



基于通信序列熵的复杂网络信息度量研究

石丹丹, 陈单*, 龙慧敏, 王承科, 潘贵军*

湖北大学物理与电子科学学院, 武汉 430062

*联系人, 陈单, E-mail: danchenzqf@gmail.com; 潘贵军, E-mail: pangj8866@hubu.edu.cn

收稿日期: 2019-01-26; 接受日期: 2019-04-11; 网络出版日期: 2019-05-06

湖北省教育基金会(编号: D20120104)资助项目

摘要 从信息的角度看待网络系统并构建蕴含网络整体信息的测度是网络信息理论的关键问题, 基于节点对通信能力的通信序列熵被考虑为量化网络信息的候选测度. 为了探讨其表征网络整体信息的能力, 首先研究模型网络的拓扑结构对通信序列熵的影响. 结果表明, 异质性强、度-度关联性强以及具有社团结构的网络均具有相对较小的通信序列熵. 其次, 对比研究一些真实网络和它们对应的随机化网络模型的通信序列熵, 可以得到随机化网络模型的阶数越高, 通信序列熵越小, 且越接近真实网络的通信序列熵. 这些研究结果表明, 网络的通信序列熵敏感地依赖于网络的基本拓扑结构, 而且随着网络有序程度的递增, 通信序列熵呈减小趋势. 本文的研究结论为通信序列熵具有量化网络整体信息的能力提供了证据.

关键词 复杂网络, 信息测度, 通信序列熵, 拓扑结构

PACS: 89.75.Hc, 89.75.Fb, 89.20.-a, 89.70.+c

1 引言

许多自然、社会以及工程技术系统均可用复杂网络表示. 尽管这些网络系统来自不同的领域, 但它们会分享一些共同的拓扑结构特征, 如小世界特性^[1]、无标度特性^[2]、度-度关联特性^[3]以及社团结构性^[4]等. 所谓小世界特性是网络中两节点之间的平均距离与网络的规模呈对数增长. 无标度特性是指节点之间的连接情况具有严重的不均匀分布特性, 即网络的度分布呈幂律分布. 度-度关联特性是网络的一个重要统计特征, 它描述了网络中度的大的节点与度小的节点之间的关系. 社团结构性是指将网络的节点分为不同的组时, 网络组内节点之间的

连接相对稠密, 而不同组节点之间的连接较为稀疏的性质.

当从信息的角度去考察系统时, 香农熵作为信息理论工具被广泛且成功应用于许多学科领域, 如量子信息^[5,6]、混沌时间序列分析^[7]和基因序列复杂性^[8,9]等. 在复杂网络领域, 从信息的角度去观察网络, 并用香农熵作为信息理论工具量化复杂网络信息对于理解网络的结构和动力学是非常有益的. 为了量化网络信息, 一些基于网络描述量概率分布的香农熵被提出, 如度分布熵^[10]、度相对值熵^[11]以及剩余度熵^[10]等. 但这些熵是基于描述网络某一特征的分布而构建的, 它们忽略了网络的其他信息, 所以不能表征网络的整体拓扑结构, 只

引用格式: 石丹丹, 陈单, 龙慧敏, 等. 基于通信序列熵的复杂网络信息度量研究. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2019, 49: 070502
Shi D D, Chen D, Long H M, et al. Quantifying complex network information based on communicability sequence entropy (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2019, 49: 070502, doi: [10.1360/SSPMA-2019-0029](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0029)

能反映其局域特征. 因此, 在不丢失信息的条件下, 寻找反映网络整体信息的概率分布, 进而构建信息熵是富有挑战性的研究课题. 为此, De Domenico等人^[12]提出复杂网络谱熵的概念, 它是基于密度矩阵的冯诺依曼熵, 该密度矩阵依赖于网络的拉普拉斯矩阵谱, 而不依赖于某一网络不变量的概率分布.

