非饱和土的非正交弹塑性本构模型

李晓强¹, 梁靖宇², 路德春^{1*}, 苗金波¹, 杜修力¹

1. 北京工业大学岩土与地下工程研究所, 北京 100124;

2. 北京建筑大学土木与交通工程学院, 北京 102616

* E-mail: dechun@bjut.edu.cn

收稿日期: 2021-05-15; 接受日期: 2021-06-21; 网络版发表日期: 2022-02-23

国家自然科学基金(批准号: 52025084, 51778026, U1839201)资助项目

摘要 从应变增量大小和方向的角度出发, 以有效饱和度和Bishop有效应力作为基本本构变量, 呈现了一个非饱和土的非正交弹塑性本构模型建模框架. 建模框架采用非正交的塑性流动法则, 直接通过屈服函数确定塑性应变增量的方向, 避免了构造塑性势函数的困难. 基于所提建模框架, 利用屈服函数、硬化参数和土水特征曲线的具体表达式, 发展得出一个非饱和土的非正交弹塑性本构模型. 所提模型通过材料参数 μ 可以描述具有不同刚度的非饱和土的力学与水力行为. 模型所需材料参数均具有明确的物理意义, 且可以通过室内试验确定. 利用两种经典应力路径(即恒基质吸力的常规三轴剪切路径和恒净应力的吸湿路径)分析了具有不同刚度的非饱和土的力学与水力行为. 模型预测结果与非饱和土试验数据的对比验证了所提模型的优越性.

关键词 非饱和土, 力学行为, 弹塑性, 本构模型, 非正交塑性流动法则

1 引言

强降雨造成的边坡失稳^[1]和地下水位变化引起的地基湿陷沉降^[2,3]等一系列工程问题都与非饱和土的水力和力学特性有关^[4,5]. 非饱和土的本构模型是解决上述工程问题的重要理论基础. 基于经典弹塑性理论建立非饱和土本构模型的核心是确定塑性应变增量, 包括大小和方向.

塑性应变增量的大小不仅依赖于应力状态, 而且与水力状态也密切相关^[6,7]. 通过屈服函数的一致性条件可以确定塑性应变增量的大小. 已有研究表明, 除了硬化参数之外, 非饱和土的屈服函数还需要两个基本

的本构变量, 分别用于描述应力状态和水力状态^[2,5,8]. 目前, 净应力和有效应力是两种常用的描述应力状态的本构变量; 饱和度、基质吸力以及它们的组合是三种常用的描述水力状态的基本本构变量. 已有研究表明Bishop有效应力和有效饱和度的组合在以下三个方面更具优势: (1) 描述非饱和土的恒基质吸力等向压缩线的非线性; (2) 湿陷变形随净应力增大而呈现的非单调变化; (3) 饱和与非饱和状态之间的连续光滑转换^[9-11]. 基于Bishop有效应力和有效饱和度, Zhou等人^[12]以塑性体应变作为硬化参数提出了一个非饱和土的屈服函数, 并结合相关联流动法则捕获了Pearl黏土的力学和水力行为.

引用格式: 李晓强, 梁靖宇, 路德春, 等. 非饱和土的非正交弹塑性本构模型. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1048–1064

Li X Q, Liang J Y, Lu D C, et al. Non-orthogonal elastoplastic constitutive model for unsaturated soil (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52: 1048–1064, doi: [10.1360/SST-2021-0209](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0209)

塑性应变增量的方向也称为塑性流动方向, 反映不同塑性应变增量的分量之间的比例关系, 是确定塑性应变增量的另一核心问题. Cui和Delage^[13], Estabragh和Javadi^[14]以及Lade等人^[15]的试验研究表明, 塑性应变增量的方向与应力空间中屈服面之间具有非正交性. Collins^[16]基于热力学研究表明, 当颗粒材料内部的塑性机制主要是摩擦时, 非关联流动是自然产生的, 塑性应变增量方向与屈服面是非正交的. 上述研究表明, 对于非饱和土, 想要合理描述非饱和土的力学与水力行为, 在塑性应变增量的确定过程中有必要考虑塑性应变增量方向与应力空间中屈服面的非正交关系, 即非饱和土塑性应变增量方向的非正交性. 但非饱和土的塑性应变增量方向受到很多因素影响, 其剪胀规律十分复杂, 如何采用合理的方式确定塑性应变增量方向是建立非饱和土弹塑性本构关系的一个关键点.

在现有非饱和土本构模型的建模过程中, 有三种常用的方法可以用来确定塑性应变增量的方向. 第一种方法直接将屈服函数作为塑性势函数^[10,17,18], 即采用相关联的流动法则确定塑性应变增量的方向; 第二种方法是构造一个新的塑性势函数^[19~21], 通过塑性势函数的正交梯度确定塑性应变增量的方向, 即非关联的塑性流动法则, 其核心是构造一个与试验规律一致的塑性势函数; 第三种方法是通过剪胀方程^[22~24]确定塑性应变增量的方向, 其核心是构造一个与试验规律一致的剪胀方程. 第一种方法获得的塑性应变增量方向与应力空间的屈服面是正交的, 无法反映塑性应变增量方向与应力空间屈服面之间的非正交特征. 第二和第三种方法获得的塑性应变增量方向与应力空间中的屈服面是非正交的, 但从试验角度来看, 很难通过试验数据构造一个合理的塑性势函数或剪胀方程.

非正交塑性流动法则的提出为描述岩土类材料塑性应变增量方向与应力空间屈服面之间的非正交性提供了新的思路和方法^[25,26], 其核心是通过屈服函数的非正交梯度确定塑性应变增量的方向. 与非关联流动法则相比, 非正交塑性流动法则的最大特色是避免了塑性势函数构造的难题, 简化了建模过程. 基于分数阶偏微分的非正交塑性流动法则已被应用于建立饱和土的本构关系^[25,27~29], 凸显了非正交塑性流动法则的优势. 这一点促进了非正交塑性流动法则在描述非饱和土剪胀性方面的进一步研究.

本文基于非正交塑性流动法则, 提出了一个采用Bishop有效应力和有效饱和度作为基本本构变量的非饱和土的非正交弹塑性本构模型建模框架. 基于提出的建模框架, 发展了非饱和土的非正交弹塑性本构模型, 分析了土体刚度差异对非饱和土水力和力学行为的影响. 通过将本文模型的预测与非饱和土的试验数据进行比较, 验证了所发展的非正交弹塑性本构模型的合理性.

2 非饱和土的非正交弹塑性本构模型建模框架

非饱和土的变形可分解为可恢复的弹性变形与不可恢复的塑性变形. 因此, 总应变增量 $d\epsilon_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$) 可以表示为

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p, \quad (1)$$

式中, $d\epsilon_{ij}^e$ 是弹性应变增量, $d\epsilon_{ij}^p$ 是塑性应变增量.

本文选用有效饱和度 S_e 与Bishop有效应力 σ_{ij} 作为基本本构变量描述非饱和土的变形规律. 有效饱和度 S_e 的表达式如下:

$$S_e = \frac{S_r - S_r^{\text{res}}}{S_r^0 - S_r^{\text{res}}}, \quad (2)$$

式中, S_r 为饱和度, S_r^0 为 $s=0$ kPa时的饱和度, S_r^{res} 为残余饱和度, s 为基质吸力, 是孔隙气压力 u_a 与孔隙水压力 u_w 的差值. Bishop有效应力 σ_{ij} 的表达式如下:

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + S_e s \delta_{ij}, \quad (3)$$

式中, δ_{ij} 为Kronecker符号, $\bar{\sigma}_{ij}$ 为净应力, 可通过总应力 $\sigma_{ij}^{\text{total}}$ 和孔隙气压力 u_a 表示, 即

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{total}} - u_a \delta_{ij}. \quad (4)$$

非饱和土的弹性变形采用 σ_{ij} 空间的Hooke定律描述, 即

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_k \delta_{kl} \delta_{ij}, \quad (5)$$

式中, ν 为泊松比, $k, l=1, 2, 3$. E 为杨氏弹性模量, 表达式如下:

$$E = \frac{3(1+e_0)(1-2\nu)}{\kappa} p, \quad (6)$$

式中, e_0 为初始孔隙比; p 为 σ_{ij} 空间中的平均正应力, 等于 $\sigma_{ij}\delta_{ij}/3$; κ 为 e - $\ln p$ 坐标中回弹线的斜率. 其中, e 为孔隙比. 由于建立在Bishop有效应力空间的Hooke定律已包含 s 变化引起的弹性变形, 因此, 不需要额外考虑 s 的影响^[30].

