, 所以称作组合优化博弈或带组合结构的合作博弈 (cooperative games on combinatorial structures)^[1,2]. 又由于这些组合优化问题通常在运筹学领域被研究, 因此这类博弈也称作运筹学博弈 (operations research games 或 operations management games)^[3]. 若相应的组合优化问题跟网络相关, 则此类博弈也称作网络合作博弈. 著名的网络合作博弈包括最大流博弈、网络选址博弈和最小支撑树博弈等^[4].

最小支撑树问题, 也称作最小生成树问题, 是图论和组合优化中的一个经典模型. 最小支撑树博弈来源于最小支撑树问题, 由 Claus 和 Kleitman^[5] 在 1973 年正式提出, 在水网、电网、公路铁路网建

英文引用格式: Zhuang E T, Tan Z B, Bai Y F, et al. Minimum-cost spanning tree games: Bird rule revisited (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1405–1416, doi: 10.1360/SSM-2020-0060

设中的成本分摊问题中有重要应用, 是一个经典的网络合作博弈. 求解最小支撑树博弈最著名的方案是 Bird^[6] 提出的 Bird 配置. Bird 配置被文献 [7] 证明属于核并且是核多面体的顶点. Bird 配置因其简洁性和直观性受到学术界大量关注并持续至今.

1.1 主要结果

研究最小支撑树博弈的其中一种思路是利用 Owen^[8] 提出的线性规划博弈或者线性生产博弈. 文献 [9] 通过将 Owen 的线性生产博弈推广为广义线性生产博弈, 基于 Edmonds^[10] 给出的最小支撑树问题的线性规划表示证明了最小支撑树博弈属于广义线性生产博弈. 由于广义线性生产博弈的核非空, 这给出了最小支撑树博弈核非空的一个新证明. 文献 [9] 还利用此方法证明了最小有向支撑树博弈核非空. 但是文献 [9] 使用的方法有两个明显缺陷: 第一, 由于约束个数是指数次的, 如何有效求解一个核分配方案是一个问题; 第二, 没有跟 Bird 配置建立联系, 没有给出 Bird 配置的线性规划解读.

文献 [11] 是利用线性规划研究最小支撑树博弈的另外一篇经典文献. 该文献用一个全新的 0-1 规划表示最小支撑树问题, 而该 0-1 规划线性松弛相对应博弈的核包含在原博弈的核中. 由于该线性松弛对应的博弈也是一个线性生产博弈, 而线性生产博弈的核非空, 所以最小支撑树博弈的核非空. 另外, 因为该线性松弛中变量的含义为其所对应的边是否在最小支撑树中, 约束也只有顶点数目的 3 次方量级, 所以可以在多项式时间内求解. 这解决了文献 [9] 方法的第一个缺陷. 另外, 文献 [11] 还指出该线性松弛对偶规划的一个贪婪解恰好对应 Bird 配置. 这解决了文献 [9] 使用方法的第二个缺陷.

本文发现, 基于 Edmonds^[10] 给出的最小支撑树问题的线性规划表示, 不利用广义线性生产博弈而是直接利用对偶理论, 依然可以给出 Bird 配置新的等价公式和直观解读. 由于 Edmonds 线性规划表示中的约束对应于点集, 所以其对偶规划的变量也对应于点集, 这就使得基于对偶规划最优解构造分配方案比线性生产博弈技术上更复杂. 我们利用线性规划的互补松弛定理解决了此困难.

我们还研究了最小支撑树博弈的一种自然推广, 即点加权的最小支撑树博弈. 我们证明了 Bird 配置的一个变形依然在这个推广博弈的核中. 这显示出了 Bird 配置这个经典方法的强大生命力.

1.2 文献综述

作为最小支撑树博弈领域最著名的分配方案, Bird 配置也存在一些缺点, 例如, 不满足成本单调性. 成本单调性指如果一个参与人与资源点或者其他参与人的部分连接成本上升, 那么该参与人分摊的成本不会下降. 为此, 学者们提出了一些新的更加合理的分配方案. Dutta 和 Kar^[12] 提出了满足成本单调性的 DK (Dutta-Kar) 配置. 他们在 Bird 配置基础上进行改进, 允许在利用 Prim 算法生成最小支撑树的过程中, 先被选中的参与人与随之被选中的参与人交换成本. DK 配置既满足成本单调性, 也在核中.

除了提出 Bird 配置, 文献 [6] 还引入了不可约核 (irreducible core) 这个概念. 不可约核等于不可约图相对应博弈的核, 而不可约图由一棵最小支撑树导出, 图中每条边的成本定义为该最小支撑树下这条边相对应两节点路中成本最大边的成本. 对于任意一个有该支撑树的图, 不可约核必是该图相对应博弈核的一个子集. 由不可约图导出的博弈是凸博弈 (convex game), 因此满足许多良好的性质.