最近, Chen等人^[13]基于网络节点间的通信能力提出了通信序列熵的概念. 由于网络节点间的通信能力考虑了节点之间的所有可能路径, 因而通信序列熵有可能体现网络的整体拓扑性质. 受量子信息思想方法的激励, 他们基于通信序列熵构建了两网络的Jenson-Shannon^[14, 15]发散, 发现该方法能有效地量化网络之间的差异. 这一研究结果说明通信序列熵是表征网络整体信息的理想候选测度. 本文通过研究网络的各种拓扑结构对通信序列熵的影响, 进一步探讨了其表征网络整体信息的能力. 具体来讲, 研究网络的度分布的异质性、无标度网络的度-度关联性、社团性等结构特征对通信序列熵的影响. 结果表明, 与随机网络相比, 无标度网络具有相对较小的通信序列熵; 度分布异质性强的网络、度-度关联性强的网络以及具有社团结构的网络均具有相对较小的通信序列熵. 除此以外, 本文还研究了一些真实网络以及它们对应的不同阶随机化网络模型的通信序列熵. 研究结果表明, 与对应的随机化网络模型相比较, 真实网络本身的通信序列熵最小. 所有这些研究结论都表明, 网络的通信序列熵对网络的拓扑结构均存在敏感的依赖性, 而且随着网络有序程度的递增, 通信序列熵呈减小趋势. 从而进一步证实通信序列熵可以有效表征网络整体拓扑特征, 具有量化网络整体信息的能力.

2 通信序列熵

考虑一个由 N 个节点和 E 条边组成的无权无向网络 $G(N, E)$, 网络的连边情况可以用 $N \times N$ 的邻接矩阵 A 表示. 如果节点 i 和 j 之间有直接相连的边, 则 $A_{ij} = 1$, 否则 $A_{ij} = 0$. 尽管网络中有很多节点没有直接相连, 但它们之间可以通过其他节点相互到达, 进而可以进行某种特定信息的传输和通信. 通信函数 C_{ij} 可用来表征任意一对节点 i, j 之间的全局通信

能力^[16, 17], 所有节点之间的通信能力可用一个通信矩阵表达:

$$C = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1N} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{N1} & C_{N2} & \cdots & C_{NN} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

即网络中任意一对节点 i 和 j 之间的通信能力对应通信矩阵 C 的第 i 行、第 j 列的元素 C_{ij} . 为了求解矩阵元 C_{ij} , 可以使用谱分解的方法将邻接矩阵 A 分解为 $A = Q\Lambda Q^{-1}$, 则 $e^A = Qe^\Lambda Q^{-1}$. 其中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots, \lambda_k(A), \dots, \lambda_N(A))$, $\lambda_k(A)$ 表示 A 的第 k 个特征值, Q 是由相应的标准正交基组成的正交矩阵.

在文献^[13]中, Chen等人基于该通信矩阵提出了通信序列熵的概念来描述网络整体信息, 具体描述如下: 基于通信矩阵的对称特征, 提取该矩阵对角线及对角线上方的元素进行分析, 将这些元素进行归一化, 得到通信序列 $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, \dots, P_M\}$, 该序列 P 的长度为 $M = N(N+1)/2$. 序列中每一个元素可表示为 $P_k = C_{ij}/\Sigma$ ($1 \leq k \leq M, 1 \leq i \leq j \leq N$), 其中 $\Sigma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N C_{ij}$, $\sum_{k=1}^M P_k = 1$. 根据香农信息理论, 该序列的香农熵可表示为

$$S(P) = - \sum_{i=1}^M P_i \log_2 P_i. \quad (2)$$

这里规定 $0 \log_2 0 = 0$, 文献^[13]称之为网络的通信序列熵. 从通信矩阵的性质可以看出网络节点之间的通信函数考虑了两个节点之间的所有可能路径, 通信序列熵可能能够有效反映网络的整体信息. 文献^[13]的焦点旨在基于通信序列熵构建两网络之间的Jenson-Shannon发散, 并利用Jenson-Shannon发散量化网络之间的差异性. 本文将从另一个角度进一步探讨其表征网络整体信息的能力, 即研究通信序列熵对网络各种拓扑结构的依赖性. 完全连通网络中任意一对节点之间都有直接相连的边, 它们之间有很强的通信能力, 并且任意一对节点之间的通信能力几乎相等, 通信序列中元素达到最均匀, 网络熵达到最大值 $S_{\max}(P) \approx \log_2 M$ ^[13]. 为了避免有限尺寸

的影响, 在下面的研究过程中, 将讨论归一化标准通信序列熵 $S_N = S(P)/\log_2 M$.