根据弹塑性理论, 塑性应变增量可表示为

$$d\epsilon_{ij}^p = \lambda m_{ij}, \quad (7)$$

其中, λ 为标量, 表示塑性应变增量的大小, 通过屈服函数的一致性条件确定; m_{ij} 为张量, 表示塑性应变增量的方向, 本文采用将非正交塑性流动法则应用于屈服函数 f 确定. 因此, 屈服函数 f 是确定 λ 和 m_{ij} 的前提.

基于所选取的基本本构变量, 非饱和土的屈服函数 f 可表示为

$$f = f[\sigma_{ij}, S_e, H(\epsilon_{kl}^p)] = 0, \quad (8)$$

式中, $H(\epsilon_{kl}^p)$ 为硬化参数, 控制 f 的演化.

屈服函数 f 的一致性条件可表示为

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial S_e} dS_e + \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{kl}^p} d\epsilon_{kl}^p = 0. \quad (9)$$

将式(7)代入式(9)并整理可得

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial S_e} dS_e}{\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{kl}^p} m_{kl}}. \quad (10)$$

将非正交塑性流动法则应用于 f 的目的是利用 f 的非正交梯度确定合理反映非饱和土变形规律的塑性应变增量方向 m_{ij} . 分数阶偏微分提供了一种简单且适用的方法来获得 f 的非正交梯度方向^[25,31,32], 基于分数阶偏微分, 非正交塑性流动方向 m_{ij} ^[25]可表示为

$$m_{ij} = \frac{\partial^\mu f}{\partial \Omega_{wy}^\mu} \frac{\partial \Omega_{wy}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (11)$$

其中, Ω_{wy} ($w, y=1, 2, 3$)为 σ_{ij} 的应力不变量, 用于构造 f . μ 是分数阶阶次. $\partial^\mu f / \partial \Omega_{wy}^\mu$ 为 f 在 Ω_{wy} 坐标系中的分数阶偏微分. $\partial \Omega_{wy} / \partial \sigma_{ij}$ 为协变变换系数, 用于将非正交塑性应变增量方向从 Ω_{wy} 坐标系转换至 σ_{ij} 坐标系.

将式(10)和(11)代入式(7), 并整理式(7)可得

$$d\epsilon_{ij}^p = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ix}} d\sigma_{ix} + \frac{\partial f}{\partial S_e} dS_e}{\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{kl}^p} m_{kl}} \frac{\partial^\mu f}{\partial \Omega_{wy}^\mu} \frac{\partial \Omega_{wy}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (12)$$

式中, $t, x=1, 2, 3$.

式(5)和(12)提供了描述非饱和土的力学行为的完整表述. 然而, 对于非饱和土, 在试验过程中 $d\sigma_{ij}$ 难以被直接测量, 需要通过可测的独立变量表示. 利用式(3)的全微分, 可将 $d\sigma_{ij}$ 用 $d\bar{\sigma}_{ij}$, ds 和 dS_e 表示, 即

$$d\sigma_{ij} = d\bar{\sigma}_{ij} + S_e ds \delta_{ij} + s dS_e \delta_{ij}. \quad (13)$$

在非饱和土的室内单元体试验中, $d\bar{\sigma}_{ij}$ 和 ds 是两个可控且独立的基本变量, 而 dS_e 难以控制. 已有试验数据表明, 基质吸力 s 和孔隙比 e 的改变会导致有效饱和度 S_e 发生变化^[33-35]. 因此, dS_e 可表示为

$$dS_e = \frac{\partial S_e}{\partial s} ds + \frac{\partial S_e}{\partial \epsilon_v} \delta_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (14)$$

式中, $\partial S_e / \partial s$ 描述 s 变化对 S_e 的影响, $\partial S_e / \partial \epsilon_v$ 描述土体变形对 S_e 的影响. 式(14)是用增量形式表示的土水特征曲线(SWCC).

式(5), (12), (13)和(14)的组合提供了使用可控变量描述非饱和土水力与力学行为的一般表达式, 即基于非正交塑性流动法则建立的非饱和土的弹塑性本构建模框架. 在所提建模框架中, 屈服函数、硬化参数以及土水特征曲线是三个关键待定要素. 本节所提建模框架不仅提供了一种新的建立非饱和土弹塑性本构模型的方法, 而且可以对现有非饱和土的弹塑性本构模型进行扩展. 在建模框架中, 非正交塑性流动法则结合屈服函数可用于确定塑性应变增量的方向, 避免了构造塑性势函数的困难, 简化了建模过程, 并且能够考虑非饱和土剪切过程中刚度对水力以及力学行为的影响.

3 非饱和土的非正交弹塑性本构关系

基于所提建模框架, 本文根据已有正常固结条件下的Zhou模型^[12]发展了一个非饱和土的非正交弹塑性本构模型. 接下来, 将详细介绍本文模型采用的屈服函数、硬化参数以及土水特征曲线的具体表达式和相应的本构关系.

3.1 屈服函数

非饱和土的屈服函数通常由等向压缩条件下的屈服函数, 即加载湿陷(L-C)屈服函数, 扩展至三维应力

状态得到^[23,24,36,37]. L-C屈服函数是获得一般应力状态下屈服函数的基础.

L-C屈服函数的推导涉及非饱和土等向压缩线(NCL)的选择. 本文采用正常固结条件下Zhou模型的假设, 即 S_e 恒定时非饱和土的NCL在 $e-\ln p$ 平面内是一条斜率为 $\lambda(S_e)$ 直线, 并且不同恒 S_e 的等向压缩线NCL(S_e)在点 (Π_N, p_r) 处相交. 这里 p_r 是参考应力, 取为1 kPa. Π_N 是 $p=p_r$ 处的孔隙比, 其值与 S_e 的大小无关. $\lambda(S_e)$ 遵循如下形式:

$$\lambda(S_e) = \lambda_0 - (\lambda_0 - \lambda_d)(1 - S_e)^{a_1}, \quad (15)$$

式中, λ_d 是 $S_e=0$ 时 $\lambda(S_e)$ 的值, λ_0 是 $S_e=1.0$ 时 $\lambda(S_e)$ 的值, a_1 为描述水力状态对力学状态影响的材料参数. NCL(S_e)的概念提供了一种简便的方法来描述湿陷变形与应力水平之间的非单调关系^[9]. 正常固结条件下Zhou模型^[9]的L-C屈服函数可表示为

$$p = p_r \left(\frac{p_0}{p_r} \right)^{\frac{\lambda_0 - \kappa}{\lambda(S_e) - \kappa}}, \quad (16)$$

式中, p_0 是 $S_e=1.0$ 时的屈服应力.

为了获得一般应力状态下 f 的具体表达式, 采用 p - q 平面上的椭圆曲线对L-C屈服曲线进行扩展. 这里, $q = \sqrt{3/2(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}$ 是 σ_{ij} 空间的偏应力. 椭圆屈服曲线的表达式如下:

$$f = p^2 + \frac{q^2}{N^2} - pp_x = 0, \quad (17)$$

式中, N 是椭圆顶点纵坐标与横坐标的比值. p_x 是屈服曲线与 p 轴的右交点, 与式(16)中 p 相等. 将式(17)中 p_x 用式(16)代替, 可得 f 的具体表达式为

$$f = p^2 + \frac{q^2}{N^2} - pp_r \left(\frac{p_{0x}}{p_r} \right)^{\frac{\lambda_0 - \kappa}{\lambda(S_e) - \kappa}} = 0, \quad (18)$$

式中, p_{0x} 是饱和状态下 p_x 的值.

