基于逆向地月转移的月地入射控制方法

刘勇^{1,2*}, 曹鹏飞^{1,2}, 马传令^{1,2}, 陈莉丹^{1,2}

1. 北京航天飞行控制中心, 北京 100094;

2. 航天飞行动力学技术重点实验室, 北京 100094

*联系人, E-mail: ly2218_cn@sina.com

收稿日期: 2021-03-05; 接受日期: 2021-07-13; 网络出版日期: 2021-09-24

国家自然科学基金(编号: 11773004)、装备预研重点实验室基金(编号: 6142210190105)和探月工程重大专项资助项目

摘要 月地转移是地月转移的相反过程, 本文提出以再入点参数修正近月点B平面参数的逆向月地转移轨道计算方法, 然后利用月地转移轨道与环月轨道求交线和近月点高度等比修正的方法得到月地入射参数, 并根据速度增量最小条件推导了月地入射最优倾角的解析解, 通过倾角遍历证明了解析解的正确性. 基于月地转移轨道的升交点经度给出了入射窗口初值的解析公式. 在脉冲月地入射参数的基础上, 给出了有限推力下的月地入射参数计算方法, 特别是给出了最优俯仰角的解析公式. 最后以一条环月轨道为初始轨道计算了月地入射参数, 分析了月地入射参数的规律, 得出偏航角为0入射速度增量不一定最小的结论, 并证明了文章给出的解析计算方法的最优性.

关键词 逆向, 地月转移, 月地入射, 轨道控制, 解析解

PACS: 02.60.Gf, 02.60.Pn, 95.55.Pe, 97.75.Pq

1 引言

2020年12月17日, 嫦娥五号的返回器准确着陆于内蒙古四子王旗的预定着陆区, 我国的探月工程三期圆满收官. 迄今为止, 美国及苏联共进行过18次月球采样返回任务, 其中9次成功(美国6次、苏联3次). 月地入射(Trans-Earth Insertion, TEI)是月球采样返回任务的关键技术之一, 是经典的月球探测轨道设计问题, 在理论和工程上都已较为成熟.

国内外学者对探测器月地转移入射变轨策略的设计进行了深入的研究, 内容涵盖从环月轨道出发进入逃逸轨道的单脉冲控制、两脉冲控制、三脉冲控制、

低能量转移等. 汪中生等人^[1]综合分析了月地转移入射多种方案, 给出了设计轨道, 分析了各方案的优缺点和适用条件, 并通过绕月地转移入射轨道角动量矢量旋转方法搜索最优一次变轨策略的初值, 结论对工程设计有重要的参考价值. 因此本文不再对这些策略问题进行讨论, 重点分析了月地入射轨道的设计方法. 陆林等人^[2]在改进的双二体模型下, 采用差分进化算法与序列二次规划算法相互补充的双重优化算法计算轨道初值, 然后在高精度模型下, 利用序列二次规划算法对轨道初步设计的结果进行修正, 该方法对算法的要求较高, 且计算量较大. 郑爱武等人^[3,4]以出月球影响球的时刻和位置、速度为中间变量, 采用双向嵌套循

引用格式: 刘勇, 曹鹏飞, 马传令, 等. 基于逆向地月转移的月地入射控制方法. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2021, 51: 119503

Liu Y, Cao P F, Ma C L, et al. Trans-Earth insertion method based on the reversed Earth-to-Moon transformation (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2021, 51: 119503, doi: 10.1360/SSPMA-2021-0055

环搜索算法, 求解同时满足两端约束条件的精确月地转移轨道, 但该方法只给出了满足倾角和近月点高度的月地转移轨道, 该轨道与已知环月轨道存在升交点差, 不能给出月地入射参数. 类似地, 张磊等人^[5]以出月球影响球的时刻位置速度为中间变量, 通过位置修正月心段轨道, 通过速度修正地心段轨道, 经过多次迭代使得中间点位置速度偏差满足容差, 从而得到月地转移轨道. 周亮等人^[6]取月地返回轨道变轨点的状态作为设计变量, 提出选取月心段出口点的双曲线 B 平面参数作为第一次迭代的目标值, 选取地心段约束值作为第二次迭代的目标值, 建立基于双曲线 B 平面参数的快速微分修正月地返回轨道的精确设计方法. 冯飞等人^[7]利用二体拼接模型搜索符合地球再入终端约束的次级返回窗口, 最终在改进多圆锥截线法轨道计算中搜索确定符合全部约束条件的返回窗口. 周亮等人^[8]基于分段瞄准点预报显式制导的月地返回轨道修正方案. 李惠峰等人^[9]将空间绳系系统、储能系统和空间站系统概念相结合, 提出了一种旨在降低地月往返运输成本的新型空间投射-拦截平台概念, 分析了月地运输能力消耗. 刘银等人^[10]基于双二体假设建立了三维空间模型中月球探测器返回轨道的数学模型. 黄文德等人^[11]给出了经典的双二体模型月地返回轨道设计方法. 张磊等人^[12]提出地球椭圆 B 平面参数, 通过两级修正策略和落点匹配求得月地返回轨道. Shane等人^[13]提出了二体模型下给定两点地心距、飞行时间和再入角的伪兰伯特问题和求解方法, 然后基于该方法通过迭代修正月球影响球边界位置的方法得到月地转移轨道, 本质还是双二体模型. Gunther^[14]和Gerbracht等人^[15]给出了两脉冲和多脉冲月地入射优化模型. Ocampo和Saudemont^[16]与Ivashkin^[17]基于双二体模型月地入射参数初值求解, 然后从不同角度研究了月地转移问题.

