

参量驱动型孤子束缚态的形成机制 与内部动力学特征^{*}

王新龙

(南京大学声学研究所、南京大学近代声学重点实验室, 南京 210093)

摘要 研究非线性参量共振系统中双孤子束缚态的形成机理和内在动力学, 尤其是孤子的周期“碰撞”行为和相互作用的非线性复杂性. 结果表明: (1) 因存在着单阱势, 同极性双孤子无论相距多远总是相互吸引的; 它们最终形成振荡型或驻波型孤子束缚态; (2) 束缚态中的每个孤子的动量具有单向性, 孤子的周期“碰撞”行为实际上是双孤子的不断合并和再生这两个相反过程的动态平衡; (3) 在低阻尼的情形下, 系统内部高频振动模式的激发导致孤子相互作用呈现出一定程度的无规性或混沌性、甚至导致束缚态空间对称性的破损.

关键词 参量共振 孤子束缚态 合并与再生 混沌

孤子束缚态是物理上十分有意义的局域化复合结构. 虽然在标准的(1+1)维可积非线性 Schrödinger (NLS) 系统中束缚态是不稳定的^[1], 但是, 在一些与 NLS 有关而数学上往往不可积的物理系统中^[2], 束缚态却可以稳定地存在. 这些系统包括 NLS-Ginzburg-Landau 方程^[3]、耦合 NLS 方程系统^[4]、阻尼型交变驱动 (ac-driven, damped) NLS 方程^[5]、和 Quintic Ginzburg-Landau 方程^[6], 等等; 它们直接描述了从光学通信一直到流体力学的物理世界. 一般认为, 在这些“阻尼-驱动”型系统中, 束缚态的形成是由于孤子的两翼存在振荡性指数衰减尾波. 这种尾波使得孤子之间的相互作用势在某些间距上达到极小值. 本文感兴趣的是另一类具有局域化现象的 NLS 相关系统——参量驱动耗散型非线性 Schrödinger (PDNLS) 方程^[7,8]:

$$i(\phi_t + \alpha\phi) + \phi_{xx} + 2|\phi|^2\phi - \phi + \gamma\phi^* = 0, \quad (1)$$

其中 α 是系统的阻尼系数, γ 是系统的驱动强度, 且 $(\alpha, \gamma) = o(1)$. 这类系统以经典的 Faraday 共振为代表^[9,10], 包括非线性耦合晶格点阵系统^[11]、参量场作用下的磁系统^[12], 等等^[7]. 最新数值研究证明^[13,14], 方程(1)存在同极性双孤子束缚态解. 该束缚态解很好地描述了 Faraday 表面波实验中所观察到的双孤子周期碰撞现象^[13,15].

参量激励束缚态最令人感兴趣的是其类经典振子的振荡. 实验和数值研究还表明, 这一复合结构在 PDNLS 多孤子链中起着“分子”的作用^[16,17]. 然而, 迄今为止我们仍对参量激励束缚态的形成机理缺乏足够的认识(正常条件下, PDNLS 孤子的尾波无振荡性). 更重要的

是,从粒子性这一观点来看,我们对束缚态中全同双孤子的“碰撞”机制依然十分模糊,一些基本问题仍然没有令人满意的答案.例如,孤子在“碰撞”瞬间到底有没有交换位置^[9]?这种“碰撞”是否遵从经典的弹性碰撞规律?等等.此外,还存在不少有关实验事实尚未得到很好地解释.譬如,在 Faraday 实验中,为什么束缚态在纯净水(如蒸馏水)中反而难于稳定?即使能稳定,束缚态的形态也显得十分不规整;而此时若加入几滴墨水,则效果大大改善.水越不干净,孤波形态越光滑,且稳定性越强.所以这些悬而未决的问题促使我们对束缚态的内在动力学进行深入的研究.

1 有效作用势和束缚态的形成

首先考察一对同极性全同孤子的相互作用势.设双孤子的对称中心位于原点 $x=0$,且左右孤子的“质心”坐标分别为 x_L 和 x_R ($x_L = -x_R$).在无阻尼的情形下 ($\alpha=0$),PDNLS 系统(1)的 Hamiltonian 可以表达为

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [|\phi_x|^2 - |\phi|^4 + |\phi|^2 - \gamma \text{Re}(\phi^2)] dx. \quad (2)$$

一般地 ($\alpha \neq 0$),我们可以从方程(1)导出如下方程

$$\frac{dE}{dt} + 2\alpha E = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} |\phi|^4 dx. \quad (3)$$

