



几何中的双曲性和基本群

献给中山大学建校百年暨中山大学数学学科建设 100 周年

陈兵龙

中山大学数学学院, 广州 510275

E-mail: mcsobl@mail.sysu.edu.cn

收稿日期: 2024-03-08; 接受日期: 2024-05-15; 网络出版日期: 2024-09-14

国家重点研发计划 (批准号: 2022YFA1005400) 和国家自然科学基金 (批准号: 12141106) 资助项目

摘要 围绕几何中的双曲性这一重要概念, 本文综述它与流形的基本群和 Euler 示性数等有关方面的一些最新研究进展.

关键词 双曲性 基本群 Euler 示性数

MSC (2020) 主题分类 53C50, 83C20

1 引言

双曲性是几何学中最重要概念之一. 由单值化定理可知, 任何一个亏格大于 1 的定向闭曲面都可以赋予一个常负 Gauss 曲率的 Riemann 度量. 换言之, 绝大部分的定向闭曲面都是双曲的. 另外, 从群论的角度看, 在 (给定生成元和关系个数的) 有限表现的离散群的集合中, 绝大部分的群都是 (Gromov 意义下的) 双曲群, 参见文献 [14, 15, 17].

事实上, 在几何学中, 有各种各样的双曲性概念.

本文先从熟知的 Riemann 几何出发. 如果一个 n 维紧致 Riemann 流形 (M, g) 的截面曲率有一个负的上界, 即 $K \leq -C$, $C > 0$, 则称它是双曲的.

关于双曲 Riemann 流形 (M, g) , 我们有一些熟知的结果:

- (1) M 的万有覆盖空间微分同胚于 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ (Cartan-Hadamard 定理);
- (2) M 的基本群 $\pi_1(M)$ 是双曲群.

由 Cartan-Hadamard 定理可知, (1) 对截面曲率非正 (不需要有负上界) 的流形都成立. 特别地, (1) 蕴涵了流形 M 的高阶同伦群为 0, 即

$$\pi_i(M) = 0, \quad i \geq 2.$$

受到二维情形启发, Hopf 提出如下猜测:

英文引用格式: Chen B-L. Hyperbolicities in geometry and fundamental groups (in Chinese). Sci Sin Math, 2024, 54: 2089–2098, doi: 10.1360/SSM-2024-0058

猜想 1.1 一个具有负截面曲率的偶数维紧致的 Riemann 流形 (M^n, g) 的带符号的 Euler 示性数 (signed Euler characteristic) 是正的, 即

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \chi(M^n) > 0.$$

当流形维数为 4 时, Chern [9] 证明了上述猜测是对的. 根据 Gauss-Bonnet-Chern 定理, Euler 示性数可以表示成某个曲率函数的积分, 在 4 维正截面曲率或负截面曲率情形, 该曲率函数逐点大于 0.

当维数大于 4 时, 有例子表明, 即使截面曲率为正, Gauss-Bonnet-Chern 被积项的代数表达式可能为正, 也可能为负 (参见文献 [10, 20]). 所以用直接验证被积函数的符号的方法在维数大于等于 6 时是失效的.

Atiyah [2] 的 L^2 指标定理指出, 假设有一个无限离散群 Γ 作用在非紧流形 $\tilde{X}$ 上, Γ 的作用没有不动点, 使得 $X = \tilde{X}/\Gamma$ 是紧致流形, 并且 Γ 与 $\tilde{X}$ 上某椭圆算子 $\tilde{D}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{F}$ 交换, 其中 $\tilde{E}$ 和 $\tilde{F}$ 是 $\tilde{X}$ 上两个向量丛. 换言之, $\tilde{D}$ 来自于 X 上某椭圆算子 $D: E \rightarrow F$ 的拉回,

$$E = \tilde{E}/\Gamma, \quad F = \tilde{F}/\Gamma.$$

给定 $\tilde{X}$ 一个 Γ 不变的体积元 $d\tilde{\mu}$ (来自于 X 上体积元 $d\mu$ 的拉回). 记

$$\mathcal{H}(\tilde{D}) = \ker \tilde{D} \cap L^2, \quad \mathcal{H}(\tilde{D}^*) = \ker \tilde{D}^* \cap L^2,$$

其中 $\tilde{D}^*: \tilde{F} \rightarrow \tilde{E}$ 是 $\tilde{D}$ 的伴随算子. 令 $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ 是 $\mathcal{H}(\tilde{D})$ 的一组单位正交基, 构造函数