综上所述, 在计算月地转移轨道时主要采用双二体圆锥曲线拼接方法, 基本都是正向求解思路, 有部分是从中间向两端求解, 但均需要多次迭代.

月地转移是从月球到地球的飞行过程, 与地月转移过程相反, 但二者动力学是相同的. 地月转移轨道设计相关研究理论^[18,19]较为成熟, B 平面参数收敛域大特性使其被广泛应用^[6,20]. 本文提出了一种采用逆向积分思路, 从地球终端直接修正近月点 B 平面参数的月地转移轨道的计算方法. 该方法只需一次微分改

正即可得到高精度的月地转移轨道, 计算速度提升且具有很好的收敛性. 在月地转移轨道计算方法基础上, 又进一步给出了解析最优的月地入射参数的计算方法, 无需数值寻优即可给出速度增量最小的月地入射参数, 并结合工程应用给出惯性定向模式下的工程实现方法. 以下对该方法进行详细的阐述.

2 月地转移轨道计算方法

再入点是航天器进入地球稠密大气的点, 通常以航天器到达地心距为赤道半径加120 km点作为再入点. 月地转移是从环月轨道飞行到地球再入点或近地点的飞行过程, 月地入射参数是从环月轨道进入地月转移轨道的速度脉冲或轨道机动脉冲, 转移时间是整个月地转移的飞行时间.

月地转移轨道的设计方法可以采用二体兰伯特转移加 B 平面参数修正的方式. 这种方法的特点是设计过程简单且收敛快速. 设计思路是先根据发射点或落点和轨道倾角用球面三角计算出升交点经度, 然后根据入轨点或再入点高度、转移时间求解兰伯特问题, 得到转移轨道初值, 最后瞄准近月点的 B 平面参数修正入轨点或再入点轨道参数, 从而得到精确的月地转移轨道.

2.1 再入点轨道初值计算

计算月地转移轨道需要给出再入日期, 因为月球公转相对于地球自转来说很慢, 对于给定的落点、倾角和转移时间, 轨道能量和相对地球的拱点方向基本确定, 所以每天有一条轨道会随地球转动扫过月球, 即每天有一条月地转移轨道. 需要人为给出的初始参数包括再入日期 T_0 、落点、轨道倾角 i 和月地转移时间 ΔT .

首先根据落点和倾角计算转移轨道的升交点经度初值. 如图1的球面三角形, O 为升交点, L 为落点, A 为经过 L 点的经线与赤道的交点, A 为直角, i 为轨道倾角.

在计算升交点经度初值时忽略地球自转的影响, 可得

$$\begin{aligned}\Omega_e &= \lambda_L - \arcsin \frac{\tan \varphi_L}{\tan i}, \text{ 升轨再入,} \\ \Omega_e &= \lambda_L + \arcsin \frac{\tan \varphi_L}{\tan i} - \pi, \text{ 降轨再入.}\end{aligned}\quad (1)$$

图 1 落点与升交点的球面三角关系

Figure 1 The spherical trigonometric relationship between landing point and ascending node.

根据再入日期或概略再入时间 T_0 , 计算格林威治经度 Ω_{g0} , 可以得到轨道的升交点赤经:

$$\Omega_0 = \Omega_{g0} + \Omega_e. \quad (2)$$

月球绕地球约 28 天转一圈, 相对地球自转来说角速度很小, 因此再入时间的调整对月球的位置影响较小, 可以用月球位置确定的轨道升交点赤经与概略再入时间确定的升交点赤经差修正再入时间. 插值月球星历表计算 $T_0 - \Delta T$ 时刻的月球位置 (x_m, y_m, z_m) , 并据此计算月球的赤经 λ_m 和赤纬 φ_m , 计算公式如下:

$$\lambda_m = \arctan \frac{y_m}{x_m},$$

$$\varphi_m = \arcsin \frac{z_m}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2 + z_m^2}}. \quad (3)$$

将月球的赤经赤纬代入式(1)计算轨道的升交点赤经 Ω_e , 修正概略再入时间可得再入时间初值 T_e , 计算公式如下:

$$T_e = T_0 + (\Omega_m - \Omega_{g0}) / \omega_e, \quad (4)$$

其中 ω_e 是地球自转角速度.

迭代 3–4 次再入时间的修正量就能小于 1 s. 有了再入时间初值, 下一步是计算转移轨道初值. 计算转移轨道初值时只考虑地心的引力, 计算方法如下:

(1) 计算 $T_e - \Delta T$ 时刻的月球位置, 得到月球的地心距 r_m , 再入点的地心距 r_e 为已知量, 人为给定飞行路径角 $\Delta\theta$ 用于粗略计算. 月球一般位于月地转移轨道的远地点附近, 因此飞行路径角可以设置为 170° 或 190° , 但不要 180° , 因为 180° 为奇异点不能唯一确定轨道. 由此求解月球到地球再入点的兰伯特转移问题, 得到轨道的半长轴 a 、偏心率 e 和月球在轨道上的真近点角 θ_m .

(2) 根据月球的位置, 利用球面三角计算轨道的升

交点赤经和近地点幅角.