3 网络度分布的异质性对通信序列熵的影响

ER 网络^[18]是均匀网络的代表网络, 它的度分布满足泊松分布, 在度平均值处有一峰值, 然后就会呈指数形式快速衰减. 无标度网络的度分布具有很强的异质性, 没有特定的平均值, 各节点之间的连接状况分布不均匀: 少数称之为Hub点的节点拥有极其多的连接(度比较大), 而大多数节点只有很少量的连接(度比较小), 这些少数的Hub点对无标度网络的运行起主导作用, 度分布可以用幂律分布 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 来描述. 以下研究无标度网络的通信序列熵随度分布指数 ν 、网络的平均度 $\langle k \rangle$ 及网络规模 N 的关系. 在研究的过程中, 我们使用文献^[19]的作者Gao个人网站上(<http://github.com/jianxigao/NuRsE/>)的算法生成平均度一定, 度分布满足 $P(k) \sim k^{-\gamma}$ 的无标度网络.

图 1 展示了不同平均度下的无标度网络的通信序列熵 S_N 随度分布指数 ν 的变化关系. 从图中可以看到, S_N 随着 ν 的增大而增大. 对于此现象可作如下解释: 当 ν 较小时, 网络本身具有很强的异质性, 网络中有少量度比较大的节点, 通信序列 P 中元素分布不均匀, 因而通信序列熵值较小; 随着度分布指数的增大, 网络变得越来越随机, 通信序列中元素的值也逐渐趋于均匀, 进而熵 S_N 逐渐变大; 当度分布指数 $\nu \rightarrow \infty$, 网络趋于一个完全随机的 ER 网络, 熵值达到极大值. 由此可见, 网络越趋于有序, 通信序列熵越小. 此外, 网络平均度的改变只是改变了网络边的连接密度, 并没有改变网络整体的幂律分布形式和幂律指数, 网络的通信序列熵随度分布指数的增加则均呈增加趋势. 图 2 显示了无标度网络的通信序列熵 S_N 随网络平均度 $\langle k \rangle$ 的变化关系. 从图中可以看出网络的 S_N 随着平均度增加呈增加趋势. 这里可作如下解释: 随着网络平均度的增加, 网络将变得越来越稠密, 通信序列中元素值将变得越来越均匀, 因而网络的通信序列熵随之变大.

图 3 显示了无标度网络的通信序列熵 S_N 对网络

规模 N 的依赖关系. 可以看到, S_N 随 N 的增大呈减小趋势. 其原因在于, 随着网络规模的增大, 枢纽节点与一般节点的差异增大, 相应的通信序列中元素的值变得更加不均匀, 因而 S_N 值变小. 对于有限尺寸的无标度网络的度分布是一个有指数截断的幂律分布, 当尺寸趋于无穷大时, 其度分布为一个纯粹的幂律分布, 这意味着随着网络规模的增大, 网络变得更加有序. 插图显示了 ER 随机网络的通信序列熵 S_N 对 N 的依赖关系, 与无标度网络不同的是, 在

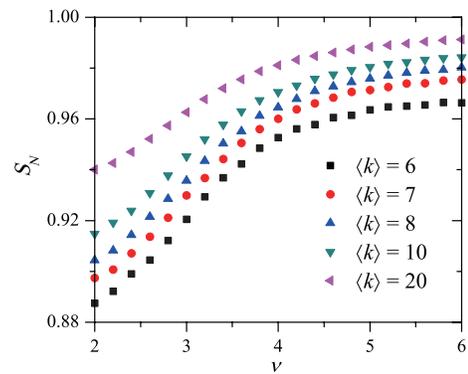


图 1 (网络版彩图) 不同平均度下的无标度网络的通信序列熵 S_N 随度分布指数 ν 的变化关系. 网络规模 $N = 1000$, 所有的结果统计平均为 100 次

Figure 1 (Color online) The communicability sequence entropy S_N of the scale-free network under different average degrees for different distribution exponents ν . The network size is $N = 1000$, all the results are averaged with 100 realizations.