3.2 硬化参数

硬化参数 H 控制 f 的演变. 对于正常固结的非饱和土, H 通常选用塑性体积应变 ε_v^p ^[17,22,38]. 在式(18)中, p_{0x} 表示 p - q - S_e 空间中 f 的大小, 是饱和等向压缩状态下的屈服应力, 其大小由 ε_v^p 决定. 根据饱和状态下的NCL和回弹线可知, p_{0x} 与 ε_v^p 之间存在如下关系:

$$p_{0x} = \exp \left(\frac{1 + e_0}{\lambda_0 - \kappa} \varepsilon_v^p \right). \quad (19)$$

3.3 土水特征曲线

土水特征曲线(SWCC)实质上描述了非饱和土的水力行为. 本文选用Zhou等人^[9]提出的SWCC, 其主脱湿和主吸湿曲线是在净应力不变的条件下获得的, 与目前大多数室内单元体的脱湿和吸湿试验对应的应力路径一致, 因此, 主脱湿和主吸湿曲线可以更加容易地通过室内单元体试验确定. 相应式(14)可表示为

$$dS_e = \frac{\partial S_e}{\partial s} ds + \frac{\partial S_e}{\partial \varepsilon_{vs}} d\varepsilon_{vs}, \quad (20)$$

式中, ε_{vs} 是 $\bar{\sigma}_{ij}$ 变化引起的体应变. $\partial S_e / \partial s$ 如下:

$$\frac{\partial S_e}{\partial s} = \begin{cases} -\left(\frac{s}{s_d}\right)^b \frac{zr}{a_d} \left[1 + \left(\frac{s_d}{a_d}\right)^z\right]^{-r-1} \left(\frac{s_d}{a_d}\right)^{z-1}, & (ds > 0), \\ -\left(\frac{s_w}{s}\right)^b \frac{zr}{a_w} \left[1 + \left(\frac{a_w}{s_w}\right)^z\right]^{-r-1} \left(\frac{s_w}{a_w}\right)^{z-1}, & (ds < 0), \end{cases} \quad (21)$$

式中, 4个水力参数 a_d , a_w , z 和 r 用于描述主脱湿和吸湿曲线^[39]. b 是描述扫描线非线性程度的水力参数. s_d 和 s_w 分别是当前状态(s , S_e)对应于主脱湿曲线和主吸湿曲线上的基质吸力, 可表示为

$$s_d = a_d (S_e^{-1/r} - 1)^{1/z}, \quad (22)$$

$$s_w = a_w (S_e^{-1/r} - 1)^{1/z}. \quad (23)$$

$\partial S_e / \partial \varepsilon_{vs}$ 采用以下形式^[9]:

$$\frac{\partial S_e}{\partial \varepsilon_{vs}} = \frac{S_e(1+e)}{e} (1 - S_e)^{a_2}, \quad (24)$$

式中, a_2 为描述力学状态对水力状态影响的材料参数.

3.4 本构关系

m_{ij} 和 A 的具体表达式是确定非饱和土本构关系的基础. 根据 f 的具体表达式, m_{ij} 可表示为

$$m_{ij} = \frac{\partial^\mu f}{\partial p^\mu} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial^\mu f}{\partial q^\mu} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (25)$$

式中, $\partial^\mu f / \partial p^\mu$ 和 $\partial^\mu f / \partial q^\mu$ 是 f 的分数阶偏微分. Riemann-Liouville(R-L)型分数阶偏微分是一种常用的分数阶偏微分^[40], 其采用先求解 $n-\mu$ 阶积分再求解 n 阶导数的表

达式结构. 对于本文模型选用的椭圆形屈服函数, 其一次项的R-L型分数阶偏微分不等于0, 可用于描述 $\mu < 1$ 和 $\mu > 1$ 条件下土的非正交塑性流动方向, 适用范围广. 因此, 本文选用R-L型分数阶偏微分确定 f 的非正交梯度, 相应地, $\partial^\mu f / \partial p^\mu$ 和 $\partial^\mu f / \partial q^\mu$ 可写为

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial p^\mu} = \frac{\mu N^2 p^2 - \mu(2-\mu)q^2}{N^2 \Gamma(3-\mu)p^\mu}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial^\mu f}{\partial q^\mu} = \frac{q^{2-\mu}(3\mu-\mu^2)}{N^2 \Gamma(3-\mu)}, \quad (27)$$

式中, $\Gamma(\mu)$ 是Gamma函数, 等于 $\int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{\mu-1} d\tau$, 且遵循递归关系, 即 $\Gamma(\mu+1) = \mu \Gamma(\mu)$. $\partial p / \partial \sigma_{ij}$ 和 $\partial q / \partial \sigma_{ij}$ 通过 p 和 q 的定义得出:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}{2q}. \quad (29)$$

将式(26)~(29)代入式(25)可得

$$m_{ij} = \frac{\mu N^2 p^2 + (\mu^2 - 2\mu)q^2}{N^2 \Gamma(3-\mu)p^\mu} \times \left[\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(3-\mu)q^{1-\mu}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}{2p^\mu (N^2 p^2 + (\mu-2)q^2)} \right]. \quad (30)$$

式(30)给出了塑性应变增量的方向. 考虑到屈服函数以 p , q 和 S_e 作为应力参量给出, 且塑性应变增量的主轴与 σ_{ij} 空间应力的主轴一致, 因此, 这里根据塑性剪应变增量与塑性体应变增量之比 $d\varepsilon_d^p / d\varepsilon_v^p$ 绘制了 p - q - S_e 空间内归一化的塑性应变增量方向, 分析材料参数 μ 对塑性应变增量方向的影响. 根据式(7)和(30), $d\varepsilon_d^p / d\varepsilon_v^p$ 可表示为

$$\frac{d\varepsilon_d^p}{d\varepsilon_v^p} = \frac{(3-\mu)q^{2-\mu}p^\mu}{N^2 p^2 + (\mu-2)q^2}. \quad (31)$$

当土达到临界状态时, $q/p = M$ 且 $d\varepsilon_v^p = 0$. 因此, 可由式(31)推导得到如下表达式:

$$\mu = 2 - \frac{N^2}{M^2}. \quad (32)$$

式(32)表明, 只需确定 N , μ 和 M 这三个参数中的任意两个, 剩下一个就可通过式(32)计算获得. 在本文中, 选

择 μ 和 M 作为材料参数.

图1在 p - q - S_e 空间中绘制了屈服面和归一化的塑性应变增量方向. 在一系列特定 S_e 条件下, 红色、蓝色和黑色箭头分别表示 $\mu=0.5$, 1.0和1.5时 p - q 平面内归一化的塑性应变增量方向. 塑性应变增量的方向不仅在等向压缩状态和临界状态与试验规律一致, 而且还能够描述随着 μ 的增大 $d\varepsilon_d^p / d\varepsilon_v^p$ 逐渐减小的规律. 当 $\mu=1$ 时, 在 p - q 平面中, 塑性应变增量的方向能够退化为与 f 正交的情况.

确定 A 的第一步是获得 f 的全微分形式, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial p_{0x}} \frac{\partial p_{0x}}{\partial \varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p + \frac{\partial f}{\partial S_e} dS_e = 0, \quad (33)$$

式中, $\partial f / \partial \sigma_{ij}$, $\partial f / \partial p_{0x}$ 和 $\partial f / \partial S_e$ 可表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\delta_{ij}}{3}(2p - p_x) + \frac{3(\sigma_{ij} - p\delta_{ij})}{N^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial p_{0x}} = \frac{(\lambda_0 - \kappa)p}{\lambda(S_e) - \kappa} \left(\frac{p_{0x}}{p_r} \right)^{\frac{\lambda_0 - \lambda(S_e)}{\lambda(S_e) - \kappa}}, \\ \frac{\partial f}{\partial S_e} = pp_x \ln \left(\frac{p_x}{p_r} \right) \frac{[a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1 - S_e)^{a_1-1}]}{\lambda(S_e) - \kappa}. \end{cases} \quad (34)$$

对式(19)取全微分可得

图1 屈服面和归一化的塑性应变增量方向
Figure 1 Yield surface and the normalized direction of the plastic strain increment.