月球的幅角 U_m 计算公式如下:

$$U_m = \arcsin \frac{\sin \varphi_m}{\sin i}, \text{ 升轨}, \quad (5)$$

$$U_m = \pi - \arcsin \frac{\sin \varphi_m}{\sin i}, \text{ 降轨}.$$

轨道的升交点赤经和幅角计算公式如下:

$$\Omega = \lambda_m - \arcsin \frac{\tan \varphi_m}{\tan i}, \text{ 升轨}, \quad (6)$$

$$\Omega = \lambda_m + \pi + \arcsin \frac{\tan \varphi_m}{\tan i}, \text{ 降轨}.$$

近地点幅角计算公式为

$$\omega = U_m - \theta_m. \quad (7)$$

再入点真近点角计算公式为

$$\theta = \theta_m + \Delta\theta. \quad (8)$$

至此, 月地转移轨道的再入时间和再入点的轨道六根数初值计算完毕.

2.2 月地转移轨道的修正

上一节的再入点轨道参数是基于二体兰伯特计算的, 没有考虑月球引力和地球非球形等一系列摄动, 所以需要进行修正以获得精确的月地转移轨道. 再入点参数的定义与导航算法有关, 一般在地球固联坐标系中定义. 下面给出按地固系定义的再入角 γ 、轨道倾角 i_e 计算月地转移轨道的方法, 待求变量为再入航程 U_r 、再入速度 v_e 和再入时间修正量 ΔT_e .

根据落点经纬度、再入航程和轨道倾角可以得到再入点的经纬度. 再入点与落点的关系如下:

落点的经纬度 (λ_L, φ_L) 为已知参数, 图 2 中 U_L 为目标

图 2 再入点与落点的关系

Figure 2 The relationship of reentry point and landing point.

落点的幅角, 这里只给出升轨再入的公式, 如下:

$$U_L = \arcsin \frac{\sin \varphi_L}{\sin i_c}, \quad (9)$$

其中 i_c 为地固系倾角. 落点到升交点的经度差 $\Delta \lambda_L$ 为

$$\Delta \lambda_L = \arctan \frac{\sin U_L \cos i_c}{\cos U_L}. \quad (10)$$

再入点的幅角为

$$U_E = U_L - U_r. \quad (11)$$

再入点到升交点的经度差 $\Delta \lambda_E$ 为

$$\Delta \lambda_E = \arctan \frac{\sin U_E \cos i_c}{\cos U_E}. \quad (12)$$

再入点的经度为

$$\lambda_E = \lambda_L - \Delta \lambda_L + \Delta \lambda_E. \quad (13)$$

再入点的纬度为

$$\varphi_E = \arcsin(\sin U_E \sin i_c). \quad (14)$$

再入点的飞行方位角:

$$A = \arcsin(\sin \Delta \lambda_E / \sin U_E). \quad (15)$$

再入点的地固系位置:

$$\begin{cases} x_c = R \cos \lambda_E \cos \varphi_E, \\ y_c = R \sin \lambda_E \cos \varphi_E, \\ z_c = R \sin \varphi_E, \end{cases} \quad (16)$$

其中, R 为再入点地心距, 为已知量. 下面计算再入点的速度. 定义再入坐标系, Y 轴为天顶方向, X 轴在轨道面内垂直于 Y 轴指向飞行方向, Z 轴由右手定则决定, 如图3所示.

再入系到地固系的旋转矩阵为

$$\mathbf{L}_{je} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda_E \sin A - \cos \lambda_E \sin \varphi_E \cos A & \cos \lambda_E \cos \varphi_E & -\sin \lambda_E \cos A + \cos \lambda_E \sin \varphi_E \sin A \\ \cos \lambda_E \sin A - \sin \lambda_E \sin \varphi_E \cos A & \sin \lambda_E \cos \varphi_E & \cos \lambda_E \cos A + \sin \lambda_E \sin \varphi_E \sin A \\ \cos \varphi_E \cos A & \sin \varphi_E & -\cos \varphi_E \sin A \end{bmatrix}. \quad (17)$$

在再入坐标系的速度为

$$\begin{cases} v_x = v_c \cos \gamma, \\ v_y = v_c \sin \gamma, \\ v_z = 0. \end{cases} \quad (18)$$

将再入系速度用式(17)的旋转矩阵转换到地固系, 再根据再入时间将地固系的位置速度转换到J2000惯性系即得到再入点的轨道参数. 然后逆向积分到近月点, 计算近月点的 B 平面参数, B 平面参数的计算方法可以参见文献[4], 需要注意的是, 逆向计算 B 平面参数时的渐进线矢量要反号. 微分修正再入时刻、再入速度和再入航程使得 B 平面参数和月地转移时间偏差满足精度指标即得到月地转移轨道.

月地转移轨道计算过程如下:

(1) 求解从月球到再入点的兰伯特问题.

(2) 考虑地球和月球质点引力瞄准近月点 B 平面参数求解月地转移轨道.

(3) 高精度模型下瞄准近月点 B 平面参数求解月地转移轨道.

注意, 这里一直使用的是近月点的 B 平面参数, 它

与轨道根数精确对应, 因此得到的转移轨道是精确的, 转移轨道的精度取决于逆向轨道积分所采用的动力学模型和积分器的精度. 该方法适用于所有时段的地月/月地转移轨道的设计, 而且计算效率很高, 在主频2G的单CPU计算机上不到10 s的时间即可得到一条高精度转移轨道, 如果仅考虑日地月和J2摄动则耗时约1 s.