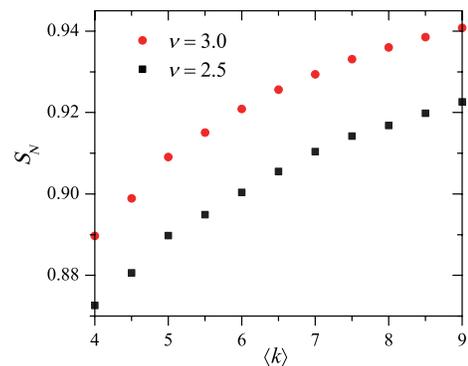


图 2 (网络版彩图) 无标度网络的通信序列熵 S_N 随网络平均度 $\langle k \rangle$ 的变化关系. 网络规模 $N = 1000$, 所有的结果统计平均为 100 次

Figure 2 (Color online) The communicability sequence entropy S_N of the scale-free network as a function of the network average $\langle k \rangle$. The network size is $N = 1000$, all the results are averaged with 100 realizations.

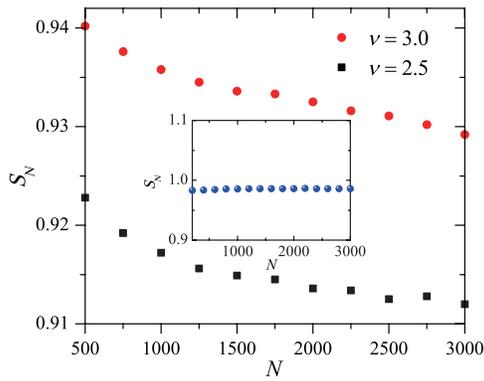


图 3 (网络版彩图) 无标度网络的通信序列熵 S_N 随网络规模 N 的变化关系. 插图展示的是ER随机网络的 S_N 随 N 的变化关系. 网络平均度 $\langle k \rangle = 8$, 所有的结果统计平均为100次

Figure 3 (Color online) The dependence of the communicability sequence entropy S_N of the scale-free network on the network size N . The inset shows the dependence of the S_N of the ER random network on the network size N . The networks average $\langle k \rangle = 8$, all the results are averaged with 100 realizations.

平均度一定的情况下, ER随机网络的熵几乎不会随着网络尺寸的增加呈现明显的变化趋势. 这是因为在不同尺寸下, ER随机网络均近似服从均值一定的泊松分布, 导致通信序列中元素的均匀程度随网络规模的改变波动很小, 元素值相对比较均匀, 即ER随机网络的无序程度对网络规模的改变不敏感. 因此, 根据以上结果可以得出, 随着尺寸的增加, 无标度网络越趋于有序, 通信序列熵越小, 而ER随机网络的无序程度没有明显的变化, 通信序列熵几乎保持不变.

4 网络的度-度关联性对通信序列熵的影响

许多真实网络不仅具有度分布的无标度特性, 而且还具有度-度关联特性. 研究表明, 社会网络大多呈现正关联特性, 而自然网络则趋向于负关联特性. 以下研究关联的无标度网络的通信序列熵 S_N 随关联强度的变化关系. 通常用度-度相关系数 r ($0 \leq |r| \leq 1$) 衡量关联强度的大小^[20]: 若 $r > 0$, 则表明网络中节点倾向于连接度相差较小的节点, 网络是正相关的; 若 $r < 0$, 则表明网络中节点倾向于连接度相差较大的节点, 网络是负相关的; 若 $r = 0$, 则表明网络中节点的度之间不具有相关性.