$$\frac{\partial p_{0x}}{\partial \varepsilon_v} = \frac{1+e_0}{\lambda_0 - \kappa} p_{0x}. \quad (35)$$

将式(7), (34)和(35)代入式(33), 并重新整理可得

$$\begin{aligned} A = & \frac{N^2 \Gamma(3-\mu) p^\mu}{\mu N^2 p^2 + (\mu^2 - 2\mu) q^2} \\ & \times \left[\frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[(2p - p_x) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{N^2} \right] d\sigma_{ij} \right. \\ & \left. + \frac{a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1-S_e)^{a_1-1}}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{p_x}{p_r}\right) dS_e \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

将式(5), (30)和(36)代入式(1), 可得用 $d\sigma_{ij}$ 和 dS_e 表示的非饱和土的本构关系:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} = & \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} d\sigma_{kl} \\ & + \left[\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(3-\mu) q^{1-\mu} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{2p^{-\mu} (N^2 p^2 + (\mu-2) q^2)} \right] \\ & \times \left[\frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[\frac{(2p - p_x) \delta_{kl}}{3} + \frac{3(\sigma_{kl} - p \delta_{kl})}{N^2} \right] d\sigma_{kl} \right. \\ & \left. + \frac{a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1-S_e)^{a_1-1}}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{p_x}{p_r}\right) dS_e \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

为了方便非饱和土本构关系的应用, 需要将 $d\sigma_{ij}$ 和 dS_e 转换成试验中可控制的变量 $d\bar{\sigma}_{ij}$ 和 ds . 根据式(20)可知, 确定 $d\varepsilon_{v\sigma}$ 是实现上述转换的前提. 根据 $d\varepsilon_{v\sigma}$ 的定义, 将式(13)和(20)代入式(37), 并整理式(37)可得

$$d\varepsilon_{v\sigma} = \frac{\frac{1-2\nu}{E} d\bar{\sigma}_{ij} \delta_{ij} + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[\frac{(2p - p_x) \delta_{ij}}{3} + \frac{3(\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{N^2} \right] d\bar{\sigma}_{ij}}{1 - \left[\frac{3(1-2\nu)}{E} + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} (2p - p_x) + \frac{a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1-S_e)^{a_1-1}}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{p_x}{p_r}\right) \right] \frac{\partial S_e}{\partial \varepsilon_{v\sigma}}}}. \quad (38)$$

将式(13), (20), (24)和(38)代入式(37)可得

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} = & \frac{1+\nu}{E} d\bar{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} d\bar{\sigma}_{kl} + \frac{1-2\nu}{E} D \delta_{ij} \left[\frac{1-2\nu}{E} \delta_{kl} + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[\frac{(2p - p_x) \delta_{kl}}{3} + \frac{3(\sigma_{kl} - p \delta_{kl})}{N^2} \right] \right] d\bar{\sigma}_{kl} \\ & + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(3-\mu) q^{1-\mu} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{2p^{-\mu} (N^2 p^2 + (\mu-2) q^2)} \right] \left[\frac{(2p - p_x) \delta_{kl}}{3} + \frac{3(\sigma_{kl} - p \delta_{kl})}{N^2} \right] d\bar{\sigma}_{kl} \\ & + F \left[\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(3-\mu) q^{1-\mu} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{2p^{-\mu} (N^2 p^2 + (\mu-2) q^2)} \right] \left[\frac{1-2\nu}{E} \delta_{kl} + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[\frac{(2p - p_x) \delta_{kl}}{3} + \frac{3(\sigma_{kl} - p \delta_{kl})}{N^2} \right] \right] d\bar{\sigma}_{kl} \\ & + \left[\frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(3-\mu) q^{1-\mu} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{2p^{-\mu} (N^2 p^2 + (\mu-2) q^2)} \right] (2p - p_x) \right] \left(S_e + \frac{\partial S_e}{\partial s} \right) ds \\ & + \frac{a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1-S_e)^{a_1-1}}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{p_x}{p_r}\right) \frac{\partial S_e}{\partial s} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{3(3-\mu) q^{1-\mu} (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})}{2p^{-\mu} (N^2 p^2 + (\mu-2) q^2)} \right] ds, \end{aligned} \quad (39)$$

式中, D 是一个内变量, 写为

$$D = \frac{1}{\frac{e}{S_e(1+e)(1-S_e)^{a_2}} - \left[\frac{3(1-2\nu)}{E} + \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} (2p - p_x) + \frac{a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1-S_e)^{a_1-1}}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{p_x}{p_r}\right) \right]}. \quad (40)$$

F 是一个内变量, 写为

$$F = D \left[\frac{\lambda(S_e) - \kappa}{(1+e_0) p p_x} (2p - p_x) + \frac{a_1(\lambda_0 - \lambda_d)(1-S_e)^{a_1-1}}{(1+e_0)} \ln\left(\frac{p_x}{p_r}\right) \right]. \quad (41)$$

式(37)和(39)是非饱和土的非正交弹塑性本构关系的两种表现形式. 式(37)用于通过 $d\sigma_{ij}$ 和 dS_e 计算 $d\varepsilon_{ij}$. 式(39)可用于通过 $d\bar{\sigma}_{ij}$ 和 ds 计算 $d\varepsilon_{ij}$, 可直接用来模拟非饱和土的室内单元体试验.

3.5 模型参数

非饱和土的非正交弹塑性本构模型包含14个材料参数, 可分为三类, 即力学参数($\lambda_0, \kappa, M, \nu, \Pi_N, \lambda_d, \mu$), 水力参数(a_d, a_w, z, r, b)和耦合参数(a_1, a_2). 描述 s 恒定不变的力学与水力行为时, 仅需要力学参数和耦合参数, 这样非饱和土的非正交弹塑性本构模型的材料参数将减小为9个.

与正常固结条件下Zhou模型^[12]相比, 发展的非正交弹塑性本构模型仅增加了新的材料参数 μ . 其余材料参数与正常固结条件下Zhou模型^[12]的材料参数一致, 可采用相同的方法确定. 新引入的材料参数 μ 可用于描述不同刚度的非饱和土在剪切过程中变形的差异, 其与 $e-\ln p$ 平面内NCL与CSL之间孔隙比差值 $\Delta\pi(S_e)$ 存在一一对应的关系. 这里采用恒 S_e 的等 p 三轴剪切路径确定 μ 与 $\Delta\pi(S_e)$ 之间的关系. 具体确定过程如下.

(1) 当 S_e 不变时, 如图2(a)所示, 从等向压缩状态(点A)沿着等 p 路径加载至临界状态(点B)时, 产生的 ε_v^p 可表示为

$$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda(S_e) - \kappa}{1 + e_0} \ln \left(1 + \frac{M^2}{N^2} \right). \quad (42)$$

(2) 根据Hooke定律可知, 沿着等 p 路径加载产生的弹性体应变为0. 因此, 由图2(b)可知, 沿加载路径AB

(恒 S_e 的等 p 三轴剪切路径)产生的塑性体应变等于总的体应变, 可表示为

$$\varepsilon_v^p = \frac{\Delta\pi(S_e)}{1 + e_0}. \quad (43)$$

(3) 联立式(42), (43)和(32), 就可获得参数 μ 与 $\Delta\pi(S_e)$ 的关系:

$$\mu = 2 - \frac{1}{\exp \left[\frac{\Delta\pi(S_e)}{\lambda(S_e) - \kappa} \right] - 1}. \quad (44)$$

与恒 S_e 的等 p 三轴剪切试验相比, 饱和条件下的等 p 三轴剪切试验更容易开展. 因此, μ 可采用饱和条件下的等 p 三轴剪切试验确定, 相应地, 式(44)可以简化为

$$\mu = 2 - \frac{1}{\exp \left[\frac{\Delta\pi(S_e = 1.0)}{\lambda_0 - \kappa} \right] - 1}. \quad (45)$$

4 模型特色

非饱和土的非正交弹塑性本构模型与正常固结条件下Zhou模型相比, 其优势在于所提模型可以通过参数 μ 调整剪切过程中塑性应变增量的方向, 进而反映非饱和土在剪切过程中刚度的不同. 基于此, 本节将利用两种典型的应力路径, 即恒基质吸力的常规三轴剪切路径和恒净应力的吸湿路径, 分析非饱和土的刚度对力学和水力行为的影响.

