第 61 卷　第 4 期　　厦门大学学报(自然科学版)　　Vol. 61　No. 4
2022 年 7 月　　Journal of Xiamen University (Natural Science)　　Jul. 2022
doi:10.6043/j.issn.0438-0479.202010005

([0,1],[0,1])-模糊拟阵的基和秩函数

代恩华[1],修振宇[2*]
(1.聊城大学东昌学院数学与信息工程系,山东 聊城 252000;2.成都信息工程大学应用数学学院,四川 成都 610000)

摘要:给出了闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵的基和秩函数,即模糊基的模糊族和模糊秩函数.证明了模糊基的模糊族和模糊秩函数与闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵是一一对应的.

关键词:模糊拟阵;模糊族;模糊基;模糊秩函数
中图分类号:O 189.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:0438-0479(2022)04-0697-04

拟阵是图和矩阵的推广,在数学中扮演着重要的角色,尤其是在应用数学中,正是简单有效的贪婪算法所要求的结构[1]. 1988 年,Goetschel 等[2]定义了有限集 E 上的模糊拟阵. Shi[3]提出了 L-拟阵,其中 L 为完全分配格. Huang 等[4]证明了完备的[0,1]-拟阵等价于模糊拟阵. 在 L-拟阵的理论框架下,基、圈、秩函数和闭包算子等概念被广泛研究[5-10]. Shi[11]提出一种新的拟阵的模糊方式,即,M-模糊化拟阵,其中 M 为完全分配格;又定义了 M-模糊化秩函数,并证明了 M-模糊化秩函数和 M-模糊化拟阵是一一对应的. Yao 等[12]定义了基映射和圈映射并证明了模糊化拟阵可由这两个映射刻画. 关于 M-模糊化拟阵的研究,还有很多概念,诸如 M-模糊化相关集[13],M-模糊化 α-平坦族[14]和 M-模糊化闭包算子[13],都可以等价刻画 M-模糊化拟阵.

Shi[3]提出了更为宽泛的模糊拟阵,即,(L,M)-模糊拟阵,其中 M 和 L 都是完全分配格,这是 L-拟阵和 M-模糊化拟阵的逻辑推广. 有关 L-拟阵和 M-模糊化拟阵的基和秩函数的研究都取得了不少成果[4,10-12]. 而目前关于 (L,M)-模糊拟阵的研究并不多,这促使我们来探究 (L,M)-模糊拟阵中基和秩函数的情况. 在本文中,当 M 和 L 都取为[0,1]时,给出闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵的概念,并建立相应的基公理和秩函数公理.

本文总假定 E 是一个有限集,$I=[0,1]$. 2^E 表示 E 所有子集构成的集合. $[0,1]^E$ 表示 E 上所有模糊集构成的集合. 对于 $A,B\in[0,1]^E$,关系 $A\leqslant B$ 定义为对 $\forall e\in E, A(e)\leqslant B(e)$. $[0,1]^E$ 中的最大元和最小元分别记为 χ_E 和 $\chi_\emptyset$. $[0,1]^E$ 的所有子集族构成的集合记为 $\mathcal{D}([0,1]^E)$. 关于模糊集的基本知识详见文献[15].

对于 $\mathcal{D}\subseteq[0,1]^E$,定义:

$\mathrm{Max}(\mathcal{D})=\{A\in\mathcal{D}: \forall B\in\mathcal{D}$,若 $A\subseteq B$,则 $A=B\}$;

$\mathrm{Low}(\mathcal{D})=\{A\in\mathcal{D}: \forall B\in\mathcal{D}$,若 $B\subseteq A$,则 $A=B\}$.

定义 1[16]　设 $A\in[0,1]^E$ 且 $a\in[0,1]$. 定义模糊集 A 的截集如下:

$$A_{[a]}=\{e\in E: A(e)\geqslant a\}, A_{(a)}=\{e\in E: A(e)>a\}.$$

定理 1[16]　对 $\forall A\in[0,1]^E$ 和 $a\in[0,1]$,$A_{(a)}=\bigcup_{b\in(a,1]}A_{[b]}=\bigcup_{b\in(a,1]}A_{(b)}$.