这里, 首先通过配置模型^[21]生成一个无关联无标度网络, 再以文献[22]的算法生成度-度关联的无标度网络. 图 4研究了关联的无标度网络的通信序列熵 S_N 对度-度相关系数 r 的依赖关系. 我们发现, 随着关联强度的增大, 通信序列熵 S_N 逐渐减小. 在文献[23]中, Johnson等人通过引入吉布斯函数熵, 利用最大熵原理证明了负关联的无标度网络的熵大于无关联的无标度网络的熵. 也就是说, 在平均度和度分布不变的约束条件下, 随机给节点布线负关联的无标度网络出现的概率更大, 从而给出了自然网络趋向于负关联特性的一个解释. 他们的研究结果说明负关联的无标度网络比无关联的无标度网络更随机无序. 这里, 对于通信序列熵, 我们同样发现负关联无标度网络的熵大于无关联无标度网络的熵. 因此, 在正关联领域, 关联强度越大, 网络有序程度增强, 熵变小. 在负关联领域, 关联强度的增加, 网络变得更无序, 熵增加.

5 网络社团结构性对通信序列熵的影响

实证研究表明, 许多真实网络都有社团结构属性. 即整个网络由若干个社团组成, 每个社团内节点之间的连接比较紧密, 社团之间的连接相对稀疏. 下面我们研究这种社团结构属性对通信序列熵的影

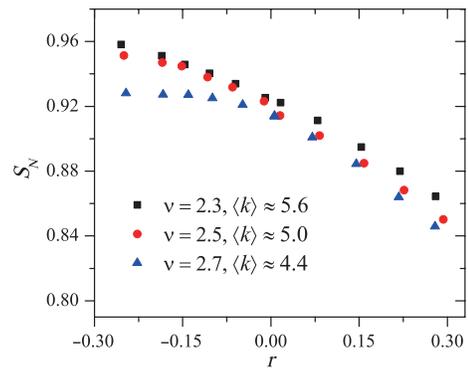


图 4 (网络版彩图) 度-度关联的无标度网络的通信序列熵 S_N 随关联系数 r 的变化关系. 网络规模 $N = 3000$, 所有的结果统计平均为100次

Figure 4 (Color online) The relationship between the communicability sequence entropy S_N and the correlation coefficient r for the degree-degree correlated scale-free network. The network size is $N = 3000$, all the results are averaged with 100 realizations.

响. 为此, 基于文献[24]的算法以BA网络^[2]和ER网络为基础构造具有社团结构的无标度网络和随机网络. 这里仅以BA网络为例阐述网络生成的具体算法: (1) 按照文献[2]的方法生成一个BA (N, E)网络, (2) 生成 a ($a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$)个独立的BA ($N/a, E/a$)社团网络, 在各自独立的网络中随机选取少量的边并断开, 并将这些断开的边连接到其他社团网络中已被断开的边的端点上, 组成一个含有 a 个社团的网络, 如图5所示.

为此, 我们分别计算了基于BA网络和ER网络具有不同社团个数的网络的通信序列熵 S_N , 如表1

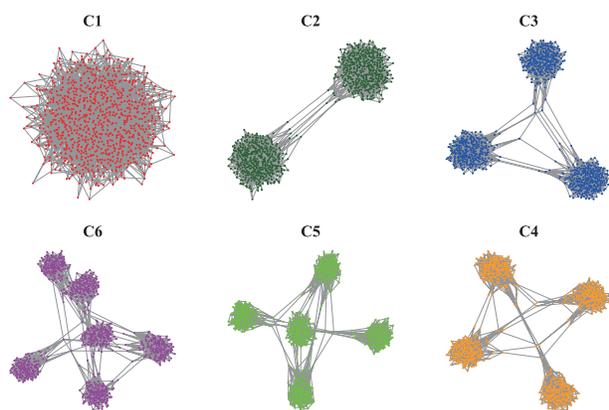


图5 (网络版彩图) 基于BA网络的社团网络可视化图, 社团个数为1到6, 分别表示为C1–C6. 图中每一个网络中社团网络的生成方式都是按照BA网络^[2]的方法生成. 网络规模 $N = 900$, 网络边数 $E = 2694$. 具体算法如下: (1) 我们首先生成一个含有900个节点, 2694条边的BA网络, 如图中C1. (2) 生成两个含有450个节点, 1347条边的BA网络, 然后在每个社团中随机断开少量的边, 并将这些断开的边连接到其他社团中已被断开的边的端点上, 形成一个含有两个社团的C2网络. (3) 依次类推, 生成含有3, 4, 5, 6个社团的网络C3, C4, C5, C6.