另外一个重要的解称为 Folk 配置^[13], 即不可约图对应博弈的 Shapley 值. Folk 配置满足一系列性质, 特别是 Bird 配置所不具有的团结性 (solidarity)、人口单调性 (population monotonicity) 和成本单调性, 受到了广泛关注. 这里, 团结性指若最小支撑树的总成本上升, 则每人所分担的成本都不会下

降. 人口单调性指新加入一个参与人, 之前每个参与人所分担的成本都不会上升. 针对 Folk 配置的一些不足, 文献 [14, 15] 提出了改进的 Folk 配置方案, 即不可约图对应博弈的加权 Shapley 值. 该配置满足强成本单调性, 即若一个参与人与资源点或者其他参与人的部分连接成本上升, 那么该参与人分摊的成本也会上升. 文献 [16] 基于周期完全图 (cycle-complete graph) 提出了周期完全解 (cycle-complete solution). 在一个图里, 去掉一个节点及相关联的边可以得到一个新图. 周期完全图中每条边的成本定义为所有新图对应的不可约图中这条边的成本最大值. 周期完全解是周期完全图对应博弈的 Shapley 值, 同样满足强成本单调性.

文献 [17–19] 讨论了义务 (obligation) 配置, 该配置由 Kruskal 算法生成, 满足人口单调性. 文献 [20] 研究了有向图下的最小支撑树博弈. 文献 [21] 研究了存在冷漠参与人 (indifferent agents) 时的最小支撑树博弈. 冷漠参与人是指这些人没有意愿连接到资源点, 但是他们能帮助其他参与人减少连接到资源点的成本. 冷漠参与人的存在可能会使得相应博弈的核为空. 文献 [22] 给出了最小支撑树博弈核多面体所有的顶点, 并指出了最小支撑树博弈可能与指派博弈 (assignment games) 之间存在一定的联系. 文献 [23] 研究了最小支撑树问题中的机制设计问题, 发现如果使用 Folk 配置分担成本, 那么存在一个 Nash 均衡, 参与人都会真实报告自己的成本信息, 而使用 Bird 配置或者 DK 配置则不存在这样的均衡.

2 预备知识

本节主要介绍与合作博弈和最小支撑树博弈相关的预备知识.

2.1 合作博弈与核

效用可转移的合作博弈, 或者简称合作博弈, 经常用二元系统 (N, v) 表示, 其中 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 是有限的参与人集合, v 是 N 上满足 $v(\emptyset) = 0$ 的集合函数: $2^N \rightarrow \mathbb{R}$ (也称作特征函数). 对于任意 $S \subseteq N$, $v(S)$ 表示参与人联盟 S 合作可以产生的净利润或价值. 合作博弈论中研究的问题一般具有超可加性, 即对于任意不相交的 $S, T \subseteq N$ 都有 $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$. 超可加性意味着所有人一起合作形成大联盟 N 是全体成员最有效的结果. 合作博弈研究的核心问题是有效局面是否可以实现以及如何分配合作产生的利润或价值.

类似于非合作博弈中的囚徒困境, 超可加的合作博弈有可能无法实现最有效的合作局面. 考虑下面的例子:

$$N = \{1, 2, 3\}, \quad v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0, \quad v(\{1, 2\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 3\}) = 3, \quad v(N) = 4.$$

容易验证, 此博弈满足超可加性, 所以, 所有 3 个参与人一起合作形成大联盟 N 是最有效率的局面. 假设大联盟 N 形成且最终分配给 $i \in \{1, 2, 3\}$ 的利润为 x_i . 由于 1 和 2 合作可以获取利润 3, 显然分配给他们二人的利润总和不应该小于 3, 否则他们可以单独合作使得每人利润都增加, 即 $x_1 + x_2 \geq 3$. 同理, 最终的分配方案还应该满足 $x_2 + x_3 \geq 3$ 和 $x_1 + x_3 \geq 3$. 3 个不等式相加可得 $x_1 + x_2 + x_3 \geq 4.5$. 但是 3 人合作共得到利润 4, 小于 4.5, 因此不存在让所有小联盟都没有动机背叛的分配方案, 3 人完全合作的大联盟无法形成.

那么何时大联盟可以形成呢? 一般认为当且仅当核非空时大联盟可以形成. 核是合作博弈论中的

基本概念之一, 定义如下:

$$C(N, v) = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in S} \pi_i \geq v(S), \forall S \subseteq N; \sum_{i \in N} \pi_i = v(N) \right\}.$$

直观来讲, 核是满足下列条件的所有分配方案的集合:

- (1) 大联盟获得的所有利润恰好分配给所有人, 没有盈余也没有亏空;
- (2) 对于每一个小联盟, 分配给其中所有个体的利润总和不少于他们单独合作所获取的利润. 对于不同场景下的具体问题, 其核是否非空, 以及如何求解和计算核中的一个分配方案是合作博弈论研究的基本问题之一.