图4是采用该方法计算的2020年11月19日–2038年11月13日的每天一条共6570条月地转移轨道的半长轴(月地转移时间设为4 d, 近月点高度为200 km, 倾角45°, 再入点参数见3.1节).

18年中的每条转移轨道都快速而正确地计算出来, 证明算法可适用于不同的地月关系. 其他环月倾角、转移时间、近月距等参数设置同样可以快速而正确地计算, 由于篇幅限制这里不再给出.

3 月地入射参数计算方法

在计算出月地转移轨道后, 计算转移轨道与环月轨道的交点就可得到月地入射参数. 但初始状态航天器不一定在入射时刻到达交点, 因此需要对月地转移

图 3 再入坐标系示意图

Figure 3 The sketch map of reentry coordinate system.

图 4 (网络版彩图)月地转移轨道在再入点的半长轴

Figure 4 (Color online) The semi-major axis of Moon-to-Earth transfer trajectory at reentry point.

轨道进行修正, 如此迭代几次使得月地入射与环月轨道的拼接点的位置偏差小于给定的范围, 即完成连续轨迹的拼接. 为描述方便, 后面将月地入射时刻的月地转移轨道在月心的表示称为月地入射轨道.

3.1 指定倾角的月地入射参数

在相对月球的轨道倾角、转移时间、再入角和落点给定情况下, 可以计算得到月地入射后的轨道. 求解该轨道与环月轨道的交线, 并调整月地入射轨道近月点高度, 使得交线处入射前后轨道的月心距相等, 就得到了两条轨道的交点, 交点处入射后速度减入射前速度可以得到脉冲月地入射速度增量. 计算过程如下:

- (1) 设置月地入射轨道近月点高度 R_p 为环月轨道高度, 倾角为指定值.
- (2) 计算月地转移轨道和月地入射后轨道.
- (3) 计算月地入射前轨道与月地入射后轨道的交

线, 得到交线处的轨道幅角, 取入射后真近点角小的幅角计算交线处的入射前月心距 R_b 和入射后月心距 R_c .

- (4) 等比调整月地入射近月距.

$$R_{p(k+1)} = R_{p(k)} R_b / R_c, \quad (19)$$

其中下标 (k) 表示第 k 次迭代结果, 下同.

- (5) 计算当前入射时刻环月轨道到交线处的飞行时间 δt_b , 和入射后轨道近月点到交线的飞行时间 δt_c , 据此修正入射时刻 $T_{c(k+1)}$ 和月地转移时间 ΔT .

$$\begin{aligned} T_{c(k+1)} &= T_{c(k)} + \delta t_b, \\ \Delta T &= T_c - T_{c(k+1)} - \delta t_c. \end{aligned} \quad (20)$$

- (6) 回到(2), 直到 $|R_b - R_c| < \varepsilon$.

- (7) 用交点处的入射后速度减入射前速度即得到月地入射速度增量.

不调整轨道倾角的情况下, 入射点不一定在近月点, 可能存在较大的径向和法向分量, 速度增量较大. 通过对倾角的寻优, 可以得到最优月地入射倾角. 为分析倾角对入射速度增量的影响, 这里将倾角从 1° – 90° 遍历计算了月地入射速度增量. 瞄准参数为: 地固系再入角 -5.8° , 再入点地心距 6498.140 km , 地固系倾角 45° , 瞄准落点 $(111.433^\circ \text{E}, 42.350^\circ \text{N})$.

环月轨道参数见表 1.

摄动项包括日地第 3 体摄动, 月球非球形 (40×40 阶). 月地入射速度增量与倾角关系如图 5 所示.

曲线显示, 速度增量与倾角的关系不是单峰函数关系, 出现两个谷底, 因此用 618 法和二次插值法等经典高效的单变量优化算法不便求解. 遍历计算的结果是倾角为 45° 时速度增量最小, 速度增量为 852.669 m/s .

3.2 解析最优的月地入射参数

月地入射最优倾角可以解析求解, 因为有两个先验信息: (1) 月地入射初始点为近月点时能量最优, 即月地入射的主脉冲为轨道切向脉冲; (2) 转移参数的调整对月地入射的逃逸速度矢量影响很小. 在保持升交点和近月点幅角不变的情况下, 通过求解倾角使得月地转移轨道的近月点在环月轨道的平面内, 并调整近月点高度使环月轨道与入射轨道相交, 即可得到月地入射参数.

表 1 月地入射前环月轨道参数

Table 1 The orbit before TEI

历元(北京时间)	坐标系	半长轴 (km)	偏心率	倾角 (°)	升交点赤经 (°)	近月点幅角 (°)	平近点角 (°)
2020-11-14T00:38:42.485	J2000坐标系	1947.767	0.00630358	34.054	94.903	83.952	215.528
	主轴系	1947.767	0.00630358	43.274	91.601	49.28	215.528

令 $\mathbf{N}$ 为环月轨道的轨道法线矢量, $\mathbf{L}$ 为月地入射轨道的近月矢量, 如果 $\mathbf{L}$ 在环月轨道平面内, 则必有

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (21)$$

据此即可求解出月地入射轨道倾角, 从而求解月地入射参数. 计算过程如下.

(1) 取初始环月轨道的轨道倾角和月心距作为月地转移轨道的近月点目标参数的初值, 并给定入射时刻 $T_{c(0)}$ 和再入时刻 $T_{c(0)}$ 初值.