根据文献[12]中给出的Pearl黏土的材料参数, 确定了本节模型特性分析使用的材料参数, 如表1所示. 为分析方便, 取 $S_e = S_r$. 假定初始的水力状态位于主吸湿曲线上, 且初始处于正常固结状态. 因此, 初始饱和

图2 (网络版彩图) μ 的确定. (a) p - q 平面; (b) e - $\ln p$ 平面

Figure 2 (Color online) Determination of μ . (a) In the p - q plane; (b) in the e - $\ln p$ plane.

表 1 模拟所需力学、水力和耦合参数**Table 1** Mechanical parameters, hydraulic and coupling parameters used in simulation

力学		水力和耦合	
参数	数值	参数	数值
λ_0	0.13	a_1	1.7
λ_d	0.06	a_2	0.01
κ	0.03	a_w (kPa)	38
Π_N	1.79	a_d (kPa)	150
M	1.12	l	2
ν	0.3	r	0.35
—	—	b	4.0

度 S_{r0} 可通过初始基质吸力 s_0 结合式(23)计算得到; e_0 由 S_{r0} 结合初始应力状态计算得到. η 是 σ_{ij} 空间中的应力比, 等于 q/p . $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ 和 $\bar{\sigma}_3$ 分别是净应力空间的三个主应力. 在三轴压缩条件下, $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_3$.

4.1 恒基质吸力的常规三轴剪切路径

对于恒基质吸力 s 的常规三轴剪切路径, 初始处于等向压缩状态, 净围压为100 kPa, 且 $s_0=150$ kPa. 因此,

$S_{r0}=37.4\%$, $e_0=1.29$. 当最大主应变 ε_1 达到30%时, 剪切终止. 图3绘制了常规三轴剪切的模拟结果. 为深入分析恒 s 常规三轴剪切过程中非饱和土的刚度对力学和水力行为的影响, 图4(a)~(d)分别展示了初始状态、 $\eta=0.4$ 、 $\eta=0.8$ 和临界状态时屈服面的大小以及归一化塑性应变增量方向.

如图3(a)所示, 在 $e-\ln p$ 坐标系中, μ 的改变不会影响NCL的位置, 即等向压缩条件下的变形行为与 μ 无关. 但是CSL随 μ 的增大而逐渐向下移动, 即 p 相同时, 临界孔隙比随 μ 的增大而不断减小. 这是由于NCL与CSL之间竖向距离随着 μ 的增大而不断增大导致的. 在剪切过程中, 如图3(b)和(c)所示, ε_v 和 S_r 均随 ε_1 增大而单调增大, 并且整个剪切过程中 ε_v 和 S_r 的增加量均随 μ 增大而增大. 在恒 s 常规三轴剪切过程中, S_r 增大是由于单元体积收缩导致的, 这与非饱和土的试验规律是一致的. S_r 的变化规律与 ε_v 的变化规律一致. 如图3(d)所示, η 在剪切过程中单调增加并趋于 M . μ 的改变不会影响临界状态的 η . 在相同 η 下, $d\eta/d\varepsilon_1$ 随着 μ 的增大而减小, 即剪切过程中变形模量随着 μ 的增大而减小, 描述了非饱和土剪切过程中刚度对非饱和土应力-应变曲线的影响.

图 3 (网络版彩图)恒 s 常规三轴剪切的模拟结果. (a) $e-\ln p$; (b) $\varepsilon_1-\varepsilon_v$; (c) ε_1-S_r ; (d) $\varepsilon_1-\eta$ **Figure 3** (Color online) Simulations of the conventional triaxial shearing with constant s . (a) $e-\ln p$; (b) $\varepsilon_1-\varepsilon_v$; (c) ε_1-S_r ; (d) $\varepsilon_1-\eta$.

在初始状态, 如图4(a)所示, $\eta=0$, 不论 μ 取多少, 塑性应变增量的方向始终均与 p 轴正方向一致, 即仅发生塑性体应变, 而没有塑性剪应变产生. 在剪切过程中, 如图4(b)和(c)所示, 随着 η 的增加, 塑性应变增量的方向与 p 轴正方向之间的夹角逐渐增大, 即塑性剪应变与塑性体应变的比值不断增大. 在临界状态, 如图4(d)所示, $\eta=M$, 不论 μ 取多少, 塑性应变增量的方向始终与 q 轴正方向平行, 即塑性体应变不再增加, 而塑性剪应变持续发展. f 以 ε_v^p 作为硬化参数, 因此, 达到临界状态后, f 不再扩大. 因此, 除了等向压缩状态以及临界状态外, 非正交塑性流动法则可以显著调整剪切过程中塑性应变增量的方向, 从而反映不同刚度的非饱和土在剪切过程中变形的差异.

4.2 恒净应力的吸湿路径

对于恒净应力的吸湿路径, 取 $\bar{\sigma}_1=160$ kPa, $\bar{\sigma}_3=100$ kPa, $s_0=350$ kPa. 因此, $S_0=21.26\%$. 基于本文选用的SWCC可知, 恒净应力吸湿过程中 S_r 的变化仅由 s 的变化引起, 即水力行为与 μ 无关. 因此, 图5和图6展

示恒净应力吸湿过程中的力学行为.

图5(a)~(c)分别展示了恒净应力吸湿过程($s=350 \rightarrow 50$ kPa)中, η , ε_v 和 ε_1 随 s 的演化规律. 如图5(a)所示, 在吸湿过程, 即 s 单调减小的过程中, η 单调增加. 如图5(b)所示, 吸湿过程产生了明显的湿陷体积收缩变形. 这主要是由于 s 减小而导致土颗粒之间胶结强度降低, 引起土颗粒重组而导致的, 是非饱和土的一个显著特征. 在恒净应力吸湿过程中, μ 的改变对 η 和 ε_v 随 s 的发展演化没有影响. 原因是本文选用的SWCC通过 ε_{vs} 考虑力学行为对于水力行为的影响, 且非饱和土的屈服函数采用 ε_v^p 作为硬化参数. 但是, 如图5(d)所示, 在吸湿过程中, ε_1 随着 μ 增大而明显增大. 这是由于非饱和土在吸湿过程中刚度不同而导致的.

图6(a)~(c)分别展示了当 $s=350$ kPa, $s=150$ kPa和 $s=50$ kPa时 f 的大小以及归一化塑性应变增量的方向. 如图6所示, 在吸湿过程, 即 s 由350 kPa减小至50 kPa的过程中, q 始终保持不变, p 单调减小, 相应地, η 也单调增大, 如图5(a)所示. 虽然在 p - q 平面内, 吸湿过程的应力路径指向屈服面内, 且 f 不断缩小. 但是在 p - q - S_e 空间,

图4 (网络版彩图)恒 s 常规三轴剪切过程中 f 和归一化塑性应变增量方向的演化. (a) 初始状态; (b) $\eta=0.4$; (c) $\eta=0.8$; (d) 临界状态

Figure 4 (Color online) Evolutions of f and the normalized direction of the plastic strain increment during the conventional triaxial shearing with constant s . (a) The initial state; (b) $\eta=0.4$; (c) $\eta=0.8$; (d) the critical state.

图 5 (网络版彩图)恒净应力吸湿路径的模拟结果. (a) s - η ; (b) s - ε_v ; (c) s - ε_l

Figure 5 (Color online) Simulations of the wetting path with constant net stress. (a) s - η ; (b) s - ε_v ; (c) s - ε_l .

屈服面在整个吸湿过程中始终是单调增大的,这也是所提本构模型描述湿陷体积收缩变形的原理.椭圆屈服曲线与 p 轴的右交点随着 μ 增大而逐渐减小.其原因是与 μ 相匹配的 N 随着 μ 增大而增大.塑性应变增量的方向与 p 轴正方向之间的夹角随 μ 的增大而增大,即 ε_v^p 增量相同时,塑性剪应变增量随 μ 的增大而增大.在吸湿过程中,非正交塑性流动法则可以显著改变塑性应

图 6 (网络版彩图)恒净应力吸湿过程中 f 和归一化塑性应变增量方向的演化. (a) $s=350$ kPa; (b) $s=150$ kPa; (c) $s=50$ kPa

Figure 6 (Color online) Evolution of f and the normalized direction of the plastic strain increment during the wetting path with constant net stress. (a) $s=350$ kPa; (b) $s=150$ kPa; (c) $s=50$ kPa.