Figure 5 (Color online) The visualization diagram of community network based on BA network. The number of communities is 1 to 6, which is expressed as C1–C6 respectively. The generation method of the community network in each network in the figure is generated according to the method of BA network [2]. The network size is $N = 900$, and the number of network edges is $E = 2694$. The specific algorithm is as follows: (1) we first generate a BA network with 900 nodes and 2694 edges, as shown in figure C1. (2) Generate two BA networks with 450 nodes and 1347 edges, and then randomly disconnect a small number of edges in each community, and these disconnected edges are connected to the endpoints of the interrupted edges of other communities to form a network C2 containing two communities. (3) By analogy, BA networks C3, C4, C5, and C6 containing 3, 4, 5, and 6 communities are generated.

所示, 随着网络中社团数量的增加, 这两种类型网络的通信序列熵逐渐减小. 由于社团的存在, 社团内部的点连接相对稠密, 社团之间的连接稀少, 这就导致了通信序列中的元素分布不均匀, 因而通信序列熵 S_N 变小. 社团数量越多, 元素分布的不均匀性越强, 通信序列熵 S_N 就会越小. 另一方面, 具有社团的网络比没有社团的网络更有序, 随着社团数量的增加, 网络越有序. 由此发现, 网络越有序, 通信序列熵 S_N 就越小.

6 真实网络的通信序列熵

上面主要研究了网络度分布的异质性、度-度关联性、社团结构性对通信序列熵的影响. 另外, 许多真实的系统都能很好地被网络所描述, 这些网络通常都是无标度的、度-度关联的, 甚至还具有社团结构属性. 为了研究这些结构属性对通信序列熵的综合影响效应, 本文最后将聚焦研究真实网络的通信序列熵. 主要研究了9个真实网络及其相应的 dk ($d = 0, 1, 2$)随机化网络模型^[25]的通信序列熵 S_N (见表2). 这里, $d = 0$ 是指在随机布线的过程中保证与原网络具有相同的节点数和边数, $d = 1$ 是指随机重连的过程中保证与原网络具有相同的节点数和度分布, $d = 2$ 则是保证与原网络具有相同节点、度分布和二阶度相关性. 显然, 阶数 d 越大, 随机化网络模型就越有序, 而且越接近原始的真实网络. 从表2中可以看到, 随着随机化网络模型阶数的增加, 通信序列熵 S_N 逐渐减小且都大于原始网络对应熵, 也就是说, 网络越趋于有序, 通信序列熵越小.

表1 基于BA网络和ER网络的具有社团结构网络的通信序列熵 S_N . 所有结果平均为100次实现

Table 1 The communicability sequence entropy S_N of the community structure network based on the BA network and the ER network. All results averaged 100 implementations

社团个数 (a)	BA网络的 S_N	ER网络的 S_N
1 (C1)	0.9356	0.9686
2 (C2)	0.8917	0.9228
3 (C3)	0.8695	0.8977
4 (C4)	0.8506	0.8807
5 (C5)	0.8431	0.8720
6 (C6)	0.8400	0.8644

表 2 9个真实网络的名称、节点数、连接边数、网络平均度、随机化网络模型及原始网络的通信序列熵 S_N . 我们将研究中的真实网络视为无权、无向、无自环的网络, 这些网络的数据都可以在网站(<http://konect.uni-koblenz.de/>)上获得