上面介绍的是利润形式的合作博弈及核的概念, 与此相平行的还有成本形式的合作博弈及相应的核. 此时一个博弈表示为 (N, c) , 其中 c 是 N 上满足 $c(\emptyset) = 0$ 的集合函数. 对于任意的联盟 $S \subseteq N$, $c(S)$ 代表的是 S 中参与人共同完成某项任务花费的成本. 一般假设 (N, c) 具有次可加性, 即对于任意不相交的 $S, T \subseteq N$ 都有 $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$. 次可加性意味着所有人一起合作形成大联盟 N 是对全体成员而言最有效的结果. 对于成本形式的合作博弈 (N, c) , 大联盟可以形成当且仅当下列定义的核 $C(N, c)$ 非空:

$$C(N, c) = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i \in S} \pi_i \leq c(S), \forall S \subseteq N; \sum_{i \in N} \pi_i = c(N) \right\}.$$

2.2 最小支撑树博弈

每个最小支撑树博弈是一个由加权无向网络 $G^0 = (N^0 \equiv N \cup \{0\}, E^0, (c_{ij})_{ij \in E^0})$ 导出的成本形式的合作博弈 (N, c) :

- N^0 是该无向图的节点集合, 其中 0 被称为资源点. G^0 中资源点 0 以外的节点为合作博弈中的参与人, 其集合记为 $N = \{1, 2, \dots, n\}$.
- E^0 是无向边的集合. E^0 中的元素通常记为 ij . 由于 G^0 是无向网络, 因此, $ij = ji$. 参与人集合 N 内部的无向边集合记为 E , 所以,

$$E^0 = E \cup \{0i : i \in N\}.$$

- 非负的 c_{ij} 是边 $ij \in E^0$ 上的权重, 代表建立 ij 这条边的成本.
- 对于任意联盟 $S \subseteq N$, $c(S)$ 定义为 G^0 中由节点集 $S \cup \{0\}$ 所诱导子图的最小支撑树的边成本之和.

2.3 Bird 配置

用 $T^* = (N^0, E^*)$ 表示 G^0 的一棵最小支撑树, 其中 $E^* \subseteq E^0$ 是该支撑树的边集. 我们把资源节点 0 看成是该树的根节点, 那么 N 中任何一个节点 i 在 T^* 中有唯一一条到资源点 0 的路. 我们把 i 在该路上离资源点 0 更近的点称为 i 的父亲节点, 记为 $f(i)$. 若 i 不是任何节点的父亲节点, 则称 i 为 T^* 的叶子节点. 给定 G^0 的一棵最小支撑树 $T^* = (N^0, E^*)$, Bird 配置 $(b_i)_{i \in N}$ 定义如下: 对于任意参与人 $i \in N$, 其分摊的成本定义为由他及其父亲节点构成边的权重, 即

$$b_i = c_{if(i)}. \quad (2.1)$$

文献 [6] 证明了 Bird 配置 $(b_i)_{i \in N}$ 在核中. Bird 配置直观、简洁且容易计算, 并且还在不可约核 $IC(N, c)$ 中. 这里, 不可约核 $IC(N, c)$ 定义为由不可约图 $G_t^0 = (N^0, E^0, (c_{ij}^t)_{ij \in E^0})$ 所导出的合作博弈 (N, c^t) 的核 $C(N, c^t)$. 在不可约图中, 每条边的成本 $c_{ij}^t = \max\{c_{kl}\} (kl \in p_{ij}^{T^*})$, 即为原图最小支撑树 T^* 中 i 与 j 之间唯一路 $p_{ij}^{T^*}$ 中成本最大边的成本. 由不可约图导出的合作博弈是凸博弈, 并且即使原图中最小支撑树不唯一, 根据不同最小支撑树导出的不可约图也相等.

3 Bird 配置的对偶解读

首先介绍如何利用线性规划求解 G^0 上的最小支撑树问题. 对于任意 $ij \in E^0$, 我们用 $x_{ij} = 1$ 代表该支撑树选中了边 ij , 用 $x_{ij} = 0$ 代表该支撑树没有选中边 ij . 那么 $(x_{ij})_{ij \in E^0}$ 对应的边集构成 G^0 的一棵支撑树当且仅当 (1) E^0 中有 n 条边被选中; (2) 对于任何 N^0 的真子集 S , 两个顶点都落在 S 中被选中边的个数不超过 $|S| - 1$. 所以, $(x_{ij}^*)_{ij \in E^0}$ 对应 G^0 的一棵最小支撑树当且仅当它是下面 0-1 规划的最优解:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{ij \in E^0} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{ij \in E^0} x_{ij} = n, \\ & \sum_{ij \in E^0: i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset N^0, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall ij \in E^0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Edmonds^[10] 证明了上述 0-1 规划等价于其线性松弛:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{ij \in E^0} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{ij \in E^0} x_{ij} = n, \\ & \sum_{ij \in E^0: i, j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset N^0, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall ij \in E^0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

上述线性规划的对偶规划为

$$\begin{aligned} \max \quad & ny_{N^0} + \sum_{S \subset N^0} (|S| - 1)y_S \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{S: S \supseteq \{i, j\}} y_S \leq c_{ij}, \quad \forall ij \in E^0, \\ & y_S \leq 0, \quad \forall S \subset N^0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

其中对于任意 $S \subseteq N^0$, y_S 是相应的对偶变量. 需要特别注意的是, 若 $S \neq N^0$, 则 $y_S \leq 0$; 但是 $y_{N^0} > 0$.