变增量的方向,并反映不同刚度的非饱和土在吸湿过程中变形的差异.

5 模型验证

采用Pearl黏土^[41]、混合土^[42]和Botkin粉土^[43]的试

验数据验证非饱和土的非正交弹塑性本构模型的预测能力.

5.1 Pearl黏土

Sun等人^[41,44]在三轴压缩条件下针对非饱和Pearl黏土进行了一系列单元体试验. Pearl黏土的比重为2.71, 液限为49%. 单元体试样为直径35 mm, 高80 mm的圆柱体. 力学参数以及水力和耦合参数见表2. $S_r^{res}=0\%$, $S_r^0=88\%$. 除 μ 外, 其余材料参数与正常固结条件下Zhou模型采用的材料参数相同^[12].

图7绘制了两个Pearl黏土试样的初始应力状态以及分别施加的应力路径. 点D表示三轴压缩条件下的临界状态. 在初始状态, 两个试样的净应力状态相同(即图7中的点A), 且 $s=147$ kPa.

图8和图9中呈现了与图7中应力路径相对应的试验数据以及模型预测. 实线表示本文所提模型的预测, 虚线表示正常固结条件下Zhou模型的预测. 从图8和

表 2 Pearl黏土的力学参数以及水力和耦合参数

Table 2 Mechanical parameters, and hydraulic and coupling parameters of the Pearl clay

力学参数	数值	水力和耦合参数	数值
λ_0	0.13	a_1	1.7
λ_d	0.03	a_2	0.01
κ	0.03	a_w (kPa)	38
Π_N	1.79	a_d (kPa)	150
M	1.12	l	2
μ	1.13	r	0.35
ν	0.2	b	4.0

图 7 (网络版彩图)非饱和Pearl黏土剪切-吸湿-剪切试验的应力路径

Figure 7 (Color online) Stress paths of the shearing-wetting-shearing tests on unsaturated Pearl clay.

图9可以看出, 在恒 s 的三轴剪切过程(路径AB和路径AE)中, 虽然 s 始终等于147 kPa, 但是 S_r 随着单元体体积的收缩而逐渐增大. 这与SWCC模型中采用的假设一致, 即净应力变化引起的体积收缩会导致 S_r 增大. 在吸湿过程, 即 s 由147 kPa减小至0 kPa过程中, S_r 单调增大, 同时伴随着明显的湿陷体积收缩变形. 此外, $\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_3=2.0$ 时吸湿路径(路径EF)产生的 ε_1 明显大于

图 8 非饱和Pearl黏土沿路径A-B-C-D的水力-力学行为. (a) $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_v - \bar{\sigma}_1 / \bar{\sigma}_3$; (b) $s - \varepsilon_v$; (c) $s - S_r$

Figure 8 Hydro-mechanical behaviour of the path A-B-C-D on the unsaturated Pearl clay. (a) $\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_v - \bar{\sigma}_1 / \bar{\sigma}_3$; (b) $s - \varepsilon_v$; (c) $s - S_r$.

$\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_3=1.5$ 时吸湿路径(路径BC)产生的 ε_1 , 表明非饱和Pearl黏土塑性应变增量的方向与应力状态密切相关. 根据图8(c)和9(c)可知, 当 $s=0$ kPa时, Pearl黏土的 S_r 不等于0. 通过将试验数据与所提模型和正常固结条件下Zhou模型的预测结果进行对比, 表明非饱和土的非正交弹塑性本构模型可以更加合理地描述Pearl黏土在基质吸力恒定(路径AB和路径AE)、基质吸力减小

(路径BC和路径EF)以及零基质吸力(路径CD和路径FD)条件下三轴剪切过程中的水力和力学行为.

5.2 混合土

Almabobi^[42]针对压实的混合土进行了一系列恒 s 的常规三轴剪切试验. 混合土由Speswhite高岭土、Leighton Buzzard砂和M400粉土组成. 比重为2.65, 塑性指数为8%, 液限为24%. 单元体试样为高100 mm, 直径50 mm的圆柱体. $S_r^{\text{res}}=6\%$, S_r^0 取为100%. 恒 s 常规三轴剪切预测所需的材料参数: M 通过 $s=0$ kPa, $\bar{\sigma}_3$ 分别为100, 250和400 kPa时常规三轴剪切试验的临界状态确定($M=1.08$); ν 取为0.3. I_N , λ_0 和 κ 通过饱和条件下的一维压缩试验确定($I_N=1.04$, $\lambda_0=0.1$, $\kappa(=\lambda_d)=0.03$), 如图10所示; μ , a_1 和 a_2 是通过模拟 $s=50$ kPa, $\bar{\sigma}_3$ 分别为100, 250和400 kPa的常规三轴剪切试验确定($\mu=0.65$, $a_1=2.0$, $a_2=0.1$). 在剪切之前, 混合土处于等向压缩状态, 因此, 初始的应力状态可用初始平均净应力 $\bar{p}_0$ 表示. 表3给出了混合土在常规三轴剪切开始之前的初始状态.

图11(a)展示了 $s=0$ kPa, $\bar{\sigma}_3$ 分别为100, 250和400 kPa时常规三轴剪切的试验数据和所提模型的预测. 在剪切过程中, q 和 ε_v 均随 ε_1 增加而单调增大. 图11(b)~(d)分别展示了 s 为50, 100和300 kPa时常规三轴剪切试验的试验数据和相应的模型预测. 在相同的净围压下, q 的最大值随着 s 的增大而增大. 但是, 应力-应变曲线的形状基本不受 s 的影响. s 相同时, q 的最大值随着净围压的增大而增大, 体应变呈现出与 q 一致的变化趋势, 即随着净围压增大, 体应变的最大值也逐渐增加.

图9 非饱和Pearl黏土沿路径A-E-F-D的水力-力学行为. (a) $\varepsilon_1/\varepsilon_3$ - $\varepsilon_v/\varepsilon_3$ - $\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_3$; (b) s - ε_v ; (c) s - S_r

Figure 9 Hydro-mechanical behaviour of the path A-E-F-D on the unsaturated Pearl clay. (a) $\varepsilon_1/\varepsilon_3$ - $\varepsilon_v/\varepsilon_3$ - $\bar{\sigma}_1/\bar{\sigma}_3$; (b) s - ε_v ; (c) s - S_r .

图10 饱和混合土的固结试验

Figure 10 Oedometer test on the saturated mixed soil.

表 3 混合土剪切之前的初始状态

Table 3 Initial states of the mixed soil before shearing

s_0 (kPa)	e_0	S_{r0} (%)	$\bar{p}_0$ (kPa)
0	0.529	100	100
	0.476	100	250
	0.438	100	400
50	0.628	75.5	100
	0.584	74.2	250
	0.530	75.9	400
100	0.668	51.1	100
	0.617	54.5	250
	0.578	57.4	400
300	0.702	40.7	100
	0.661	42.2	250
	0.626	43.6	400

模型预测与试验数据的对比表明, 恒 s 常规三轴剪切过程中, 本文模型可以合理地捕捉 q 的演化规律, 而对 ε_v 演化规律的描述却稍显不足. 其原因是本文所提模型没有考虑围压改变对 e - $\ln p$ 坐标系中NCL与CSL之间竖向距离的影响.