Table 2 Names, number of nodes, number of connected edges, network average degree, the communicability sequence entropy S_N of the randomized network models and the real networks. We treat all networks under study as being unweighted, undirected, and without self-loops, and the data of these networks can be obtained on the website: (<http://konect.uni-koblenz.de/>)

Name	N	E	$\langle k \rangle$	$S_N(0k)$	$S_N(1k)$	$S_N(2k)$	$S_N(\text{real})$
Zebra	27	111	8.2	0.9838	0.9426	0.8423	0.8354
Dolphins	62	159	5.1	0.9598	0.9412	0.9391	0.8908
Mac	62	1167	37.6	0.9986	0.9953	0.9952	0.9951
Rovira	1133	5451	9.6	0.9737	0.9406	0.9192	0.9010
Bombing	64	243	7.6	0.9794	0.9305	0.8836	0.8568
Infectious	410	2765	13.5	0.9920	0.9624	0.9354	0.7909
Physicians	241	923	7.7	0.9812	0.9679	0.9677	0.8463
Airports	1574	17215	21.9	0.9764	0.8716	0.8237	0.8096
Elegans	453	2025	8.9	0.9565	0.9445	0.9325	0.9306

需要指出的是, Mac网络的随机化网络模型及其真实网络的通信序列熵之间的降低趋势相对比较微弱, 出现这种现象的原因在于: Mac网络的平均度很大(见表 2), 网络很稠密, 原始网络与其随机化网络模型的差异相对很小, 相应地它们的通信序列熵也相差较小. 事实上, 当网络的连边密度达到最大值时, 网络对应的平均度 $\langle k \rangle = N - 1$, 即对应完全网络, 此时原始网络与随机化网络模型之间无差异.

7 结论

从信息的角度看待网络, 并且有效地量化网络信息是网络科学的重要研究课题. 我们在文献[13]中提出通信序列熵的概念, 并基于该信息熵研究了网络的差异性. 本文研究模型网络和真实网络的拓扑特性对通信序列熵的影响, 并从这一角度进一步探讨其表征网络整体信息的能力. 具体研

究了网络度分布的异质性、无标度网络的度-度关联性以及社团结构性等结构特征对通信序列熵的影响. 结果表明, 与随机网络相比, 无标度网络具有相对较小的通信序列熵, 度分布异质性强的网络、度-度关联性强的网络以及具有社团结构的网络均具有相对较小的通信序列熵. 除此之外, 为了研究这些结构属性对通信序列熵的综合影响效应, 还研究了一些真实网络以及它们对应的不同阶数随机化网络模型的通信序列熵. 我们发现, 随着随机化网络模型阶数的增加, 通信序列熵逐渐减小, 而且与对应的随机化网络模型相比较, 真实网络本身的通信序列熵最小. 所有这些研究结论都表明, 网络的通信序列熵对网络的基本拓扑结构均存在敏感的依赖性, 而且网络的拓扑结构越有序, 通信序列熵越小. 因此, 我们的研究表明通信序列熵是一个表征网络整体拓扑特征的有效测度, 可以用来量化网络的整体信息.

参考文献

- 1 Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 1998, 393: 440–442
- 2 Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, 286: 509–512
- 3 Newman M E J. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*, 2003, 45: 167–256
- 4 Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, et al. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys Rep*, 2006, 424: 175–308
- 5 Holevo A S. Bounds for the quantity of information transmitted by a quantum communication channel. *Prob Peredachi Inf*, 1973, 9: 3–11
- 6 Bennett C H, Shor P W. Quantum information theory. *IEEE Trans Inform Theor*, 1998, 44: 2724–2742
- 7 Rosso O A, Larrondo H A, Martin M T, et al. Distinguishing noise from chaos. *Phys Rev Lett*, 2007, 99: 154102