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \sum_k |\phi_k(\tilde{x})|^2. \quad (1.1)$$

显然函数 $\tilde{f}(\tilde{x})$ 是 Γ -不变的, 因而 $\tilde{f}(\tilde{x})$ 是 X 上某光滑函数 $f(x)$ 的拉回. 定义 $\mathcal{H}(\tilde{D})$ 的 Γ -维数为

$$\dim_\Gamma \mathcal{H}(\tilde{D}) = \int_X f(x) d\mu. \quad (1.2)$$

同理可以定义 $\mathcal{H}(\tilde{D}^*)$ 的 Γ -维数, 并且定义 $\tilde{D}$ 的 Γ -指标为

$$\text{index}_\Gamma \tilde{D} = \dim_\Gamma \mathcal{H}(\tilde{D}) - \dim_\Gamma \mathcal{H}(\tilde{D}^*). \quad (1.3)$$

Atiyah 的 L^2 指标定理指出,

$$\text{index}_\Gamma \tilde{D} = \text{index}(D), \quad (1.4)$$

其中

$$\text{index}(D) = \dim(\ker(D)) - \dim(\ker(D^*))$$

是底流形 X 上椭圆算子 $D: E \rightarrow F$ 的指标.

一个经典情形是 $D = d + d^*$, $E = \Omega^{\text{even}} = \bigoplus \Omega^{2q}$ 为 X 上偶数次的微分形式丛,

$$F = \Omega^{\text{odd}} = \bigoplus \Omega^{2q+1}$$

为 X 上奇数次的微分形式丛, 此时 $\text{index}(D) = \chi(X)$. 如果在 $\tilde{X}$ 上有一些消没定理, 则可以期望应用 Atiyah 的 L^2 指标定理来计算 X 的 Euler 示性数. 这个方法在 Kähler 双曲情形获得了成功 (参见文

献 [16]). 不假设 Kähler 条件, 目前仅在特殊情形 (参见文献 [18]) 可以证明当 r 不等于实维数的一半时, $\mathcal{H}^r(\tilde{X}) = 0$, 其中 $\mathcal{H}^r(\tilde{X})$ 是 $\tilde{X}$ 上 L^2 可积的 r 次调和微分形式.

比 Hopf 猜测更一般的猜测如下 (属于 Singer):

猜想 1.2 任何一个偶数维紧致的 aspherical 流形 M (即 $\pi_i(M) = 0, i \geq 2$), 它的带符号的 Euler 示性数是非负的, 即

$$(-1)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}} M}{2}} \chi(M) \geq 0.$$

如果一个流形 M 的所有高阶同伦群都为 0, 即当 $i \geq 2$ 时, $\pi_i(M) = 0$, 则称它是 aspherical 的. 由 Cartan-Hadamard 定理可知截曲率 ≤ 0 的完备流形是 aspherical 的.

下面解释流形的单形体积和极小体积. 设 X 是一个拓扑空间. X 的一个奇异 p 单形就是一个连续映射: $\sigma: \Delta_p \rightarrow X$, 其中 $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ 是标准的 p 单形. $S_p(X)$ 是 X 中所有奇异 p 单形的集合. $C_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})$ 是以 $S_p(X)$ 为基底生成的自由交换群. 有一个自然的边界映射:

$$\begin{aligned} \partial_p: C_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) &\rightarrow C_{p-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), \\ \partial_p \sigma &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma \circ s_i, \end{aligned}$$

其中 $s_i: \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ 是从标准单形 Δ_{p-1} 到 Δ_p 的第 i 个面的自然映射. $(C_*^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), \partial)$ 是 X 的奇异链复型 ($\partial^2 = 0$).

$$H_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) = \ker\{\partial: C_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{p-1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z})\} / \partial(C_{p+1}^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}))$$

是 X 的 p 次奇异同调群. 如果用实数 $\mathbb{R}$ 作为系数, 可以定义 X 的实系数的奇异链复型 $(C_*^{\text{sing}}(X, \mathbb{R}), \partial)$ 以及对应的实系数的奇异同调群 $H_*^{\text{sing}}(X, \mathbb{R})$.