定义 2[3-4]　设 $A\in[0,1]^E$,$\mathbf{N}$ 表示自然数集. 称映射 $|A|:\mathbf{N}\to[0,1]$ 是 A 的模糊势,若对 $\forall n\in\mathbf{N}$,$|A|(n)=\bigvee\{a\in[0,1]: |A_{[a]}|\geqslant n\}$.

定义 3[3-4]　设 E 是一个有限集,$\mathcal{I}\subseteq[0,1]^E$. 称 $\mathcal{I}$ 是 E 上一族独立模糊集,若它满足条件:

(i) $\chi_\emptyset\in\mathcal{I}$;

(ii) $A\in[0,1]^E, B\in\mathcal{I}, A\subseteq B\Rightarrow A\in\mathcal{I}$;

(iii) 若 $A,B\in\mathcal{I}$,且对某个 $n\in\mathbf{N}$,$b=|B|(n)>|A|(n)$,则 $\exists e\in F(A,B)$ 使得 $(b\wedge A_{[b]})\cup e_b\in\mathcal{I}$,其中 $F(A,B)=\{e\in E: b\leqslant B(e), b>A(e)\}$.

收稿日期:2020-10-03　**录用日期**:2021-11-20
基金项目:中国博士后科学基金资助项目(2017M622563)
* **通信作者**:xzy@cuit.edu.cn
引文格式:代恩华,修振宇. ([0,1],[0,1])-模糊拟阵的基和秩函数[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2022,61(4):697-700.
Citation:DAI E H,XIU Z Y. Bases and rank functions for ([0,1],[0,1])-fuzzy matroids[J]. J Xiamen Univ Nat Sci,2022,61(4):697-700. (in Chinese)

若$\mathcal{I}$是 E 上一族独立模糊集,则称$(E,\mathcal{I})$是一个$[0,1]$-拟阵.

定义 4[11] 称逆序映射 $\lambda:\mathbf{N}\to[0,1]$是一个模糊自然数,若它满足 $\lambda(0)=1$,$\wedge_{n\in\mathbf{N}}\lambda(n)=0$. 所有的模糊自然数记为 $\mathbf{N}([0,1])$.

定义 5[3] 设$(E,\mathcal{I})$是一个$[0,1]$-拟阵. 定义映射 $R_{\mathcal{I}}:[0,1]^E\to\mathbf{N}([0,1])$如下:

$R_{\mathcal{I}}(A)=\vee\{|B|:\forall B\subseteq A,B\in\mathcal{I}\}$,

则称 $R_{\mathcal{I}}$是$(E,\mathcal{I})$的一个$[0,1]$-模糊秩函数.

定义 6[10] 称$[0,1]$-拟阵$(E,\mathcal{I})$是完备的,若它满足条件:任取 $A\in[0,1]^E$,若对$\forall a\in(0,1]$,$a\wedge A_{[a]}\in\mathcal{I}$,则 $A\in\mathcal{I}$.

设$(E,\mathcal{I})$是一个带有$[0,1]$-基本序 $0<a_0<a_1<\cdots<a_{r-1}<a_r=1$ 的$[0,1]$-拟阵. 称$(E,\mathcal{I})$是闭的,若 $a_{i-1}<a\leqslant a_i(1\leqslant i\leqslant r)$,则$\mathcal{I}_{[a]}=\mathcal{I}_{[a_i]}$.

定义 7[3] 称映射$\mathcal{I}:[0,1]^E\to[0,1]$是 E 上一个独立$[0,1]$-模糊集的$[0,1]$-模糊集族,若它满足条件:

(i) $\mathcal{I}(\chi_\emptyset)=1$;

(ii) 对$\forall A,B\in[0,1]^E$,$A\subseteq B\Rightarrow\mathcal{I}(A)\geqslant\mathcal{I}(B)$;

(iii) 若 $A,B\in[0,1]^E$ 和 $n\in\mathbf{N}$,$b=|B|(n)>|A|(n)$,则 $\vee_{e\in F(A,B)}\mathcal{I}((b\wedge A_{[b]})\cup e_b)\geqslant\mathcal{I}(A)\wedge\mathcal{I}(B)$.

若$\mathcal{I}$是 E 上的一个独立$[0,1]$-模糊集的$[0,1]$-模糊集族,则称$(E,\mathcal{I})$是一个$([0,1],[0,1])$-模糊拟阵.