(2) 计算月地转移时间 $T_t = T_{c(k)} - T_{c(k)}$.

(3) 逆向计算月地转移轨道得到近月点轨道参数和再入时刻 $T_{c(k+1)}$ 及相应的再入点轨道. 新的再入时刻将作为下一次迭代计算的初值.

(4) 计算逆向求得的月地转移轨道的近月矢量 $\mathbf{L}$.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i \\ \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i \\ \sin\omega\sin i \end{bmatrix}. \quad (22)$$

(5) 以求得的月地转移轨道升节点为转轴, 保持月地转移近月点幅角 ω 不变, 使得近月点矢量在入射前轨道平面内, 如图6所示.

图 5 (网络版彩图)月地入射倾角与速度增量的关系

Figure 5 (Color online) The relation between TEI inclination and velocity incensement.

将式(21)展开可得求解入射轨道倾角 i 的公式:

$$\begin{aligned} A &= N_y \sin\omega \cos\Omega - N_x \sin\omega \sin\Omega, \\ B &= N_z \sin\omega, \\ C &= -N_x \cos\omega \cos\Omega - N_y \cos\omega \sin\Omega, \\ \beta &= \arctan(B/A), \\ \alpha &= \arccos\left(C/\sqrt{A^2 + B^2}\right), \\ i_{k+1} &= \begin{cases} \beta - \alpha, & |\beta + \alpha - i_k| > |\beta - \alpha - i_k| \\ \beta + \alpha, & |\beta + \alpha - i_k| \leq |\beta - \alpha - i_k| \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

其中 N_x , N_y , N_z 为矢量 $\mathbf{N}$ 的分量, i_k 是上一步的月地转移目标倾角, i_{k+1} 是新的月地转移目标倾角, 其余为中间变量.

(6) 用 i_k 替换当前求得的月地入射轨道的倾角, 计算两个轨道面的交线, 选择距离入射轨道近月点最近的点作为交线, 得到相应入射轨道真近点角 θ_c 和环月轨道的交点处真近地角 $\theta_b \in (-\pi, \pi)$, 并计算该处的入射前轨道的月心距 R_b 、入射后轨道的月心距 R_c 和当前入射时刻环月轨道到交点处的飞行时间 $\delta t_b \in (-P, P)$, P 为环月轨道周期.

图 6 月地入射控制前后轨道关系

Figure 6 Orbit relationship before and after TEI control.

(7) 根据 δt_b 修正入射时刻和入射前环月轨道.

$$T_{c(k+1)} = T_{c(k)} + \delta t_b. \quad (24)$$

(8) 用式(19)计算月地转移轨道目标近月距.

因为环月轨道不一定是圆轨道, 月地入射点就不一定在环月轨道和入射轨道的近月点, 而是在环月轨道和入射轨道的交点, 因此这里按交点处的入射前后月心距来等比例修正入射轨道近月距.

(9) 回到(2)继续迭代计算, 直到入射前后的位置偏差小于给定的精度指标.

将交点处的入射轨道和环月轨道参数转换成位置速度, 其速度差即为入射脉冲速度大小 $\Delta \mathbf{v}_c$.

在3.1相同输入条件下, 解析求解得到的月地入射轨道倾角为 44.810° , 速度增量为 850.108 m/s , 与遍历搜索的结果一致, 由此证明了算法的正确性.

4 有限推力模型下的月地入射参数求解

在工程实施上, 轨道控制在有限的推力作用下实现. 有限推力控制过程开关机点通常跨越近月点, 必然造成重力损失. 因此用脉冲解去实施轨道控制, 将偏离目标甚至可能造成探测器不能再入, 需要进一步迭代计算有限推力控制参数. 在有限推力模式下控制变量为: 开机时刻 T_{on} 、开机时长 Δt 、偏航角 ψ 和俯仰角 θ ; 目标量为: 再入时刻偏差 ΔT_c 、再入时刻地固系再入角 γ 和轨道倾角 i_c . 其中的落点偏差可以通过迭代目标再入时刻进行快速调整. 公式如下:

$$T_c = T_c^* + \frac{\Omega_c^* - \Omega_c}{\omega_c}, \quad (25)$$

其中 Ω_c 用式(1)计算, Ω_c^* 为当前轨道升交点经度, T_c^* 为当前算得的再入时刻, ω_c 为地球自转角速度.

控制变量比目标量多一个, 可以对俯仰角进行优化以得到最小燃料解. 假定轨道控制过程探测器推力方向在惯性空间不变, 依据3.2节计算的惯性系脉冲速度增量转换到速度坐标系得到 $\Delta \mathbf{v}_o$, 根据速度增量计算有限推力模式下的轨控开机时长 Δt , 即可得到有限推力模式下的求解初值.

开机时刻为

$$T_{on} = T_c - \Delta t/2. \quad (26)$$

偏航角为

$$\psi = \arctan \frac{\Delta v_{oy}}{\Delta v_{ox}}. \quad (27)$$

俯仰角为

$$\theta = \arcsin \frac{\Delta v_{oz}}{|\Delta \mathbf{v}_o|}. \quad (28)$$

惯性定向模式需对速度坐标系下的俯仰角进行修正:

$$\theta^* = \theta - \Delta\theta + \gamma_\theta - \gamma_{\theta-\Delta\theta}, \quad (29)$$

其中, γ_θ 为脉冲开机点的速度倾角, $\gamma_{\theta-\Delta\theta}$ 为沉底开机点的速度倾角, $\Delta\theta$ 为开机点到脉冲点的幅角差, 用 $\Delta t/2$ 计算. 用该方式计算的俯仰角已非常接近燃料最优解, 可以固定为 θ^* 然后微分改正求解其他参数.