定义元素 $x = \sum_{\sigma \in S_p(X)} c_\sigma \sigma \in C_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{R})$ 的 l^1 范数如下:

$$\|x\|_1 = \sum_{\sigma \in S_p(X)} |c_\sigma|. \quad (1.5)$$

这诱导了 $H_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{R})$ 上一个半范. 对于一个同调 $\alpha \in H_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{R})$, 半范 $\|\alpha\|_1$ 定义为

$$\|\alpha\|_1 = \inf\{\|x\|_1: x \in C_p^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}), \partial x = 0, [x] = \alpha\}. \quad (1.6)$$

对于一个定向 n 维流形 M , 基本类 $[M] \in H_n^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z})$. 流形 M 的单形体积定义为

$$\|M\| := \|j([M])\|_1, \quad (1.7)$$

其中 $j: H_n^{\text{sing}}(M, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(M, \mathbb{R})$ 是自然映射.

一个流形 M 的极小体积 $\min(M)$ 的定义如下. 对于 M 上所有的截曲率介于 -1 与 1 之间的 Riemann 度量 g , 计算 (M, g) 的体积, 然后取下确界

$$\min(M) := \inf\{\text{vol}_g(M): -1 \leq K_g \leq 1\}. \quad (1.8)$$

下述猜测是很自然的:

猜想 1.3 任何一个偶数维紧致的 aspherical 流形 M^n , 如果它的单形体积 (simplicial volume) 或极小体积 (minimal volume) 大于 0, 则它的带符号的 Euler 示性数是正的, 即

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \chi(M^n) > 0.$$

为了研究负曲率流形, 如果能够“看到”它们 (像 Euclid 空间的凸超曲面一样), 将是非常有益的. 但是 Hilbert 等证明了, 即使是二维的单连通的完备非紧的 Gauss 曲率具有负上界的流形也不可能光滑地等距地嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中.

另外, 单连通完备常负曲率的 Riemann 流形可以实现为 Minkowski-Lorentz 空间的 (虚) 单位球 (两个连通分支中的一支).

引入如下定义:

定义 1.1 [8] 如果 Riemann 流形 (M, g) 上存在一个光滑的二阶对称协变张量 h 使得

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -[h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}], \\ \nabla_i h_{jk} &= \nabla_j h_{ik}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

则称 (M, g, h) 为类空流形 (spacelike manifold), 其中曲率张量 R_{ijkl} 的四指标的约定是要求对球面而言 $R_{ijij} > 0$ ($i \neq j$).

可以证明, 一个紧致的类空流形一定是 aspherical 的. 文献 [8] 证明了 Singer 猜想对类空流形是对的.

定理 1.1 [8] 设 (M^n, g, h) 为偶数维紧致类空流形, 那么它带符号的 Euler 示性数是非负的, 即 $(-1)^{\frac{n}{2}} \chi(M^n) \geq 0$, 等号成立当且仅当 M^n 的单形体积为 0 或极小体积为 0.

2 复几何中的双曲性

对一个复流形 X , 如果它的 Kobayashi 拟距离 (pseudo-distance) 是一个距离, 则称它为双曲的, 或者 Kobayashi 双曲的. X 是双曲的等价于任何从单位圆盘 Δ 到 X 的解析族 $f: \Delta \rightarrow X$ 都是正规族. 当 X 是紧致复流形时, Brody 证明 X 是双曲的当且仅当不存在从复平面 $\mathbb{C}$ 到 X 的非常数的解析映射 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ (参见文献 [21]). 如下是关于双曲复流形的一个著名猜想:

猜想 2.1 [21] 紧致的双曲的 Kähler 流形 (或射影代数流形) 的典则线丛 (canonical line bundle) 是丰富的.

猜想 2.1 目前还没有解决.

反之, Green 和 Griffiths [13] 及 Lang [22] 猜测, 如果 X 是一般型 (general type) 射影代数流形, 则 X 存在一个真的子族 $Y \subsetneq X$, 使得任何整解析曲线 $f: \mathbb{C} \rightarrow X$ 必须包含在 Y 中. Lang [22] 猜测一个射影代数流形是双曲的当且仅当它以及它所有的子族都是一般型的.

由 Schwarz 引理可知, 如果该复流形的解析截面曲率有一个负上界, 则该流形一定是双曲的. 下面的结果是非常引人注目的:

定理 2.1 设 (X, g) 是具有负的解析截面曲率的紧致 Kähler 流形, 则它的典则线丛是丰富的.