定理 2[3] 设$\mathcal{I}:[0,1]^E\to[0,1]$是一个映射. 则下面的条件等价:

(i) $(E,\mathcal{I})$是一个模糊拟阵;

(ii) 对$\forall a\in[0,1)$,$(E,\mathcal{I}_{(a)})$是$[0,1]$-拟阵.

定义 8[4] 设$(E,\mathcal{I})$是一个$[0,1]$-拟阵. 称$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}=\mathrm{Max}(\mathcal{I})$为$(E,\mathcal{I})$的一个模糊基族,$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$中的每个元素为$(E,\mathcal{I})$的模糊基.

定理 3[4] 设$(E,\mathcal{I})$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵且$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$为其一个模糊基族. 则

(i) 对$\forall a\in(0,1]$,$\mathrm{Max}((\mathcal{B}_{\mathcal{I}})_{[a]})=\mathcal{B}_{(\mathcal{I}_{[a]})}$,其中$\mathcal{B}_{(\mathcal{I}_{[a]})}$表示$(E,\mathcal{I}_{[a]})$的一个模糊基族;

(ii) 取 $A\in[0,1]^E$. 若$\exists B_a\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$使得对$\forall a\in(0,1]$,$a\wedge A_{[a]}\leqslant B_a$. 则$\exists B\in\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$使得$A\leqslant B$.

又设$\mathcal{B}\subseteq[0,1]^E$. 若$\mathcal{B}$满足定理 3 条件(i)和(ii),则$\mathcal{I}_{\mathcal{B}}=\mathrm{Low}(\mathcal{B})$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵且 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}}}=\mathcal{B}$.

定理 4[10] 设$(E,\mathcal{I})$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵,R 是$(E,\mathcal{I})$的$[0,1]$-模糊秩函数. 则 R 满足条件:

(i) 对$\forall A\in[0,1]^E$,$\underline{0}\leqslant R(A)\leqslant|A|$;

(ii) 若 $A,B\in[0,1]^E$ 和$A\leqslant B$,则 $R(A)\leqslant R(B)$;

(iii) 对 $\forall A,B\in[0,1]^E$,$R(A)+R(B)\geqslant R(A\wedge B)+R(A\vee B)$;

(iv) 对$\forall a\in(0,1]$和 $A\in[0,1]^E$,$R(a\wedge A_{[a]})_{[a]}=R(A)_{[a]}$.

定理 5[10] 设映射 $R:[0,1]^E\to\mathbf{N}([0,1])$满足定理 4 条件(i)～(iv). 定义$\mathcal{I}_R=\{A\in[0,1]^E:\forall a\in(0,1],A_{[a]}\in\mathcal{I}_{R_a}\}$,对$\forall a\in(0,1]$和 $B\in 2^E$,$R_a(B)=R(B\wedge a)_{[a]}$和$\mathcal{I}_{R_a}=\{B\in 2^E:R_a(B)=|B|\}$. 则

(i) $\mathcal{I}_R=\{A\in[0,1]^E:R(A)=|A|\}$;

(ii) $(E,\mathcal{I}_R)$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵;

(iii) R 是$(E,\mathcal{I}_R)$的$[0,1]$-模糊秩函数.

定理 6[10] 设$(E,\mathcal{I})$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵且 $R_{\mathcal{I}}$为其$[0,1]$-模糊秩函数. 则 $R_{\mathcal{I}}(A)=|A|\Leftrightarrow A\in\mathcal{I}$.

1　模糊基的模糊族

定义 9 设$(E,\mathcal{I})$是一个$([0,1],[0,1])$-模糊拟阵. 对$\forall a\in[0,1)$,若$(E,\mathcal{I}_{(a)})$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵,则称$(E,\mathcal{I})$是一个闭的完备的$([0,1],[0,1])$-模糊拟阵.