5.3 Botkin粉土

Wang等人^[43]利用压实的Botkin粉土开展了一系列恒 s 常规三轴剪切试验. Botkin粉土的液限为29.4%, 塑限为13.8%, 塑性指数为15.6%. 所有单元体试样均从泥浆状态开始固结, 因此, 可认为剪切前所有试样均处于正常固结状态. Botkin粉土的力学与耦合参数如下: S_r^{res} 和 S_r^0 分别取为0%和100%. $s=100$ kPa时, S_{r0} 取为87.6%. $s=200$ kPa时, S_{r0} 取为70.0%. e_0 通过初始水力状态和力学状态计算得出. M 通过饱和条件下常规

图 11 (网络版彩图)混合土的恒 s 常规三轴剪切试验. (a) $s=0$ kPa; (b) $s=50$ kPa; (c) $s=100$ kPa; (d) $s=300$ kPa

Figure 11 (Color online) Conventional triaxial shearing tests with constant s on the mixed soil. (a) $s=0$ kPa; (b) $s=50$ kPa; (c) $s=100$ kPa; (d) $s=300$ kPa.

三轴剪切试验的临界状态确定(图12), $M=1.25$. λ_0 取自原始文献, $\lambda_0=0.062$, κ 取为 λ_0 的1/5($\kappa(=\lambda_d)=0.0124$), ν 取为0.3. Π_N 由饱和条件下围压为100 kPa的常规三轴剪切试验确定($\Pi_N=0.3$). μ , a_1 和 a_2 通过 $s=100$ kPa, $\bar{\sigma}_3$ 分别为100, 200和300 kPa的恒 s 常规三轴剪切试验确定($\mu=1.23$, $a_1=5.1$, $a_2=1.9$). 图12所示为Botkin粉土在饱和条件下常规三轴剪切的试验数据与所提模型的预测. 图13所示为非饱和条件下Botkin粉土恒 s 常规三轴剪切的试验数据与所提模型的预测.

如图12所示, 对于饱和Botkin粉土, 在不同净围压下, q 和 ε_v 均随 ε_1 增加而单调增大. 当 ε_1 达到20%时, q 基本达到稳定, 可认为达到临界状态; 但 ε_v 还呈现出持续增加的趋势. 而在经典弹塑性理论中, 饱和土沿着常规三轴剪切路径加载至临界状态时, q 和 ε_v 都应保持不变, 这与图12呈现的试验规律存在差别. 因此, 本文所提模型可以合理地描述 q 的演化规律, 但是对 ε_v 演化规律的描述稍显不足. 图13(a)和(b)给出了 s 分别为100和200 kPa, $\bar{\sigma}_3$ 为100, 200和300 kPa时恒 s 常规三轴剪切的试验数据和相应的模型预测. 在图13中, $\Delta V_w/V_0$ 表示常规三轴剪切过程中单元体内水体积的变化. V_0 是单元体试样的初始体积. 常规三轴剪切结束时的 ΔV_w 随着 s 的增加而减小. 净围压相同时, q 的最大值随 s 的增加而增大. 对比图12和13可以发现, 非饱和条件下恒 s 常规三轴剪切的应力-应变曲线与饱和条件下常规三轴剪切的应力-应变曲线类似. 模型预测与试验数据的对比表明, 非饱和土的非正交弹塑性本构模型可以较合理地描述不同 s 以及 $\bar{\sigma}_3$ 作用下常规三轴剪切过程中的 q 的

图12 (网络版彩图)饱和Botkin粉土的常规三轴剪切试验
Figure 12 (Color online) Conventional triaxial shearing on the saturated Botkin silt.

图13 (网络版彩图)非饱和Botkin粉土的常规三轴剪切试验. (a) $s=100$ kPa; (b) $s=200$ kPa

Figure 13 (Color online) Conventional triaxial shearing on the unsaturated Botkin silt. (a) $s=100$ kPa; (b) $s=200$ kPa.

演化规律, 但 ε_v 演化规律的描述效果一般.

6 讨论与结论

从应变增量大小和方向的角度出发, 在 σ_{ij} 和 S_e 空间中, 基于非正交塑性流动法则, 提出了一个非饱和土的非正交弹塑性本构模型建模框架. 在所提建模框架中, 塑性应变增量的方向通过将非正交塑性流动法则应用于屈服函数直接确定, 避免了塑性势函数构造的难题, 简化了本构模型的建模过程. 所提建模框架不仅提供了一种建立非饱和土弹塑性本构模型的方法, 而且可以对现有非饱和土的弹塑性本构模型进行扩展.

基于所提建模框架, 通过确定屈服函数、硬化参数以及土水特征曲线的具体表达式, 得到了一个非饱和土的非正交弹塑性本构模型. 所提模型包含7个力学参数, 5个水力参数和2个耦合参数. 所需材料参数

均可通过常用的室内试验进行标定。与正常固结条件下Zhou模型相比, 仅增加一个材料参数 μ , 用于确定不同刚度的非饱和土在剪切过程中塑性应变增量的方向。当 $\mu=1.0$ 时, 塑性应变增量的方向与屈服面正交, 非

饱和土的非正交弹塑性本构模型将退化为正常固结条件下的Zhou模型^[12]。通过将试验数据与本文模型的预测进行比较, 验证了非饱和土的非正交弹塑性本构模型的有效性。

参考文献

- 1 Qiu J J, Wen J P, Gao W. Stability analysis and treatment of Guanghui oil depot slope in Shenzhen (in Chinese). *Chin J Rock Mech Eng*, 2009, 28: 2201–2207 [丘建金, 文建鹏, 高伟. 深圳光汇油库边坡稳定性分析及工程治理. *岩石力学与工程学报*, 2009, 28: 2201–2207]
- 2 Gens A. Soil-environment interactions in geotechnical engineering. *Géotechnique*, 2010, 60: 3–74
- 3 Su R, Zhang H R, Zhang W J, et al. Immersion tests on self-weight collapsible loess site with large depth of Lanzhou metro line (in Chinese). *Chin Civil Eng J*, 2020, 53: 186–193 [苏忍, 张恒睿, 张稳军, 等. 兰州地铁大厚度湿陷性黄土地层的现场浸水试验研究. *土木工程学报*, 2020, 53: 186–193]
- 4 Chen Z H, Guo N. New developments of mechanics and application for unsaturated soils and special soils (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2019, 40: 1–54 [陈正汉, 郭楠. 非饱和土与特殊土力学及工程应用研究的新进展. *岩土力学*, 2019, 40: 1–54]
- 5 Zhao C G, Wei C F, Cai G Q. Development and challenge for soil mechanics (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2011, 32: 3521–3540 [赵成刚, 韦昌富, 蔡国庆. 土力学理论的发展和面临的挑战. *岩土力学*, 2011, 32: 3521–3540]
- 6 Estabragh A R, Javadi A A. Critical state for overconsolidated unsaturated silty soil. *Can Geotech J*, 2008, 45: 408–420
- 7 Fern E J, Robert D J, Soga K. Modeling the stress-dilatancy relationship of unsaturated silica sand in triaxial compression tests. *J Geotech Geoenviron Eng*, 2016, 142: 04016055
- 8 Sheng D. Review of fundamental principles in modelling unsaturated soil behaviour. *Comput Geotech*, 2011, 38: 757–776
- 9 Zhou A N, Sheng D, Sloan S W, et al. Interpretation of unsaturated soil behaviour in the stress-saturation space, I: Volume change and water retention behaviour. *Comput Geotech*, 2012, 43: 178–187
- 10 Li W G, Yang Q. Implicit integration algorithm of hydro-mechanical constitutive model for overconsolidated unsaturated soils and its application (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2018, 40: 1652–1658 [李吴刚, 杨庆. 水力-力学耦合的超固结非饱和土本构模型的隐式积分算法及其应用. *岩土工程学报*, 2018, 40: 1652–1658]
- 11 Zhao C G, Li J, Liu Y, et al. Discussion on some fundamental problems in unsaturated soil mechanics (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2013, 34: 1825–1831 [赵成刚, 李舰, 刘艳, 等. 非饱和土力学中几个基本问题的探讨. *岩土力学*, 2013, 34: 1825–1831]
- 12 Zhou A N, Sheng D, Sloan S W, et al. Interpretation of unsaturated soil behaviour in the stress-saturation space. *Comput Geotech*, 2012, 43: 111–123
- 13 Cui Y J, Delage P. Yielding and plastic behaviour of an unsaturated compacted silt. *Géotechnique*, 1996, 46: 291–311
- 14 Estabragh A R, Javadi A A. Yielding of unsaturated compacted silty soil under anisotropic conditions. In: 4th International Conference on Unsaturated Soils. Arizona, 2006
- 15 Lade P V, Nelson R B, Ito Y M. Nonassociated flow and stability of granular materials. *J Eng Mech*, 1987, 113: 1302–1318
- 16 Collins I F. Associated and non-associated aspects of the constitutive laws for coupled elastic/plastic materials. *Int J Geomech*, 2002, 2: 259–267
- 17 Sun D A. Hydro-mechanical behaviours of unsaturated soils and their elastoplastic modelling (in Chinese). *Rock Soil Mech*, 2009, 30: 3217–3231 [孙德安. 非饱和土的水力和力学特性及其弹塑性描述. *岩土力学*, 2009, 30: 3217–3231]
- 18 Yao Y P, Niu L, Cui W J, et al. UH model for unsaturated soils (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2011, 33: 833–839 [姚仰平, 牛雷, 崔文杰, 等. 超固结非饱和土的本构关系. *岩土工程学报*, 2011, 33: 833–839]
- 19 Han B W, Cai G G, Li J, et al. Hydro-mechanical coupling bounding surface model for unsaturated soils considering bonding effect of particles (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2020, 42: 2059–2068 [韩博文, 蔡国庆, 李舰, 等. 考虑颗粒黏结效应的非饱和土水-力耦合双屈服面模型. *岩土工程学报*, 2020, 42: 2059–2068]
- 20 Li J, Liu K, Yin Z Y, et al. Hydro-mechanical double-yield-surface model for unsaturated sand and clay (in Chinese). *Chin J Geotech Eng*, 2020, 42: 72–80 [李舰, 刘凯, 尹振宇, 等. 非饱和砂土及黏土的水-力耦合双屈服面模型. *岩土工程学报*, 2020, 42: 72–80]
- 21 Buscarera G, Nova R. An elastoplastic strainhardening model for soil allowing for hydraulic bonding-debonding effects. *Int J Numer Anal Meth*