当 X 是射影流形时, 上述定理是 Wu 和 Yau [27] 证明的. 一般的 Kähler 情形是 Tosatti 和 Yang [25] 证明的.

Gromov [16] 引进了关于 Kähler 流形的一个基于拓扑的双曲性概念.

定义 2.1 ^[16] 设 (M, ω) 是紧致的 Kähler 流形, 如果在 M 的万有覆盖 $\tilde{M}$ 上, 将 Kähler 形式 ω 拉回到 $\tilde{M}$ 上的 Kähler 形式 $\tilde{\omega}$ 是正合的, $\tilde{\omega} = d\eta$, 并且 η 是 $\tilde{M}$ 上一个有界的 1- 形式, 则称它是 Kähler 双曲的.

设 (X, ω) 是紧致的 Kähler 双曲流形, 实维数为 n . 在 X 的万有覆盖 $\tilde{X}$ 上, Gromov 证明了如下结果:

- (i) $\mathcal{H}_{L^2}^r(\tilde{X}) = \{0\}$, 对所有 $r \neq \frac{n}{2}$ 成立;
- (ii) $\mathcal{H}_{L^2}^{p,q}(\tilde{X}) \neq \{0\}$, 对所有 $p+q = \frac{n}{2}$ 成立.

结合 Atiyah 的 L^2 指标定理, Gromov 证明了对 Kähler 双曲流形有 $(-1)^{\frac{n}{2}} \chi(X) > 0$.

Gromov ^[16] 提出问题: 是否一个 Kähler 双曲流形的典则线丛是丰富的. 答案是肯定的.

定理 2.2 ^[6] 一个紧致的 Kähler 双曲流形的典则线丛是丰富的.

定理 2.3 ^[6] 一个紧致的 Kähler 流形, 如果它同伦于一个具有负截面曲率的 Riemann 流形, 则它的典则线丛是丰富的.

定理 2.2 和 2.3 中流形的任何复子流形都容许一个具有负常数的 Kähler-Einstein 度量.

定理 2.4 ^[6] 设 (X, ω) 是一个紧致辛流形, 它同伦于一个具有负截面曲率的 Riemann 流形. 则任何与 ω 相容的近复结构 J 都是 (Kobayashi) 双曲的, 即任何复平面 $\mathbb{C}$ 到 X 的 J - 解析映射都是常值映射.

Gromov ^[16] 启发我们有如下问题. 设 M 是一个紧流形, $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ 是 M 的万有覆盖, ω 是 M 上一个 2- 形式, 使得 $\pi^*\omega$ 是正合的, 即 $\pi^*\omega = d\eta$ 对某个 1- 形式 η 成立. 注意到使得 $\pi^*\omega = d\eta$ 成立的 1- 形式 η 有很多, 例如 $\eta + df$ 也成立, 其中 f 是 $\tilde{M}$ 上任意一个函数. 我们的问题是, 如何在 $\tilde{M}$ 上找一个新的 1- 形式 $\tilde{\eta}$ 使得 $d\tilde{\eta} = \pi^*\omega$ 仍然成立, 但是 $\tilde{\eta}$ 的增长要慢一些 (或者寻找增长最慢的 $\tilde{\eta}$).

显然这个问题与 $\tilde{M}$ 的几何有关. 注意到 $\tilde{M}$ 与 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 是拟等距的, 我们期望研究清楚 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 的几何如何决定最慢增长的 $\tilde{\eta}$ 的增长阶. 具体见下一节的内容.

3 基本群

一个离散群 G , 如果它有一个表现 $G = \langle S \mid R \rangle$, 其中生成元集 S 和关系集 R 都是有限的, 则称它是有限表现的. 关系集 R 是 S 生成的自由群 $F(S)$ 中的一个子集. 例如, 设 Σ_g 是亏格为 g 的紧 Riemann 面, 它的基本群记为 $\pi_1(\Sigma_g) = G$, G 有如下表现:

$$G = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle,$$

其中 $|S| = 2g$, $|R| = 1$. 当然, 一个离散群 G 可以有很多不同的表现.