给定 $G^0 = (N^0, E^0)$ 上一棵以资源节点 0 为根节点的树 T^* . 下面是一个标准的偏序关系: 对于任意两个节点 $i, j \in N^0$, 若 j 是 i 的父亲节点, 或者 j 位于从 i 到资源点 0 的路上, 则称 i 小于 j (或 j 大于 i). 为给出本文的主要结果, 需借助下面符号.

定义 3.1 给定 $G^0 = (N^0, E^0)$ 上一棵以资源节点 0 为根节点的树 T^* , 对任意 $S \subseteq N^0$, 定义 S 的极大元为父亲节点不在 S 中的节点, 定义 $H^*(S)$ 为 S 中极大元的集合.

定理 3.1 假设 $(x_{ij}^*)_{ij \in E^0}$ 是线性规划 (3.2) 的整数最优解, 其对应的最小支撑树记为

$$T^* = (N^0, E^*),$$

对偶规划 (3.3) 的最优解记为 $(y_S^*)_{S \subseteq N^0}$, 那么下面公式定义的新分配方案 $(\pi_i)_{i \in N}$ 等价于 (2.1) 中的 Bird 分配方案:

$$\pi_i = \sum_{S \ni i: i \notin H^*(S)} y_S^*, \quad \forall i \in N. \quad (3.4)$$

证明 由于 $(x_{ij}^*)_{ij \in E^0}$ 是线性规划 (3.2) 的最优解, $(y_S^*)_{S \subseteq N^0}$ 是对偶规划 (3.3) 的最优解, 由互补松弛定理可知,

$$\left(\sum_{S: S \supset \{i, j\}} y_S^* - c_{ij} \right) x_{ij}^* = 0, \quad \forall ij \in E^0.$$

由此可知, 如果 $x_{ij}^* = 1$, 即边 ij 在最小支撑树 T^* 上, 那么,

$$\sum_{S: S \supset \{i, j\}} y_S^* - c_{ij} = 0, \quad (3.5)$$

即这条边的成本被拆分成了所有包含 ij 的节点集合 S 相对应的变量 y_S^* 的和. 注意 $y_{N^0}^*$ 一定是和式的一部分, 而且除它以外其余 y_S^* 都非正.

互补松弛定理还告诉我们:

$$\left(\left(\sum_{ij \in E^0: \{i, j\} \subset S} x_{ij}^* \right) - |S| + 1 \right) y_S^* = 0, \quad \forall S \subset N^0.$$

由此可知, 如果 $y_S^* < 0$, 那么,

$$\sum_{ij \in E^0: \{i, j\} \subset S} x_{ij}^* - |S| + 1 = 0,$$

即 T^* 在集合 S 上的诱导子图也是一棵树. 换句话说, 如果 T^* 在集合 S 上的诱导子图不是一棵树, 那么 $y_S^* = 0$. 所以, (3.4) 中和式可以只针对诱导子图为树的点集 S 求和. 我们把这样的点集记为 $\mathcal{S}_{T^*}$. 对于任意 $S \in \mathcal{S}_{T^*}$, 其在定义 3.1 下的极大元必定唯一, 即 $|H^*(S)| = 1$. 我们把其唯一的极大元记为 $h^*(S)$, 那么 (3.4) 可以简化为

$$\pi_i = \sum_{S \in \mathcal{S}_{T^*}: S \ni i, i \neq h^*(S)} y_S^*, \quad \forall i \in N. \quad (3.6)$$

为证明 (3.6) 就是 Bird 配置, 结合 (2.1) 和 (3.5), 只需证明

$$\sum_{S \in \mathcal{S}_{T^*}: S \ni i, i \neq h^*(S)} y_S^* = \sum_{S: S \supseteq \{i, f(i)\}} y_S^*. \quad (3.7)$$

由于不在 $\mathcal{S}_{T^*}$ 中的 S 都有 $y_S^* = 0$, 只需证明 $S \ni i, i \neq h^*(S)$, 当且仅当 $S \supseteq \{i, f(i)\}$. 这是显然的, 因为 i 不是 S 的极大元当且仅当它的父亲节点 $f(i)$ 也在 S 中. $\square$

4 最小支撑树博弈的推广: 节点加权

前面研究的模型为标准最小支撑树博弈. 特别地, 这是一个同质模型, 即所有非资源节点除网络位置外都相同. 本节考虑节点加权最小支撑树博弈. 这是一个更广泛的异质模型, 不同非资源节点对网络的容量需求可以不同. 例如, 更大的城镇会对电力和煤气等资源有更高的需求, 更大的小区会对带宽有更高的要求. 首先将标准最小支撑树问题推广为如下的节点加权最小支撑树问题, 然后在此基础上定义节点加权最小支撑树博弈.