需注意, 月地入射控制的目标变量最好不要用时间终止点的地固系倾角、再入角, 因为地固系参数与探测器所在位置密切相关, 如在赤道附近地表地固系的牵连速度约 300 m/s , 如果终止点高度为两倍地球半径, 则牵连速度翻倍, 这对地固系倾角影响很大, 易造成迭代发散. 此外, 如果开机时间过长, 将脉冲解作为有限推力解的初值时可能不会再入, 这时可以先以近地点参数为目标进行求解, 使得求解结果能够保证再入.

整个月地入射计算流程如图7所示.

月地入射在近月点加速的速度一般较大, 对于轨道平面调整量比较小的情况, 在近月点通过一个脉冲综合控制轨道半长轴和轨道平面可以节省推进剂, 因为三角形斜边的长度小于两个直角边长度的和. 多脉冲控制则可通过在距离月球较远的位置减小修正平面的速度增量, 但在平面偏差较小而本身加速度较大的情况下综合控制的速度增量更小.

如果发动机推力较小或有其他因素限制开机时长, 可以基于单脉冲解设计两脉冲控制策略. 第一脉冲将近圆环月轨道加速控制成为大椭圆轨道, 第二脉冲为入射控制. 由于调整大椭圆轨道的近月点幅角速度增量较大, 因此第一脉冲控后轨道的近月点应该与月地入射轨道的近月点方向相同. 而对于近圆轨道, 加速控制点决定了近月点的位置, 因此需优化的主要变量是第一脉冲时刻. 第一脉冲的目标半长轴除了分担一部分加速控制外, 还起到调相的作用. 两次加速的偏航角也是需要优化的参数, 但以单脉冲求得的偏航角作为第一脉冲的偏航角也比较接近最优解, 由于篇

图 7 (网络版彩图)有限推力月地入射计算流程图

Figure 7 (Color online) Flow chart of finite force calculation of TEI.

幅限制这里不再展开讨论.

5 月地入射轨道分析

月地入射后轨道在月球赤道坐标系的升交点的经度主要受月地转移时间的影响, 而月地入射的日期对其影响较小. 图8是月地入射日期从2020-11-16到2020-11-26, 月地转移时间从60 h到144 h, 相对月球的倾角(主轴系)为43.7°的月地入射轨道的升交点经度.

由图8可看到, 月地转移时间变化24 h, 月球轨道

图 8 (网络版彩图)月地转移时间与月固系轨道升交点经度

Figure 8 (Color online) The Moon-to-Earth transformation time and the longitude of ascending node of TEI orbit.

升交点经度变化约25°, 而入射日期改变1 d, 在同样的月地转移时间情况下升交点经度变化约1°. 出现这种情况的原因是, 对于直接月地转移轨道, 入射后轨道相对地球来说基本处于远地点, 在同样的转移时间情况下, 入射日期对半长轴影响不大, 因此探测器相对月球的速度差异不大. 月地转移时间决定转移轨道的半长轴, 由此带来相对月球的速度不同, 因此升交点不同. 而且转移时间对再入航程会有较大影响, 因此月地转移时间的可选择区间比较小, 一般取3–5 d, 可以通过遍历方法确定. 通过转移时间的设计, 月地入射轨道的升交点经度可以很快确定下来.

在月地入射轨道升交点经度确定后, 可以按如下公式简单解析地确定月地入射时间:

$$T_c = T_0 + \frac{\Omega_0 - \Omega_T}{\omega_L}, \quad (30)$$

其中 Ω_0 为 T_0 时刻环月轨道的主轴系升交点经度, Ω_T 是月地入射的主轴系升交点经度, ω_L 是月球自转角速度. 环月轨道的非球形摄动对轨道升交点影响较小, 在月球捕获后环月轨道平面基本确定, 因此在月球捕获后即可粗略计算出月地入射时间. 然后在粗略计算的月地入射时间前后2–3 d搜索或优化即可得到最优的入射时间. 准确的月地入射时刻需要考虑测控约束并使得推进剂消耗最小. 由于测控条件的限制, 基本上一天一个测控弧段, 搜索间隔也是以天或圈为单位, 搜索的工作量也很小.

例如, 3 d转移时间的月地入射升交点经度约60°, 表1中的轨道升交点经度约91°, 因此最佳入射时刻大

约在表1历元的2 d后, 即2020年11月16日. 为了清晰地认识月地入射时间与速度增量的关系, 下面仍以表1的轨道参数为初值, 月地转移时间为3 d, 按20 min为间隔计算了相应的月地入射速度增量和相应的偏航角.

从图9可看出, 最优的月地入射时刻为2020-11-15T15:40, 与解析计算的入射时刻偏差小于1 d. 图9中曲线出现间断是因为月地入射点逐级向后推移时, 再入时刻改变很小, 压缩了月地转移时间, 当压缩到一定程度时落点修正再入时刻增加了一天. 图10为月地入射的偏航角与速度增量的关系.