借助定理 3 和分层思想,可以将$[0,1]$-拟阵中的模糊基族推广如下:

定义 10 称映射$\mathcal{B}:[0,1)\to\mathcal{P}([0,1]^E)$是一个模糊基的模糊族,若$\mathcal{B}$满足下面的条件:

(i) 对$\forall h\in(0,1]$,$\mathrm{Max}(\mathcal{B}(a)[h])$是 E 上某个拟阵的一组基,其中$\mathcal{B}(a)[h]=\{B_{[h]}:B\in\mathcal{B}(a)\}$;

(ii) 对$\forall h\in(0,1]$和 $A\in[0,1]^E$,若 $h\wedge A_{[h]}\leqslant B_h$,$B_h\in\mathcal{B}(a)$,则$\exists$一个模糊集 $B\in\mathcal{B}(a)$使得$A\leqslant B$;

(iii) 对$\forall a\in[0,1)$和 $A\in[0,1]^E$,$\exists B_1\in\mathcal{B}(a)$使得 $A\leqslant B_1$ 当且仅当对于 $b\in(a,1)$,$\exists B_2\in\mathcal{B}(b)$使得 $A\leqslant B_2$.

定理 7 设$(E,\mathcal{I})$是一个闭的完备的$([0,1],[0,1])$-模糊拟阵. 定义$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}:[0,1)\to\mathcal{P}([0,1]^E)$如下:

$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(a)=\{B\in[0,1]^E:B$ 是极大的且使得$\mathcal{I}(B)>a\}$.

则$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$是一个模糊基的模糊族.

证明 由于$(E,\mathcal{I})$是一个闭的完备的$([0,1],[0,1])$-模糊拟阵,根据定理 2 可知,对$\forall a\in[0,1)$,$(E,\mathcal{I}_{(a)})$是一个闭的完备的$[0,1]$-拟阵. 令$\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{(a)}}$是$(E,\mathcal{I}_{(a)})$的一族基,即,$\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{(a)}}=\mathrm{Max}(\mathcal{I}_{(a)})$. 由$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$的定义可知,对$\forall a\in[0,1)$,$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}(a)=\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{(a)}}$. 由定理 3 可知,$\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$满足定义 10 条件(i)和(ii). 又根据定理 1,$\mathcal{I}_{(a)}=\bigcup_{b>a}\mathcal{I}_{(b)}$. 从而,对$\forall A\in[0,1]^E$,$A\in\mathcal{I}_{(a)}$当且仅当对于$b\in(a,1)$,$A\in\mathcal{I}_{(b)}$. 则对$\forall a\in[0,1)$和 $A\in[0,1]^E$,

$\exists B_1 \in B_{\mathcal{I}_{(a)}}$ 使得 $A \leqslant B_1$ 当且仅当对于 $b \in (a,1)$，$\exists B_2 \in \mathcal{B}_{\mathcal{I}_{(b)}}$ 使得 $A \leqslant B_2$. 所以定义 10 条件(iii)成立. 因此 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ 是一个模糊基的模糊族.

定理 8　设 $\mathcal{B}$ 是一个模糊基的模糊族. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}:[0,1]^E \to [0,1]$ 如下：$\forall A \in [0,1]^E$，

$$\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(A) = \wedge\{a \in [0,1): \forall B \in \mathcal{B}(a), A \not\leqslant B\}.$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}})$ 是一个闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵，且 $\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}$.

证明　令 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)} = \mathrm{Low}(\mathcal{B}(a))$. 因为 $\mathcal{B}$ 满足定义 10 条件(i)和(ii)，由定理 3 可知，$(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)})$ 是一个闭的完备的[0,1]-拟阵且使得 $\mathcal{B}(a)$ 是 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)})$ 的一族基. 下面证明对 $\forall a \in [0,1)$，$\mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)} = (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)}$.

取 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)}$. 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(A) = \wedge\{c \in [0,1): \forall B \in \mathcal{B}(c), A \not\leqslant B\} > a$. 因而 $a \notin \{c \in [0,1): \forall B \in \mathcal{B}(c), A \not\leqslant B\}$. 从而 $\exists B \in \mathcal{B}(a)$ 使得 $A \leqslant B$，即，$A \in I_{\mathcal{B}(a)}$. 这说明 $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)}$.