定义 4.1 每个点加权最小支撑树问题由 $G_w^0 = (N^0 \equiv N \cup \{0\}, E^0, (c_{ij})_{ij \in E^0}, (w_i)_{i \in N})$ 表示, 其中 $N^0 \equiv N \cup \{0\}$, E^0 和 $(c_{ij})_{ij \in E^0}$ 与基本模型中的定义相同, 正整数 w_i 是节点 i 对网络的容量需求. 底图 (N^0, E^0) 的一个边加权子图 $(N^0, (x_{ij})_{ij \in E^0})$ 称为一个可行支撑网络当且仅当

- (i) 所有 x_{ij} 为非负整数;
- (ii) 对于每个非资源节点 $i \in N$ 都有至少一条从 i 到资源点 0 的路满足如下条件: 路上任何一条边 jk 的容量 x_{jk} 都不小于 w_i . 一个可行支撑网络是最优的当且仅当它最小化了总建设费用 $\sum_{ij \in E^0} c_{ij} x_{ij}$.

定义 4.1(ii) 实质上假设流量不可分割, 即不允许节点的容量需求由多条来自资源节点的路共同满足. 流量不可分的假设保证了最小化总建设费用的最优支撑网络依然是一棵树. 我们严格叙述这一点并证明如下:

引理 4.1 节点加权最小支撑树问题的最优支撑网络是一棵树.

证明 所有节点都必须与资源点相连意味着支撑网络必须连通. 假如该支撑网络不是一棵树, 那么至少存在一个圈. 容易证明, 将该圈上容量最小的边去掉以后依然可以满足所有节点的容量需求. 将此过程不断重复就可以得到一棵最小支撑树. $\square$

定义 4.2 给定一个点加权最小支撑树问题 $G_w^0 = (N^0 \equiv N \cup \{0\}, E^0, (c_{ij})_{ij \in E^0}, (w_i)_{i \in N})$, 定义点加权最小支撑树博弈为一个成本形式合作博弈 (N, c_w) , 其中 N 为非根节点的集合, 对于 N 的任意一个子集 S , $c_w(S)$ 为支撑 $S \cup \{0\}$ 的点加权最小支撑树相对应的总建设费用.

点加权最小支撑树博弈与标准的最小支撑树博弈有显著不同. 在该模型中, 为达到全局最优, 低容量需求的节点可能也不得不建立与资源节点相连的高容量网络. 此时 Bird 配置就不一定在核中. 例如, 与资源点直接相连的节点使用的边容量超出了它们需求, 那么根据 Bird 配置将这些修建费用分摊给这些节点就会使他们没有激励参与合作.

尽管如此, 本节将证明 Bird 配置的一个变形依然在相关合作博弈的核中. 为叙述此配置, 首先定义关键节点的概念.

定义 4.3 给定一个点加权最小支撑树问题 $G_w^0 = (N^0 \equiv N \cup \{0\}, E^0, (c_{ij})_{ij \in E^0}, (w_i)_{i \in N})$, 假设 $T = (x_{ij})$ 表示一棵以资源节点 0 为根节点的最小支撑树. 对于任意 $ij \in E^0, x_{ij} > 0$, i 为 j 在 T 中的父亲节点, 用 $D_T(ij)$ 代表满足下列条件节点 k 的集合: k 是 j 的子孙, 且 $w_k = x_{ij}$. 用 $C_T(ij)$ 表示 $D_T(ij)$ 中极大元的集合. 集合 $C_T(ij)$ 中的节点称为边 ij 在最小支撑树 T 中的关键节点.

显然, 若 j 为叶子节点, 则必有 $C_T(ij) = D_T(ij) = \{j\}$. 另外, 若 $j \in D_T(ij)$, 则必然有

$$C_T(ij) = \{j\}.$$

定义 4.4 点加权 Bird 配置定义如下: 给定一棵以资源节点 0 为根节点的点加权最小支撑树 $T = (x_{ij})$. 对于每条边 ij (i 为 j 的父亲节点), 其建设费用 $c_{ij} x_{ij}$ 用如下方式分摊:

(i) 若 $j \in C_T(ij)$, 显然, $C_T(ij) = \{j\}$, 即 $C_T(ij)$ 只包含唯一一个元素 j , 此时 ij 相关的费用 $c_{ij}x_{ij}$ 全部分摊给 j .

(ii) 若 $j \notin C_T(ij)$, 则把 $c_{ij}x_{ij}$ 中的一部分 $c_{ij}w_j$ 分摊给 j , 剩余部分 $c_{ij}(x_{ij} - w_j)$ 平均分摊给 $C_T(ij)$ 中的节点.

容易看出, 对于 w_i 永远为 1 的标准最小支撑树博弈, 点加权 Bird 配置恰好是经典的 Bird 配置, 因为我们永远有 $j \in D_T(ij)$, 从而 $C_T(ij) = \{j\}$. 为帮助读者更好地理解上述概念, 下面考虑图 1 中的例子. 对于 $ij \in \{13, 14, 25\}$, j 为叶子节点, 因此,

$$D_T(ij) = C_T(ij) = \{j\};$$

另外, $C_T(01) = \{3\}$, $C_T(02) = \{5\}$. 根据定义 4.4 可知, 点加权 Bird 配置中节点 1、2、3、4 和 5 分摊的费用分别为

$$b_1^* = c_{01}, \quad b_2^* = 2c_{02}, \quad b_3^* = 2c_{13} + c_{01}, \quad b_4^* = c_{14}, \quad b_5^* = c_{02} + 3c_{25}. \quad (4.1)$$

在证明点加权 Bird 配置在相应合作博弈 (N, c_w) 的核中之前, 首先考虑具有节点划分 (即联盟结构) 的最小支撑树博弈. 我们发现, 对于任意一个不加权的经典最小支撑树问题, 无论其节点以何种方式组成团体, 新得到的节点划分的最小支撑树博弈的核都非空. 此外, 在接下来证明节点加权网络的点加权 Bird 配置在相应合作博弈 (N, c_w) 核的过程中, 我们将节点加权的网络转化为节点划分的非加权网络.