群 $G = \langle S \mid R \rangle$ 的 Cayley 图 $\Gamma(G, S)$ 是一个以 G 中元素为顶点的图, 两个顶点 $g_1, g_2 \in G$ 能够被一条棱连起来当且仅当 $g_1 = g_2 s$ 对某个 $s \in S$ 或 S^{-1} 成立. $\Gamma(G, S)$ 上的长度度量 d_S 就是 G 上的字度量:

$$d_S(g, e) = \min\{n \mid g = s_1 s_2 \cdots s_n, s_i \in S \text{ 或 } g = s_1 s_2 \cdots s_n, s_i \in S^{-1}\},$$

其中 e 是 G 中单位元,

$$d_S(g_1, g_2) = d_S(g_2^{-1} g_1, e).$$

如果群 G 用另一组有限的生成元 S' 和关系 R' 来表现 $G = \langle S' \mid R' \rangle$, 则 Cayley 图 $\Gamma(G, S')$ 与 $\Gamma(G, S)$ 是拟等距的, 即存在常数 $C > 0$ 使得

$$C^{-1}d_S(g_1, g_2) \leq d_{S'}(g_1, g_2) \leq Cd_S(g_1, g_2).$$

设 w 是自由群 $F(S)$ 中表示 G 中单位元 e 的字 $w = s_1 \cdots s_n \in F(S)$. 由定义可知, 存在字 $v_1, \dots, v_k \in F(S)$ 使得作为 $F(S)$ 中的元, 有

$$w = \prod_{i=1}^k v_i r_i v_i^{-1}, \quad r_i \in R \quad \text{或} \quad r_i^{-1} \in R. \quad (3.1)$$

定义 w 的面积 $\text{Area}(w)$ 为使得上述方程成立的最小的 k :

$$\text{Area}(w) = \min \left\{ k \mid w = \prod_{i=1}^k v_i r_i v_i^{-1}, r_i \in R \text{ 或 } r_i^{-1} \in R \right\}. \quad (3.2)$$

下面关于离散群的等周不等式的定义是很自然的.

定义 3.1 称一个有限表现群 $G = \langle S \mid R \rangle$ 满足次数为 p 的等周不等式, 如果存在常数 $C > 0$ 使得对任何表示 G 中单位元 e 的字 $w \in F(S)$, 有

$$\text{Area}(w) \leq CL(w)^p. \quad (3.3)$$

一个离散群 G , 如果它满足线性的等周不等式, 即在 (3.3) 中 $p = 1$, 则称它为双曲群.

自动群 (automatic groups) 和 $\text{CAT}(0)$ 群满足二次的等周不等式 (定义 3.1 中 $p = 2$). 粗略地, 自动群是一类使得群的运算能够被自动机 (automata) 所控制的群. 双曲群和映射类群 (mapping class groups) 都是自动群. $\text{CAT}(0)$ 群是能够真不连续地 (properly discontinuously)、余紧地 (cocompactly) 等距作用在 $\text{CAT}(0)$ 度量空间上的离散群. 关于自动群, 可参见文献 [3, 11, 24].

离散的 c 类幂零群具有次数为 $c + 1$ 的等周不等式 (参见文献 [12]). 一个群 G , 如果中心序列

$$G = G_1 \supset G_2 = [G, G_1] \supset \cdots \supset G_k = [G, G_{k-1}] \supset \cdots$$

满足 $G_{c+1} = \{e\}$, 则称它是 c 类的幂零群.

为处理上节末提出的问题, 我们发现定义 3.1 的等周不等式 (3.3) 不大适用, 需要一个新的更强的等周不等式.

定义 3.2 [7] 称一个有限表现群 $G = \langle S \mid R \rangle$ 满足次数为 p 的径向等周不等式 (radial isoperimetric inequality), 如果存在常数 $C > 0$ 使得对任意表示了 G 中单位元 e 的字 $w = s_1 \cdots s_n \in F(S)$, 有

$$\text{Area}(w) \leq C \sum_{i=1}^n (d_S(\bar{w}(i), e) + 1)^{p-1}, \quad (3.4)$$

其中 $\bar{w}(i) \in G$ 是 $w(i) = s_1 \cdots s_i \in F(S)$ 在自然商映射 $F(S) \rightarrow G$ 下的像.

(3.4) 可以推导出 (3.3). 当然, 当 $p = 1$ 时, (3.3) 与 (3.4) 等价.