为了证明 $(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)} \supseteq \mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)}$，需先证 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}(b)} \subseteq (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{[b]}$. 取 $A \notin (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{[b]}$. 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}}(A) < b$. 从而 $\wedge\{c \in [0,1): \forall B \in \mathcal{B}(c), A \not\leqslant B\} < b$. 可得 $\exists a \in [0,1)$ 使得 $b \in (a,1]$，且对 $\forall B \in \mathcal{B}(a)$，$A \not\leqslant B$. 由定义 10 条件(iii)可知，对 $\forall c \in (a,1]$ 和 $c \in [0,1)$，不存在 $B_1 \in \mathcal{B}(c)$ 使得 $A \leqslant B_1$. 由 $b \in (a,1]$ 可知，不存在 $B_1 \in \mathcal{B}(b)$ 使得 $A \leqslant B_1$. 因而 $A \notin I_{\mathcal{B}(b)}$. 从而 $\mathcal{I}_{\mathcal{B}(b)} \subseteq (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{[b]}$. 令 $A \in \mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)}$. 由定义 10 条件(iii)可知，$\exists b \in [0,1)$ 使得 $b \in (a,1]$ 和 $A \in I_{\mathcal{B}(b)}$，则 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{[b]}$. 由定理 1 可知，$(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)} = \bigcup_{b \in (a,1]} (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{[b]}$. 因而 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)}$. 所以对 $\forall a \in [0,1)$，$I_{\mathcal{B}(a)} \subseteq (\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)}$.

因此，对 $\forall a \in [0,1)$，$(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)} = \mathcal{I}_{\mathcal{B}_{(a)}}$. 由定理 2 和定义 9 可知，$(E,\mathcal{I}_{\mathcal{B}})$ 是一个闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵. 进而，对 $\forall a \in [0,1)$，$\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}}}(a) = \mathcal{B}_{(\mathcal{I}_{\mathcal{B}})_{(a)}} = \mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{(a)}}} = \mathcal{B}(a)$. 从而，$\mathcal{B}_{\mathcal{I}_{\mathcal{B}}} = \mathcal{B}$.

定理 9　设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵. 则 $I_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}} = \mathcal{I}$.

证明　由定理 7,8 和定理 1 可得，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathcal{B}_{\mathcal{I}}}(A) &= \wedge\{a \in [0,1): \forall B \in \mathcal{B}(a), A \not\leqslant B\} = \\ &\wedge\{a \in [0,1): A \notin \mathcal{I}_{\mathcal{B}(a)}\} = \\ &\wedge\{a \in [0,1): A \notin \mathcal{I}_{(a)}\} = \mathcal{I}(A).\end{aligned}$$

根据定理 8 和 9，可得下面的结论：

定理 10　模糊基的模糊族和闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵是一一对应的.

2　模糊秩函数

如定理 5，闭的完备的[0,1]-拟阵可由[0,1]-模糊秩函数等价刻画. 本节将给出闭的完备的模糊拟阵的秩函数公理. 基于定理 5 和分层思想，可以推广[0,1]-模糊秩函数如下：

定义 11　若映射 $\mathcal{R}:[0,1]^E \times [0,1) \to \mathbf{N}([0,1])$ 满足以下条件：对 $\forall a \in [0,1)$ 和 $A,B \in [0,1]^E$，

(i) $0 \leqslant \mathcal{R}(A,a) \leqslant |A|$；

(ii) 若 $A \leqslant B$，则 $\mathcal{R}(A,a) \leqslant \mathcal{R}(B,a)$；

(iii) $\mathcal{R}(A,a) + \mathcal{R}(B,a) \geqslant \mathcal{R}(A \wedge B,a) + \mathcal{R}(A \vee B,a)$；

(iv) $\forall h \in (0,1]$，$\mathcal{R}(A,a)_{[h]} = \mathcal{R}(h \wedge A_{[h]},a)_{[h]}$；

(v) $\mathcal{R}(A,a) = |A|$ 当且仅当 $\exists b \in [0,1)$ 使得 $b \in (a,1]$ 和 $\mathcal{R}(A,b) = |A|$；

则称 $\mathcal{R}$ 是一个模糊秩函数.

定理 11　设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵. 定义 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}:[0,1]^E \times [0,1) \to \mathbf{N}([0,1])$ 如下：$\forall a \in [0,1)$，$A \in [0,1]^E$，

$$\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(A,a) = \vee\{|B|: \forall B \subseteq A, \mathcal{I}(B) > a\}.$$

则 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}$ 是一个模糊秩函数.