具有节点划分的最小支撑树博弈不仅是研究节点加权最小支撑树博弈的技术关键, 而且现实生活中也经常出现这种具有节点划分的博弈: 一个城镇由多个村庄构成, 一个公司由多个分公司构成. 这些不同的村庄或不同的分公司都需要与资源节点建立连接. 由于城镇内部和总公司内部的财务一体化且成本可以在不同村庄或不同分公司间自由分配, 这些不同节点 (村庄、子公司) 组成的团体可以视为一个整体, 其内部合作节省的成本没必要计入不同城镇或不同公司之间的合作收益.

定义 4.5 给定一个最小支撑树博弈 $G^0 = (N^0 \equiv N \cup \{0\}, E^0, (c_{ij})_{ij \in E^0})$, 假设其导出的成本形式合作博弈为 (N, c) . 令 $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ 为节点集合 N 的一个划分, 即 $P_i \cap P_j = \emptyset, \forall 1 \leq i, j \leq m$, 以及 $\bigcup_{1 \leq i \leq m} P_i = N$. 定义一个新的合作博弈 $(M, c_{\mathcal{P}})$, 其参与人集合为 $M = \{1, 2, \dots, m\}$, 特征函数为

$$c_{\mathcal{P}}(D) = c\left(\bigcup_{i \in D} P_i\right), \quad \forall D \subseteq M.$$

图 1 一棵点加权的树形图. 相应参数如下: $w_1 = w_4 = 1$, $w_2 = w_3 = 2$, $w_5 = 3$, $x_{01} = x_{13} = 2$, $x_{14} = 1$, $x_{02} = x_{25} = 3$

合作博弈 $(M, c_{\mathcal{P}})$ 中大联盟可以形成当且仅当下面定义的核非空:

$$C(M, c_{\mathcal{P}}) = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^M \mid \sum_{i \in M} \sigma_i = c_{\mathcal{P}}(M); \sum_{i \in D} \sigma_i \leq c_{\mathcal{P}}(D), \forall D \subseteq M \right\}.$$

对于 $C(N, c)$ 中任何一个元素 π , 定义 $(M, c_{\mathcal{P}})$ 中的下列配置:

$$\sigma^{\pi} = (\sigma_i)_{i \in M} \equiv \left(\sum_{j \in T_i} \pi_j \right)_{i \in M},$$

即 $(M, c_{\mathcal{P}})$ 中任何参与人 $i \in M$ 所分摊的成本为相应团体 P_i 中的个体在 π 中所分摊的成本之和.

引理 4.2 如果 π 在原问题 (N, c) 的核中, 那么相应团体 P_i 中的个体在 π 中所分摊的成本之和也在新合作博弈 $(M, c_{\mathcal{P}})$ 的核中, 即

$$\{\sigma^{\pi} : \pi \in C(N, c)\} \subseteq C(M, c_{\mathcal{P}}). \quad (4.2)$$

证明 根据定义, 可得

$$\sum_{i \in N} \pi_i = c(N), \quad \sum_{i \in S} \pi_i \leq c(S), \quad \forall S \subseteq N.$$

所以,

$$\sum_{i \in M} \sigma_i^{\pi} = \sum_{i \in M} \pi(P_i) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in P_i} \pi_j = \sum_{i \in N} \pi_i = c(N) = c_{\mathcal{P}}(M).$$

另外, 对于任意的 $D \subseteq M$, 有

$$\sum_{i \in D} \sigma_i^{\pi} = \sum_{i \in D} \sum_{j \in P_i} \pi_j \leq \sum_{i \in D} c(P_i) = c\left(\bigcup_{i \in D} P_i\right) = c_{\mathcal{P}}(D).$$

这就证明了 (4.2) 成立. 由于标准的最小支撑树博弈核非空, 所以, (4.2) 的左侧非空, 从而右侧也非空. 这就证明了具有节点划分的最小支撑树博弈核非空. $\square$

下面证明点加权的 Bird 配置 b^* 在相应合作博弈 (N, c_w) 的核中. 此证明分下面几步.

(i) 我们将点加权的支撑树 T 转换成一棵点不加权但含更多节点的普通支撑树 T' . 此过程中, 我们会构造 T 中一些节点相伴随的虚拟节点.

(ii) 在 T' 基础上构造一个标准的最小支撑树问题 $G' = (N', E', (c_{i'j'})_{i', j' \in E'})$ 使得 T' 是 G' 的一棵最小支撑树.