定理 3.1 [7] 设 M 是紧流形, $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ 是它的万有覆盖, ω 是 M 上一个闭的二次微分形式, 使得 $\pi^*\omega = d\eta$. 假设 M 的基本群 $\pi_1(M) = G$ 满足次数 $p \geq 1$ 的径向等周不等式, 则在 $\tilde{M}$ 上存在一个光滑的 1-形式 $\tilde{\eta}$ 使得 $\pi^*\omega = d\tilde{\eta}$ 并且

$$|\tilde{\eta}|(x) \leq C(d_{\tilde{M}}(x, x_0) + 1)^{p-1}. \quad (3.5)$$

证明 定理 3.1 的证明分为如下 4 步.

第 1 步 对于任意 $L > 0$, 存在 $D = D(L)$, 对于任意 $\tilde{M}$ 中长度 $L(\alpha) \leq L$ 的闭曲线 α , 都有

$$\left| \int_{\alpha} \eta \right| \leq D. \quad (3.6)$$

如果 α 经过一个固定的基本域, 利用 η 的光滑性, (3.6) 很容易得到. 一般情形, 可以选一个 $g \in G$, 使得 $g^{-1}\alpha$ 经过基本域, 由于 $d(\eta - g^*\eta) = 0$ 和 $H^1(\tilde{M}) = 0$, 所以有

$$\eta - g^*\eta = df,$$

所要的结果 (3.6) 来自于

$$\int_{g^{-1}\alpha} \eta = \int_{\alpha} g^*\eta = \int_{\alpha} \eta + df = \int_{\alpha} \eta.$$

第 2 步 我们需要用到一个观察: $\tilde{M}$ 与基本群 $G = \langle S \mid R \rangle$ 的 Cayley 图 $\Gamma(G, S)$ 是拟等距的.

对任何 $\tilde{M}$ 中分段光滑的闭曲线 α , 可以构造一个长度不超过 $CL(\alpha)$ 的字 $w \in F(S)$, 它代表的曲线接近 α , 并且 w 表示了单位 $e \in G$ (w 是 Cayley 图中从 e 出发的闭路). 由面积 $\text{Area}(w)$ 的定义可知, w 可以写成

$$w = \prod_{i=1}^k v_i r_i v_i^{-1},$$

其中 $k = \text{Area}(w)$. 观察到将 η 沿着 $v_i r_i v_i^{-1}$ 代表的闭曲线积分时, v_i 和 v_i^{-1} 的贡献相抵消. 这样就有

$$\left| \int_{\alpha} \eta \right| \leq C(L(\alpha) + \text{Area}(w)). \quad (3.7)$$

由径向等周不等式 (3.4) 以及 Cayley 图与 $\tilde{M}$ 的拟等距性, 可以证明对任何 (分段光滑) 闭曲线 α , 下述估计成立:

$$\int_{\alpha} \eta \leq C \int_{\alpha} (d_{\tilde{M}}(x, x_0) + 1)^{p-1} ds. \quad (3.8)$$

注意, 如果 (3.8) 是对任何曲线成立, 则马上就有 $|\eta| \leq C(1 + d)^{p-1}$. 但一般而言, 这是不对的. 为了使得 (3.8) 对所有曲线都成立, 需要选取一个新的原形式 $\tilde{\eta}$. 基本的想法是应用 Hahn-Banach 泛函延拓定理.

第 3 步 将 η 看作定义在某个赋范线性空间的闭子空间上的一个有界线性泛函 L . 为了保证 Hahn-Banach 定理延拓出来的泛函是一个具有一定正则性的微分形式 (它及它的外微分都是具有可测系数的微分形式), 需要在“曲线的空间”上使用稍弱一点的范数 (参见文献 [26]):

$$|c|^{\flat} = \inf_D \{ \|c - \partial D\|_{\tilde{g}} + \|D\|_g \}, \quad (3.9)$$

其中的下确界是取遍所有的 2-链 D , 度量 $\tilde{g} = (1 + d)^{2(p-1)}g$ 是原度量 g 的一个共形. 注意

$$L(c) \triangleq \int_c \eta = \int_{c - \partial D} \eta + \int_D \omega, \quad (3.10)$$

这蕴涵了 $|L(c)| \leq C|c|^{\flat}$, 即 L 是有界的.