证明　因为 $(E,\mathcal{I})$ 是一个闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵，所以对 $\forall a \in [0,1)$，$(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 是一个闭的完备的[0,1]-拟阵. 令 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{(a)}}$ 是 $(E,\mathcal{I}_{(a)})$ 的秩函数. 则 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{(a)}}$ 满足定理 4 条件(i)～(iv). 由 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}$ 的定义可知，对 $\forall a \in [0,1)$ 和 $A \in [0,1]^E$，$\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(A,a) = \mathcal{R}_{\mathcal{I}(a)}(A)$. 因而 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}$ 满足定义 11 条件(i)～(iv). 由定理 1 可知，$\mathcal{I}_{(a)} = \bigcup_{b \in (a,1]} \mathcal{I}_{(b)}$. 这说明 $A \in \mathcal{I}_{(a)}$ 当且仅当 $\exists b \in [0,1)$，使得 $b \in (a,1]$ 和 $A \in I_{(b)}$. 由定理 6 可知，对 $\forall a \in [0,1)$ 和 $A \in [0,1]^E$，$\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{(a)}}(A) = |A|$ 当且仅当 $\exists b \in [0,1)$，使得 $b \in (a,1]$ 和 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{(b)}}(A) = |A|$. 因此定义 11 条件(v)成立. 所以 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}}$ 是一个模糊秩函数.

定理 12　设 $\mathcal{R}$ 是一个模糊秩函数. 定义映射 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}:[0,1]^E \to [0,1]$ 如下，$\forall A \in [0,1]^E$，

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(A) = \wedge\{a \in [0,1]: \mathcal{R}(A,a) \neq |A|\},$$

则 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{R}})$ 是一个闭的完备的([0,1],[0,1])-模糊拟阵，且 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}}} = \mathcal{R}$.

证明　因为 $\mathcal{R}$ 满足定义 11 条件(i)～(iv)，所以 $\mathcal{R}|_{[0,1]^E \times \{a\}}$ 是 E 上一个[0,1]-模糊秩函数. 令 $\mathcal{R}(a) = \mathcal{R}|_{[0,1]^E \times \{a\}}$. 由定理 5 可知，对 $\forall a \in [0,1)$，存在一个闭的完备的[0,1]-拟阵 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)})$ 使得 $\mathcal{R}(a)$ 是 $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)})$ 的[0,1]-模糊秩函数. 由定理 6 可知，$\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)} = \{A \in [0,1]^E: \mathcal{R}(A,a) = |A|\}$. 下面证明对 $\forall a \in [0,1)$，$\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)} = (\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}$.

取 $A \in (\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}$. 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(A) = \wedge\{c \in [0,1): \mathcal{R}(A,c) \neq |A|\} > a$. 因而 $a \notin \{c \in [0,1]: \mathcal{R}(A,c) \neq |A|\}$. 这说明 $\mathcal{R}(A,a) = |A|$，即，$A \in \mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)}$. 因此 $(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)} \subseteq$

$\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)}$.

取 $A\notin(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{[b]}$. 则 $b>\mathcal{I}_{\mathcal{R}}(A)=\wedge\{a\in[0,1):\mathcal{R}(A,a)\neq|A|\}$,得到 $\exists a\in[0,1)$ 使得 $b\in(a,1]$ 和 $\mathcal{R}(A,a)\neq|A|$. 由定义 11 条件(v)可知,对 $\forall c\in(a,1)$, $\mathcal{R}(A,c)\neq|A|$. 由 $b\in(a,1]$, $\mathcal{R}(A,b)\neq|A|$. 这说明 $A\notin\mathcal{I}_{\mathcal{R}(b)}$. 从而 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}(b)}\subseteq(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{[b]}$. 对于 $A\in\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)}$, $\mathcal{R}(a)(A)=|A|$. 由定义 11 条件(v)可知, $\exists b\in[0,1)$ 使得 $b\in(a,1]$ 和 $\mathcal{R}(A,b)=|A|$. 因而 $A\in\mathcal{I}_{\mathcal{R}(b)}$. 由 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}(b)}\subseteq(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{[b]}$ 可知, $A\in(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{[b]}$. 根据定理 1, $(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}=\bigcup_{b\in(a,1]}(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{[b]}$. 则 $A\in(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}$. 因而对 $\forall a\in[0,1)$, $\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)}\subseteq(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}$.