- [Geomech](#), 2009, 33: 1055–1086
- 22 Alonso E E, Gens A, Josa A. A constitutive model for partially saturated soils. [Géotechnique](#), 1990, 40: 405–430
 - 23 Li J, Yin Z Y, Cui Y J, et al. An elasto-plastic model of unsaturated soil with an explicit degree of saturation-dependent CSL. [Eng Geol](#), 2019, 260: 105240
 - 24 Rahardjo H, Cong Thang N, Kim Y, et al. Unsaturated elasto-plastic constitutive equations for compacted kaolin under consolidated drained and shearing-infiltration conditions. [Soils Found](#), 2018, 58: 534–546
 - 25 Lu D, Liang J, Du X, et al. Fractional elastoplastic constitutive model for soils based on a novel 3D fractional plastic flow rule. [Comput Geotech](#), 2019, 105: 277–290
 - 26 Lu D, Zhou X, Du X, et al. A 3D fractional elastoplastic constitutive model for concrete material. [Int J Solids Struct](#), 2019, 165: 160–175
 - 27 Liang J, Lu D, Zhou X, et al. Non-orthogonal elastoplastic constitutive model with the critical state for clay. [Comput Geotech](#), 2019, 116: 103200
 - 28 Lu D C, Han J Y, Liang J Y, et al. Non-orthogonal elastoplastic constitutive model of transversely isotropic clay (in Chinese). [Chin J Rock Mech Eng](#), 2020, 39: 793–803 [路德春, 韩佳月, 梁靖宇, 等. 横观各向同性黏土的非正交弹塑性本构模型. [岩石力学与工程学报](#), 2020, 39: 793–803]
 - 29 Li H C, Ma B, Zhang S, et al. Mechanical behaviors of soft rocks based on the fractional thermal elastic-plastic theory (in Chinese). [Chin J Rock Mech Eng](#), 2020, 39: 1311–1320 [李海潮, 马博, 张升, 等. 基于分数阶热弹塑性理论的软岩力学特性描述. [岩石力学与工程学报](#), 2020, 39: 1311–1320]
 - 30 Gholizadeh E, Latifi M. A coupled hydro-mechanical constitutive model for unsaturated frictional and cohesive soil. [Comput Geotech](#), 2018, 98: 69–81
 - 31 Sun Y, Sumelka W, Gao Y. Advantages and limitations of an α -plasticity model for sand. [Acta Geotech](#), 2020, 15: 1423–1437
 - 32 Sun Y F, Chen C. A state-dependent stress-dilatancy equation without state index and its associated constitutive model (in Chinese). [Rock Soil Mech](#), 2019, 40: 1813–1822 [孙逸飞, 陈成. 无状态变量的状态依赖剪胀方程及其本构模型. [岩土力学](#), 2019, 40: 1813–1822]
 - 33 Tarantino A. A water retention model for deformable soils. [Géotechnique](#), 2009, 59: 751–762
 - 34 D'onza F, Gallipoli D, Wheeler S, et al. Benchmark of constitutive models for unsaturated soils. [Géotechnique](#), 2011, 61: 283–302
 - 35 Wheeler S J, Sharma R S, Buisson M S R. Coupling of hydraulic hysteresis and stress-strain behaviour in unsaturated soils. [Géotechnique](#), 2003, 53: 41–54
 - 36 Luo T, Chen D, Yao Y P, et al. An advanced UH model for unsaturated soils. [Acta Geotech](#), 2019, 15: 145–164
 - 37 Georgiadis K, Potts D M, Zdravkovic L. Three-dimensional constitutive model for partially and fully saturated soils. [Int J Geomech](#), 2005, 5: 244–255
 - 38 Fabbri A, Wong H K K, Lai B, et al. Constitutive elasto-plastic model for fine soils in the unsaturated to saturated saturation zone. [Comput Geotech](#), 2019, 111: 10–21
 - 39 van Genuchten M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. [Soil Sci Soc Am J](#), 1980, 44: 892–898
 - 40 Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006
 - 41 Sun D, Sheng D, Xu Y. Collapse behaviour of unsaturated compacted soil with different initial densities. [Can Geotech J](#), 2007, 44: 673–686
 - 42 Almahbobi S. Experimental study of volume change and shear strength behaviour of statically compacted collapsible soil. Dissertation for Doctoral Degree. Cardiff: Cardiff University, 2018
 - 43 Wang Q, Pufahl D E, Fredlund D G. A study of critical state on an unsaturated silty soil. [Can Geotech J](#), 2002, 39: 213–218
 - 44 Sun D A, Sheng D C, Cui H B, et al. A density-dependent elastoplastic hydro-mechanical model for unsaturated compacted soils. [Int J Numer Anal Meth Geomech](#), 2007, 31: 1257–1279

Non-orthogonal elastoplastic constitutive model for unsaturated soil

LI XiaoQiang¹, LIANG JingYu², LU DeChun¹, MIAO JinBo¹ & DU XiuLi¹

¹ *Institute of Geotechnical and Underground Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China;*

² *School of Civil and Transportation Engineering, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing 102616, China*

A framework of the non-orthogonal elastoplastic constitutive model for unsaturated soil, which takes the effective degree of the saturation and Bishop's effective stress as the basic constitutive variables, is presented from the perspective of the magnitude and direction of the strain increment. The non-orthogonal plastic flow rule is adopted to directly determine the direction of the plastic strain increment through the yield function. The conundrum of constructing the plastic potential function is avoided. In the context of the proposed framework, a non-orthogonal elastoplastic constitutive model of unsaturated soil is developed by determining the specific yield function, hardening parameter, and soil-water characteristic curve. The material parameter μ is incorporated to capture the mechanical and hydraulic behavior of unsaturated soil with different stiffness. All material parameters have clear physical meanings and can be calibrated through laboratory tests. The mechanical and hydraulic behavior of unsaturated soil with different stiffnesses are analyzed through two classical stress paths, i.e., the conventional triaxial-shearing path with constant suction and the wetting path with constant net stress. The superiority of the proposed model was verified by comparing the predicted results with the experimental data of unsaturated soil.

unsaturated soil, mechanical behavior, elastoplasticity, constitutive model, non-orthogonal plastic flow rule

doi: [10.1360/SST-2021-0209](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0209)