从图10可看出, 速度增量最小的月地入射时刻并不是偏航角为 0° 的时刻, 而是略有偏差. 造成这种现象的原因是, 月地入射的速度增量不仅与入射前后轨道平面偏差有关, 还与月球所处的位置、再入轨道倾角等因素有关. 因此可以通过调整地月或月地转移时间等调整环月轨道平面, 使得月地入射控制速度增量更小, 但这势必对使命轨道造成影响. 轨道设计是个整体综合优化的工作, 不能仅关注于一个方面.

基于表1的轨道, 以2020-11-15T16:08:12为控制初始时间, 发动机推力3000 N, 比冲3000 m/s, 探测器的质量为1800 kg. 用3.1节方法计算的脉冲月地入射参数的过程如表2所示.

从上面的计算过程可看出, 迭代过程具有极高的收敛效率, 3次迭代月地入射控制时刻即从约1 h收敛到小于1 s, 倾角精度达到 0.001° . 近月距则一次迭代精度即达到5 m以下. 上述脉冲解控制时刻为2020-11-15T17:06:53, 偏航角 6.046° , 速度增量 850.108 m/s , 转换为有限推力控制的俯仰角为 -10.391° . 有限推力迭代最后的解为2020-11-15T17:03:06, 偏航角 6.275° , 速度增量 854.778 m/s , 再入时刻修正为2020-11-19T03:14:13. 有限推力解的速度增量比脉冲解多了 4.67 m/s , 重力损失 0.55% . 对俯仰角进行数值寻优得到最优俯仰角为 -10.291° , 速度增量为 854.777 m/s , 可见解析求得的俯仰角非常接近数值最优解.

6 结论

月地入射是经典的月球探测轨道设计问题, 但仍值得进行深入的研究. 月地转移是地月转移的逆过程, 可以使用地月转移轨道的设计方法设计月地转移轨道. 以B平面参数作为月地入射点目标参数的方法收

图9 (网络版彩图)月地入射时间与入射速度增量关系

Figure 9 (Color online) The velocity increment and insertion time of TEI.

图10 (网络版彩图)月地入射偏航角与入射速度增量关系

Figure 10 (Color online) The yaw angle and velocity increment of TEI.

表2 月地入射迭代过程

Table 2 The iterative process of TEI

序号	近月距 (km)	倾角 ($^\circ$)	入射时刻修正量 (s)
初值	1935.484	43.281	—
1	1959.931	45.098	3519.337
2	1959.932	44.793	1.967
3	1959.933	44.811	0.308
4	1959.933	44.810	-0.006

敛域宽、收敛速度快、适用范围广, 有很高的实用价值.

根据速度增量最小条件可以得到月地入射最优倾角的解析解. 解析解的运用能极大地提高轨道设计效率和月地入射控制参数的计算效率. 月地入射的速度

增量不仅与入射前后轨道平面偏差有关, 还与月球所处的位置、再入轨道倾角等因素有关, 因此速度增量最小的月地入射时刻偏航角并不一定为 0° , 可以通过调整地月或月地转移时间等调整环月轨道平面, 使得月地入射控制速度增量更小. 但轨道设计是个整体综合优化的工作, 不能仅关注于月地入射一个方面, 否

则可能会对使命轨道造成影响, 使其他的性能指标下降.

本文提出的方法在嫦娥五号工程的月地入射控制和应急控制策略设计中得到了应用, 取得了很好的效果. 该方法可以用于月球采样返回轨道设计, 也可以推广应用到其他行星探测的轨道设计中.