因此,对 $\forall a\in[0,1)$, $\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)}=(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}$. 由定理 2 和定义 9 可知, $(E,\mathcal{I}_{\mathcal{R}})$ 是一个闭的完备的 $([0,1],[0,1])$-模糊拟阵. 进而,对 $\forall a\in[0,1)$ 和 $A\in[0,1]^E$, $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}}}(A,a)=\mathcal{R}_{(\mathcal{I}_{\mathcal{R}})_{(a)}}(A)=\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}(a)}}(A)=\mathcal{R}(A,a)$. 所以 $\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{\mathcal{R}}}=R$.

定理 13 设 $(E,\mathcal{I})$ 是一个闭的完备的 $([0,1],[0,1])$-模糊拟阵. 则 $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathcal{I}}}=\mathcal{I}$.

证明 由定理 11,12 和定理 1 可得,

$$\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathcal{I}}}(A)=\wedge\{a\in[0,1):\mathcal{R}_{\mathcal{I}}(A,a)\neq|A|\}=\wedge\{a\in[0,1):\mathcal{R}_{\mathcal{I}_{(a)}}(A)\neq|A|\}=\wedge\{a\in[0,1):A\notin\mathcal{I}_{(a)}\}=\mathcal{I}(A).$$

根据定理 12 和 13,可得下面的结论:

定理 14 模糊秩函数和闭的完备的 $([0,1],[0,1])$-模糊拟阵是一一对应的.

参考文献:

[1] OXLEY J G. Matroid theory[M]. New York: Oxford University Press,1992.

[2] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy matroids[J]. Fuzzy Sets and Systems,1988,27:291-302.

[3] SHI F G. (L,M)-fuzzy of matroids[J]. Fuzzy Sets and Systems,2009,160:2387-2400.

[4] HUANG C E, SHI F G. Bases of [0,1]-matroids[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,2010,39:233-240.

[5] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Bases of fuzzy matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems,1989,31:253-261.

[6] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy matroids and a greedy algorithm[J]. Fuzzy Sets and Systems,1990,37:201-214.

[7] GOETSCHEL R, VOXMAN W. Fuzzy rank functions [J]. Fuzzy Sets and Systems,1991,42:245-258.

[8] LIAN H, XIN X. [0,1]-fuzzyβ-rank functions[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,2012,41(1):59-65.

[9] NOVAK L A. A comment on 'Bases of fuzzy matroids' [J]. Fuzzy Sets and Systems,1997,87:251-252.

[10] XIN X, SHI F G. Rank functions for closed and perfect [0,1]-matroids[J]. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics,2010,39: 31-39.

[11] SHI F G. A new approach to the fuzzification of matroids [J]. Fuzzy Sets and Systems,2009,160:696-705.

[12] YAO W, SHI F G. Base axioms and circuits axioms for fuzzifying matroids[J]. Fuzzy Sets and Systems,2010,161:3155-3165.

[13] SHI F G, WANG L. Characterizations and applications of M-fuzzifying matroids[J]. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems,2013,25:919-930.

[14] WANG L, SHI F G. Characterization of L-fuzzifying matroids by L-fuzzifying families of α-flats[J]. Advances of Fuzzy Sets and Systems,2009,2:203-213.

[15] 胡宝清. 模糊理论基础[M]. 第 2 版. 武汉:武汉大学出版社,2010.

[16] SHI F G. L-fuzzy relation and L-fuzzy subgroup[J]. Journal of Fuzzy Mathematics,2000,8:491-499.

Bases and rank functions for ([0,1],[0,1])-fuzzy matroids

DAI Enhua[1], XIU Zhenyu[2]

(1. Department of Mathematics and Information Engineering, Dongchang College of Liaocheng University, Liaocheng 252000, China;
2. College of Applied Mathematics, Chengdu University of Information Technology, Chengdu 610000, China)

Abstract: In this study, fuzzy families of fuzzy bases and fuzzy rank functions are defined for closed and perfect ([0,1],[0,1])-fuzzy matroids. It is proved that these families can be used to characterize closed and perfect ([0,1],[0,1])-fuzzy matroids.

Keywords: fuzzy matroids; fuzzy families; fuzzy bases; fuzzy rank functions

(责任编辑:汪 军)