由 Hahn-Banach 定理知, 存在有界线形泛函 $\tilde{L}$, 它延拓了 L , $\tilde{L}$ 可以定义在所有的使得 (3.9) 有限的曲线上. 更进一步地, $\tilde{L}$ 可以被一个具有可测系数的微分形式 $\tilde{\eta}$ 来表示 (参见文献 [26, 定理 5A]), 并且 $\pi^*\omega = d\tilde{\eta}$ 在分布的意义下成立, 以及

$$|\tilde{\eta}|(x) \leq C(d_{\tilde{M}}(x, x_0) + 1)^{p-1}, \quad \text{a.e.} \quad (3.11)$$

第 4 步 用热方程去形变 $\tilde{\eta}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \tilde{\eta}(t) &= \pi^* d^* \omega, \\ \tilde{\eta}(0) &= \tilde{\eta}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

其中 $-\Delta = (dd^* + d^*d)$ 是 Hodge Laplace 算子.

一个关键观察是 $d\tilde{\eta}(t) \equiv \omega$. 条件 (3.11) 在热方程 (3.12) 下变成逐点的条件:

$$|\tilde{\eta}|(x, t) \leq C(t)(d_{\tilde{M}}(x, x_0) + 1)^{p-1}. \quad (3.13)$$

取 $t = 1$, $\tilde{\eta}(x, 1)$ 将满足我们的要求 (3.5). 至此完成了定理 3.1 的证明. $\square$

根据 Gromov 的定义, 一个微分形式 ω 是 $\tilde{d}$ -有界, 当且仅当 $\pi^*\omega = d\eta$ 在万有覆盖 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ 上对某个有界的微分形式 η 成立.

定理 3.2 [7] 令 M 是一个紧流形, 满足

- (i) $\pi_1(M)$ 是双曲群;
- (ii) $\pi_2(M)$ 是挠群,

则 $H_{DR}^2(M)$ 中每个元素都是 $\tilde{d}$ -有界的.

在定理 3.2 中, 如果 M 是 Kähler 流形, 则它的 Kähler 形式一定是 $\tilde{d}$ -有界的, 即该流形是 Kähler 双曲的.

类似地, 可以引入 $\tilde{d}$ -线性 (一般地, $\tilde{d}$ - p 次) 的微分形式的定义等. 我们对 $\tilde{d}$ -线性的微分形式感兴趣的原因是, 如果一个紧致的 Kähler 流形的 Kähler 形式是 $\tilde{d}$ -线性的, 则对所有 $r \neq \dim_{\mathbb{R}} M/2$, 有 $\mathcal{H}_{L^2}^r(\tilde{M}) = \{0\}$, 即消没定理仍然成立 (参见文献 [4, 19]). 特别地, 流形 M 的带符号的 Euler 示性数是非负的, 即

$$(-1)^{\frac{\dim_{\mathbb{R}} M}{2}} \chi(M) \geq 0.$$

前面提到, 自动群和 CAT(0) 群满足通常的二次等周不等式. 自动群和 CAT(0) 群事实上满足二次径向等周不等式, 即满足定义 3.2 中 $p = 2$ 的情形 (参见文献 [7]). 应用定理 3.1, 有如下定理:

定理 3.3 [7] 令 M 是一个紧流形, 使得

- (i) $\pi_1(M)$ 是自动群或者 CAT(0) 群;
- (ii) $\pi_2(M)$ 是挠群,

则 $H_{DR}^2(M)$ 中每个元素都是 $\tilde{d}$ -线性的.

特别地, 如果定理 3.3 中的流形是 Kähler 的, 则它的 Kähler 形式是 $\tilde{d}$ -线性的, 因此有

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \chi(M^n) \geq 0.$$

最后, 我们对下面的问题很感兴趣. 令 G 是紧 Kähler 流形的基本群, 下列两者之一是否会成立:

- (1) G 包含一个正规的无限阶 amenable 子群;

(2) G 满足二次的径向等周不等式.

考虑上述问题的动机之一是 Cheeger 和 Gromov 证明的定理 (参见文献 [5]): 如果一个紧的 aspherical 流形 M 的基本群 $\pi_1(M)$ 包含一个正规的无限阶 amenable 子群, 则流形 M 的 Euler 示性数是 0.

关于 Kähler 流形基本群的研究, 可参见文献 [1, 23, 28, 29].