参考文献

- Wang Z S, Meng Z F, Gao S, et al. Optimization design of spacecraft trans-Earth insertion strategy (in Chinese). *Spacecraft Eng*, 2019, 28: 13–21 [汪中生, 孟占峰, 高珊, 等. 探测器月地转移入射变轨策略优化设计. *航天器工程*, 2019, 28: 13–21]
- Lu L, Yang L Y, Li H Y, et al. Optimal design and characteristics analysis of the Moon-Earth return trajectory for manned spacecraft (in Chinese). *Systems Eng Electron*, 2019, 41: 179–185 [陆林, 杨路易, 李海阳, 等. 载人飞船月地返回轨道优化设计与特性分析. *系统工程与电子技术*, 2019, 41: 179–185]
- Zheng A W, Zhou J P. Accurate design of Moon-Earth transfer orbit (in Chinese). *J Spacecraft TT&C Technol*, 2014, 33: 52–58 [郑爱武, 周建平. 月地转移轨道精确轨道设计. *飞行器测控学报*, 2014, 33: 52–58]
- Zheng A W, Zhou J P, Liu Y. Fast design method of Moon-to-Earth transfer trajectory (in Chinese). *J Beijing Univ Aeron Astron*, 2014, 40: 344–349 [郑爱武, 周建平, 刘勇. 月地转移轨道快速设计方法. *北京航空航天大学学报*, 2014, 40: 344–349]
- Zhang L, Yu D Y, Zhang H. Fast design and characteristics analysis of the Moon-Earth transfer trajectory (in Chinese). *Chin Space Sci Technol*, 2011, 31: 62–70 [张磊, 于登云, 张焱. 月地转移轨道快速设计与特性分析. *中国空间科学技术*, 2011, 31: 62–70]
- Zhou L, Hu J. Moon-Earth return trajectory precise design of fast differential correction based on B -plane parameters of hyperbola (in Chinese). *Aerospace Control*, 2012, 30: 27–31 [周亮, 胡军. 基于双曲线 B 平面参数的快速微分修正月地返回轨道精确设计. *航天控制*, 2012, 30: 27–31]
- Feng F, Zhang Y S. Design of launch window for lunar south pole return mission with multi restrictions (in Chinese). *Aerospace Control Appl*, 2017, 43: 21–27 [冯飞, 张雅声. 多约束条件下月球南极探测返回窗口设计. *空间控制技术与应用*, 2017, 43: 21–27]
- Zhou L, Hu J. On midcourse correction of Moon-Earth return trajectory based on subsection aim point prediction explicit guidance (in Chinese). *Aerospace Control Appl*, 2013, 39: 1–6 [周亮, 胡军. 基于分段瞄准点预报显式制导的月地返回轨道中途修正研究. *空间控制技术与应用*, 2013, 39: 1–6]
- Li H F, Lin Z H, Xu S B. A new concept of Moon-Earth space transportation platform (in Chinese). *Aerospace Control Appl*, 2009, 35: 43–47 [李惠峰, 林振海, 薛松柏. 新型月地空间运输平台概念设计. *空间控制技术与应用*, 2009, 35: 43–47]
- Liu Y, Ru J X, Zhu Y G, et al. Preliminary analysis of cislunar trajectory parameters (in Chinese). *Missiles Space Vehicles*, 2011, 1: 1–5 [刘银, 茹家欣, 朱永贵, 等. 月地返回轨道参数的初步分析. *导弹与航天运载技术*, 2011, 1: 1–5]
- Huang W D, Xi X N, Wang W. Launch window analysis and design for manned landing mission return from the Moon (in Chinese). *J Spacecraft TT&C Technol*, 2010, 29: 48–53 [黄文德, 郗晓宁, 王威. 载人登月返回轨道发射窗口分析与设计. *飞行器测控学报*, 2010, 29: 48–53]
- Zhang L, Yu D Y, Zhang H. Design of Moon return trajectory with direct atmospheric reentry (in Chinese). *Spacecraft Eng*, 2010, 19: 50–55 [张磊, 于登云, 张焱. 直接再入大气的月球返回轨道设计研究. *航天器工程*, 2010, 19: 50–55]
- Shane B R, David K G. A simple targeting procedure for lunar trans-Earth injection. In: *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. Chicago Illinois: AIAA, 2009
- Gunther P. Asymptotically optimum two-impulse transfer from lunar orbit. *AIAA J*, 1966, 4: 346–352
- Gerbracht R J, Penzo P A. Optimum three-impulse transfer between an elliptic orbit and a non-coplanar escape asymptote. In: *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference*. Washington DC: AIAA, 1968
- Ocampo C, Saudemont R R. Initial trajectory model for a multi-maneuver Moon-to-Earth abort sequence. *J Guidance Control Dyn*, 2010, 33: 1184–1194
- Ivashkin V. On the Moon-to-Earth trajectories with gravitational escape from the Moon attraction. In: *18th International Symposium on Space Flight Dynamics*. Munich, 2004

- 18 Peng Q B, Shen H X, Li H Y. Rapid design and characteristics analysis of Earth-Moon transfer trajectory for manned lunar mission (in Chinese). *Manned Spaceflight*, 2015, 18: 18–24 [彭祺攀, 沈红新, 李海阳. 载人登月地月转移轨道快速设计及特性分析. *载人航天*, 2015, 18: 18–24]
- 19 Peng Q B, Zhang H L. Review of lunar transfer trajectory modes for manned lunar mission (in Chinese). *Manned Spaceflight*, 2016, 22: 663–672 [彭祺攀, 张海联. 载人登月地月转移轨道方案综述. *载人航天*, 2016, 22: 663–672]
- 20 Zhang Y, Liu Y, Chen L D. Calculation and analysis of P-plane parameters (in Chinese). In: *The 5th International Conference on Manned Space Flight*. Xi'an, 2018. 597–603 [张尧, 刘勇, 陈莉丹. P平面参数的计算与分析. 见: 第五届载人航天(国际)学术大会. 西安, 2018. 597–603]

Trans-Earth insertion method based on the reversed Earth-to-Moon transformation

LIU Yong^{1,2*}, CAO PengFei^{1,2}, MA ChuanLing^{1,2} & CHEN LiDan^{1,2}

¹ *Beijing Aerospace Flight Control Center, Beijing 100094, China;*

² *Aerospace Flight Dynamics Laboratory, Beijing 100094, China*

The Moon-to-Earth transformation is the reversed procession of the Earth-to-Moon transformation. Thus, the trans-Earth insertion method based on reversing the Earth-to-Moon transformation is proposed. The trans-Earth insertion is obtained by using the intersection of the low lunar orbit and Moon-to-Earth transformation orbit and adjusting the scale for the height of the low lunar orbit's perigee. The optimal inclination of the trans-Earth insertion orbit is analytically obtained by minimizing the velocity increment and is proven by numerical searching. Based on the pulse results, the finite-force control parameter is also proposed for determining the optimal pitch angle. Finally, the trans-Earth insertion parameter is calculated by using a low lunar orbit, and the minimized velocity increment is found to not always be present for instances when the yaw angle is zero.

reversed integral, Moon-to-Earth transfer, trans-Earth insertion, orbit maneuver, analytical solution

PACS: 02.60.Gf, 02.60.Pn, 95.55.Pe, 97.75.Pq

doi: [10.1360/SSPMA-2021-0055](https://doi.org/10.1360/SSPMA-2021-0055)