- 8 Mantegna R N, Buldyrev S V, Goldberger A L, et al. Linguistic features of noncoding DNA sequences. *Phys Rev Lett*, 1994, 73: 3169–3172
- 9 Bernaola-Galván P, Grosse I, Carpena P, et al. Finding borders between coding and noncoding DNA regions by an entropic segmentation method. *Phys Rev Lett*, 2000, 85: 1342–1345
- 10 Solé R V, Valverde S. Information theory of complex networks: On evolution and architectural constraints. *Lect Notes Phys*, 2004, 650: 189
- 11 Wu J, Tan Y J, Zheng H Z, et al. Heterogeneity of scale-free networks (in Chinese). *Syst Eng-Theor Practice*, 2007, 27: 101–105 [吴俊, 谭跃进, 郑宏钟, 等. 无标度网络拓扑结构非均匀性研究. 系统工程理论与实践, 2007, 27: 101–105]
- 12 De Domenico M, Biamonte J. Spectral entropies as information-theoretic tools for complex network comparison. *Phys Rev X*, 2016, 6: 041062
- 13 Chen D, Shi D D, Qin M, et al. Complex network comparison based on communicability sequence entropy. *Phys Rev E*, 2018, 98: 012319
- 14 Lamberti P W, Majtey A P, Borras A, et al. Metric character of the quantum Jensen-Shannon divergence. *Phys Rev A*, 2008, 77: 052311
- 15 Briët J, Harremoës P. Properties of classical and quantum Jensen-Shannon divergence. *Phys Rev A*, 2009, 79: 052311
- 16 Estrada E, Hatano N. Communicability in complex networks. *Phys Rev E*, 2008, 77: 036111
- 17 Estrada E, Hatano N, Benzi M. The physics of communicability in complex networks. *Phys Rep*, 2012, 514: 89–119
- 18 Erdős P, Rényi A. On random graphs I. *Publ Math Debrecen*, 1959, 6: 290-297
- 19 Gao J, Barzel B, Barabási A L. Universal resilience patterns in complex networks. *Nature*, 2016, 530: 307–312
- 20 Newman M E J. Assortative mixing in networks. *Phys Rev Lett*, 2002, 89: 208701
- 21 Catanzaro M, Boguñá M, Pastor-Satorras R. Generation of uncorrelated random scale-free networks. *Phys Rev E*, 2005, 71: 027103
- 22 Xulvi-Brunet R, Sokolov I M. Reshuffling scale-free networks: From random to assortative. *Phys Rev E*, 2004, 70: 066102
- 23 Johnson S, Torres J J, Marro J, et al. Entropic origin of disassortativity in complex networks. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 108702
- 24 Wu J, Gao Z, Sun H. Cascade and breakdown in scale-free networks with community structure. *Phys Rev E*, 2006, 74: 066111
- 25 Orsini C, Dankulov M M, Colomer-de-Simón P, et al. Quantifying randomness in real networks. *Nat Commun*, 2015, 6: 8627

Quantifying complex network information based on communicability sequence entropy

SHI DanDan, CHEN Dan^{*}, LONG HuiMin, WANG ChengKe & PAN GuiJun^{*}

Faculty of Physics and Electronic Science, Hubei University, Wuhan 430062, China

Viewing the network system from the perspective of information, it is a key issue to construct a measure contains the overall information of the network in the network information theory. The communicability sequence entropy based on node pair communication capability becomes considered a candidate measure to quantify network information. In order to explore its ability to characterize the global information of the network, we first study the influences of the topology of the synthetic networks on the communicability sequence entropy. The results show that networks with strong heterogeneity, strong degree-degree correlation and community structure have relatively smaller communicability sequence entropy. Moreover, by studying the communicability sequence entropy of some real networks and their corresponding randomized network models, we find that the higher the order of the randomized network model is, the smaller communicability sequence entropy is, and the closer it is to the real network's communicability sequence entropy. These results show that the communicability sequence entropy of the network is sensitive to the basic topology of the network, and tends to decrease with increasing the order degree of the network. The conclusions provide evidence for the ability of the communicability sequence entropy to quantify the overall information of the network.

complex network, information measure, communicability sequence entropy, topology

PACS: 89.75.Hc, 89.75.Fb, 89.20.-a, 89.70.+c

doi: [10.1360/SSPMA-2019-0029](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2019-0029)