参考文献

- 1 Arapura D, Bressler P, Ramachandran M. On the fundamental group of a compact Kähler manifold. *Duke Math J*, 1992, 68: 477–488
- 2 Atiyah M F. Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras. In: *Analyse et Topologie*. Astérisque, no. 32-33. Paris: Soc Math France, 1976, 43–72
- 3 Cannon J W, Epstein B A, Holt D F, et al. *Word Processing in Groups*. Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1992
- 4 Cao J-G, Xavier F. Kähler parabolicity and the Euler number of compact manifolds of non-positive sectional curvature. *Math Ann*, 2001, 319: 483–491
- 5 Cheeger J, Gromov M. L^2 -cohomology and group cohomology. *Topology*, 1986, 25: 189–215
- 6 Chen B-L, Yang X-K. Compact Kähler manifolds homotopic to negatively curved Riemannian manifolds. *Math Ann*, 2018, 370: 1477–1489
- 7 Chen B-L, Yang X-K. On Euler characteristic and fundamental groups of compact manifolds. *Math Ann*, 2021, 381: 1723–1743
- 8 Chen B-L, Zhang K-K. Euler characteristic numbers of space-like manifolds. *Asian J Math*, 2017, 21: 591–598
- 9 Chern S S. On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold. *Abh Math Semin Univ Hambg*, 1955, 20: 117–126
- 10 Geroch R. Positive sectional curvatures does not imply positive Gauss-Bonnet integrand. *Proc Amer Math Soc*, 1976, 54: 267–270
- 11 Gersten S M. Introduction to hyperbolic and automatic groups. *CRM Proc Lecture Notes*, 1999, 17: 45–70
- 12 Gersten S M, Holt D F, Riley T R. Isoperimetric inequalities for nilpotent groups. *Geom Funct Anal*, 2003, 13: 795–814
- 13 Green M, Griffiths P. Two applications of algebraic geometry to entire holomorphic mappings. In: *The Chern Symposium 1979*. New York: Springer-Verlag, 1980, 41–74
- 14 Gromov M. Hyperbolic manifolds, groups and actions. *Ann of Math Stud*, 1981, 97: 183–213
- 15 Gromov M. Hyperbolic groups, Essays in group theory. In: *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, vol. 8. New York: Springer, 1987, 75–263
- 16 Gromov M. Kähler hyperbolicity and L^2 -Hodge theory. *J Differential Geom*, 1991, 33: 263–292
- 17 Gromov M. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Progress in Mathematics, vol. 152. Boston: Birkhäuser, 1999
- 18 Jost J, Xin Y L. Vanishing theorems for L^2 -cohomology groups. *J Reine Angew Math*, 2000, 525: 95–112
- 19 Jost J, Zuo K. Vanishing theorems for L^2 -cohomology on infinite coverings of compact Kähler manifolds and applications in algebraic geometry. *Comm Anal Geom*, 2000, 8: 1–30
- 20 Klembeck P F. On Geroch’s counterexample to the algebraic Hopf conjecture. *Proc Amer Math Soc*, 1976, 59: 334–336
- 21 Kobayashi S. *Hyperbolic Complex Spaces*. New York: Springer, 1998
- 22 Lang S. Hyperbolic and Diophantine analysis. *Bull Amer Math Soc (NS)*, 1986, 14: 159–205
- 23 Mok N. Factorization of semisimple discrete representations of Kähler groups. *Invent Math*, 1992, 110: 557–614
- 24 Ohshika K. *Discrete Groups*. Iwanami Series in Modern Mathematics. Providence: Amer Math Soc, 2002
- 25 Tosatti V, Yang X-K. An extension of a theorem of Wu-Yau. *J Differential Geom*, 2017, 107: 573–579
- 26 Whitney H. *Geometric Integration Theory*. Princeton: Princeton Univ Press, 1957, Mineola-New York: Dover Publ, 2005
- 27 Wu D, Yau S-T. Negative holomorphic curvature and positive canonical bundle. *Invent Math*, 2016, 204: 595–604
- 28 Zuo K. Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of π_1 of projective algebraic manifolds. *Invent Math*, 1994, 118: 37–46
- 29 Zuo K. *Representations of Fundamental Groups of Algebraic Varieties*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1708. Berlin: Springer-Verlag, 1999

Hyperbolicities in geometry and fundamental groups

Bing-Long Chen

Abstract We survey some aspects of hyperbolicities in geometry, and investigate its interplay with the topology of the manifolds, including fundamental groups and Euler characteristics.

Keywords hyperbolicity, fundamental groups, Euler characteristic

MSC(2020) 53C50, 83C20

doi: 10.1360/SSM-2024-0058