(iii) 基于此 T' 可以给出一个 Bird 配置 b' , 此 b' 在 G' 导出的合作博弈 (N', c') 的核中.

(iv) 利用定义 4.5 研究的具有点划分的最小支撑树博弈, 我们将 N' 中来自 N 中同一节点的虚拟节点与原节点合并成一个团体. 根据引理 4.2 可知, 每个团体中个体在 b' 中分摊的成本加和以后就能得到原合作博弈 (N, c_w) 的一个核分配方案. 此核分配方案恰好是我们要证明的 b^* .

我们继续用图 1 中的例子来演示上述思想和构造. 由其转化而来的不加权的树如图 2 所示. 在此树中, $2'$ 、 $3'$ 、两个 $5'$ 及 3_1 和 5_2 为新构造的虚拟节点. Bird 配置分摊给相应节点的费用分别为

$$b_1 = b_{3_1} = c_{01}, \quad b_2 = b_{2'} = b_{5_2} = c_{02}, \quad b_3 = b_{3'} = c_{13}, \quad b_4 = c_{14}, \quad b_5 = b_{5'} = c_{25}. \quad (4.3)$$

容易验证

$$b_1^* = b_1, \quad b_2^* = b_2 + b_{2'}, \quad b_3^* = b_3 + b_{3'} + b_{3_1}, \quad b_4^* = b_4, \quad b_5^* = b_5 + 2b_{5'} + b_{5_2}. \quad (4.4)$$

图 2 由图 1 转化而来的不加权的树 (新构造的两类虚拟节点及相应的虚拟边用虚线表示)

定理 4.1 给定一个点加权的最小支撑树问题

$$G_w^0 = (N^0 \equiv N \cup \{0\}, E^0, (c_{ij})_{ij \in E^0}, (w_i)_{i \in N}),$$

点加权 Bird 配置 b^* 在相应合作博弈 (N, c_w) 的核中.

证明 根据前面的讨论, 分 4 步来证明.

(i) 将点加权的支撑树 T 转换成一棵点不加权但是含更多节点的普通支撑树 T' . 对于每个 $k \in N$, 构造两类可能的节点. (a) 若 $w_k \geq 2$, 则构造 $w_k - 1$ 个相同的虚拟节点 k' . 这些虚拟节点 k' 都只与 k 的父亲节点 $f(k)$ 相连, 没有子节点, 且新构造边的权重均为 $c_{kf(k)}$. (b) 若存在某个 $j \neq k$ 使得 $k \in C_T(ij)$, 即 k 是 j 的一个关键节点, 那么构造一个虚拟节点 k_j , 该节点只与 j 的父亲节点 i 相连, 没有子节点, 相应边的权重为

$$\frac{(x_{ij} - w_j)c_{ij}}{|C_T(ij)|}.$$

(ii) 在 T' 基础上构造一个经典最小支撑树问题 $G' = (N', E', (c'_{ij})_{i'j' \in E'})$. 该问题底图中包含的节点为原始节点 N^0 和新构造的两类虚拟节点, 边集 E' 为原始边集 E^0 和新构造的边. 旧边的权重不变, 新边的权重为 (i) 中所构造的权重. 由于这些新构造的虚拟叶子节点只有一个邻居, 所以很容易证明 T' 是 G' 的一棵最小支撑树.

(iii) 基于此 T' 可以给出一个 Bird 配置 b' . 由于这是一个经典的最小支撑树博弈, 所以, 该 b' 在 G' 导出的合作博弈 (N', c') 的核中.

(iv) 将 N' 中来自 N 中同一节点的两类虚拟节点与原节点合并成一个团体. 这样就有了一个关于 (N', c') 的节点划分的合作博弈. 容易看出将每个团体中个体在 b' 中分摊的成本加和就得到了分配方案 b^* . 由引理 4.2 可知, b^* 是原始合作博弈 (N, c_w) 的一个核分配方案. 这就证明了该定理. $\square$

5 结论

本文基于 Edmonds 对最小支撑树问题的线性规划表示, 利用对偶定理给出了 Bird 配置一种新的等价公式. 我们希望该等价公式有助于进一步理解 Bird 配置这个最小支撑树博弈的经典求解方案, 也有利于它在更加广泛的场景中应用和推广. 值得指出的是, 本文对该方法的解读并不完美. 特别地, 对偶变量 y_S 并没有给出一个直观的经济解释, 后面给出的点加权最小支撑树博弈的 Bird 配置也是基于原始定义而不是该对偶变量. 因此, 该对偶变量还需要将来更加深入的研究. 本文定义的点加权

Bird 配置与 Bird 配置一样, 比较简洁直观. 然而, 正如文献 [12] 对 Bird 配置所批评的一样, 点加权的 Bird 配置也不满足成本单调性, 因为对于权重都相同的标准模型, 点加权的 Bird 配置会退化为经典的 Bird 配置. 所以, 在点加权的最小支撑树博弈中如何寻找满足成本单调性且在核中的配置是一个有趣的问题.

在节点加权最小支撑树博弈中, 我们的结论严格依赖于不可分流的假设, 因为只有这样才能保证最优支撑网络是一棵树. 很明显的一个问题是, 我们并未给出该优化问题的求解算法, 而经典的破圈法和避圈法显然也都不再适用. 如果流量可分, 则问题可能会更加复杂, 因为此时最优支撑网络可能不是一棵树, 进而 Bird 配置很难推广. 另外, 本文研究中一直默认不同节点对同一条边的容量需求不是同时发生, 所以只要边容量等于节点最大容量需求即可. 文献 [11] 中考虑的流量需求同时发生的情形也值得进一步研究.

参考文献

- 1 Tijs S H. LP-games and combinatorial optimization games. *Cah Centre Detudes Rech Operationnelle*, 1992, 34: 167–186
- 2 Bilbao J M. *Cooperative Games on Combinatorial Structures*. Springer Science and Business Media. Boston-Dordrecht-London: Kluwer Academic Publishers, 2012
- 3 Borm P, Hamers H, Hendrickx R. Operations research games: A survey. *TOP*, 2001, 9: 139–199
- 4 Deng X, Fang Q. Algorithmic cooperative game theory. In: *Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria*. New York: Springer, 2008, 159–185
- 5 Claus A, Kleitman D J. Cost allocation for a spanning tree. *Networks*, 1973, 3: 289–304
- 6 Bird C G. On cost allocation for a spanning tree: A game theoretic approach. *Networks*, 1976, 6: 335–350
- 7 Granot D, Huberman G. Minimum cost spanning tree games. *Math Program*, 1981, 21: 1–18
- 8 Owen G. On the core of linear production games. *Math Program*, 1975, 9: 358–370
- 9 Granot D. A generalized linear production model: A unifying model. *Math Program*, 1986, 34: 212–222
- 10 Edmonds J. Paths, trees, and flowers. *Canad J Math*, 1965, 17: 449–467
- 11 Tamir A. On the core of network synthesis games. *Math Program*, 1991, 50: 123–135
- 12 Dutta B, Kar A. Cost monotonicity, consistency and minimum cost spanning tree games. *Games Econom Behav*, 2004, 48: 223–248
- 13 Bergantiños G, Vidal-Puga J J. A fair rule in minimum cost spanning tree problems. *J Econom Theory*, 2007, 137: 326–352
- 14 Norde H. The degree and cost adjusted folk solution for minimum cost spanning tree games. *Games Econom Behav*, 2019, 113: 734–742
- 15 Bogomolnaia A, Moulin H. Sharing a minimal cost spanning tree: Beyond the Folk solution. *Games Econom Behav*, 2010, 69: 238–248
- 16 Trudeau C. A new stable and more responsive cost sharing solution for minimum cost spanning tree problems. *Games Econom Behav*, 2012, 75: 402–412
- 17 Tijs S, Branzei R, Moretti S, et al. Obligation rules for minimum cost spanning tree situations and their monotonicity properties. *European J Oper Res*, 2006, 175: 121–134
- 18 Bergantiños G, Kar A. On obligation rules for minimum cost spanning tree problems. *Games Econom Behav*, 2010, 69: 224–237
- 19 Gómez-Rúa M, Vidal-Puga J. A monotonic and merge-proof rule in minimum cost spanning tree situations. *Econom Theory*, 2017, 63: 813–826
- 20 Dutta B, Mishra D. Minimum cost arborescences. *Games Econom Behav*, 2012, 74: 120–143
- 21 Trudeau C. Minimum cost spanning tree problems with indifferent agents. *Games Econom Behav*, 2014, 84: 137–151
- 22 Trudeau C, Vidal-Puga J. On the set of extreme core allocations for minimal cost spanning tree problems. *J Econom Theory*, 2017, 169: 425–452
- 23 Hougaard J L, Tvete M. Minimum cost connection networks: Truth-telling and implementation. *J Econom Theory*, 2015, 157: 76–99

Minimum-cost spanning tree games: Bird rule revisited

Ertan Zhuang, Zhibin Tan, Yunfei Bai & Zhigang Cao

Abstract Minimum-cost spanning tree (MCST) game is a classical model in the theory of cooperative games. The MCST game has been drawing continuous attention since it was raised by Claus and Kleitman in 1973. The MCST game is closely related to the MCST problem, a fundamental model in graph theory and combinatorial optimization, and has been widely applied in cost allocations for constructions of water networks, power networks, road networks and railway networks, etc. Due to its simplicity and intuitiveness, the Bird rule is one of the most famous solutions in the MCST game and has been extensively studied in the literature. Based on the linear programming formulation of the MCST problem by Edmonds, we provide a new equivalent closed-form formula for the Bird rule. We also study a generalization of the MCST game with weighted nodes. We show that the core is nonempty in the generalized model, and in particular, a modified Bird rule is proved to be still applicable.

Keywords cooperative game, minimum-cost spanning tree game, core, Bird rule

MSC(2010) 90C27, 91A80, 94C15

doi: 10.1360/SSM-2020-0060