显然,无耗散时 E 是守恒的;所以, E 具有能量的意义.稳态时, $dE/dt=0$,故

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi|^4 dx, \quad (4)$$

“质心”位于 x_0 处的驻波单孤子可由如下的稳态解析解描述^[8]:

$$\phi_1(x, x_0) = aie^{-i\theta} \text{sech}\left[\frac{x-x_0}{\lambda}\right], \quad (5)$$

其中 $\lambda = a^{-1}$ 衡量孤波空间范围,而波幅 $a = \sqrt{1 + \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}}$,相角 $\theta = \frac{1}{2} \arcsin(\alpha/\gamma)$.将(5)式代入(4)式,我们得到单孤子态的能量 $E = E_1 = 2\alpha^3/3$.然而,我们无法从方程(1)获取双孤子态的解析解,故不能直接用(2)或(4)式求出能量的解析表达式.首先考虑孤子相距甚远的简单情形: $\Delta \equiv |x_R - x_L|/\lambda \gg 1$.在初级近似下,双孤子解 ϕ_2 可以用两个单孤子解 ϕ_1 的线性叠加来近似:

$$\phi_2 \approx \phi_1(x, x_L) + \phi_1(x, x_R). \quad (6)$$

将它代入(2)式并积分,我们得到孤子相互作用的“有效”势 $V(\Delta)$:

$$V(\Delta) \equiv E - 2E_1 \approx -a^3(5 + \cosh \Delta) \text{sech}^4(\Delta/2), \quad (7)$$

很容易验证,对于 $\Delta > 0$, $dV/d\Delta > 0$,且 $V(0) = -6a^3$, $V(\infty) = 0$.所以, V 是一个单阱势,它证明了孤子的相互吸引力.以上结果与颜家壬等人^[18]以前得出的基本一致,但我们的结果对 $\alpha \neq 0$ 的情形也适用.

那么,相互吸引的双孤子的终态是什么?当 $\Delta \sim 1$,显然线性叠加近似解(6)式不成立.我们试图通过直接求方程(1)的数值解来解决这一问题.为了尽量避免边界效应^[15],计算中我们选用的系统尺寸 l ($-l/2 < x < l/2$) 远大于束缚态的局域范围,即 $l \gg |x_R - x_L|$.数值模拟表明,双孤子最终演化成一个与驱动强度 γ 有关的稳态.对于给定的 α ,存在 3 个重要的驱动

阈值: $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$, 如图 1 所示. 在小振幅驱动下 ($\gamma < \gamma_1$), 双孤子只是简单地合并成单孤子. 但是, 如果 $\gamma \in R_1$ ($\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$), 则双孤子将形成振荡型束缚态. 而当 $\gamma \in R_2$ ($\gamma_2 < \gamma < \gamma_3$) 时, 所形成的束缚态是静止的, 即 Δ 保持恒定. 图 2 给出了典型的演化过程. 该图还说明了孤子相互吸引的对数特征. 所以, 当 $\Delta \gg 1$ 时, 孤子的相对运动几乎察觉不到; 这与实验观察是一致的. 我们还可以进一步把振荡参数区域 R_1 细分为上下两个子域: 在下区域中, 孤子在“碰撞”过程中始终是不可区分的, 而在上区域中存在 $\min(\Delta) > 0$, 故孤子始终是可分辨的. 在驻波态参数区域 R_2 内, Δ 仅依赖于 (α, γ) . 当 $\gamma > \gamma_3$ 时, 空间连续波的共振激发将破坏束缚态的稳定性. 关于束缚态稳态运动的详情, 可参阅文献 [13, 14].

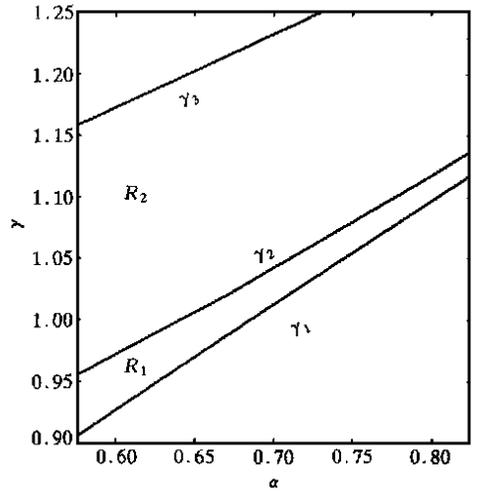


图 1 束缚态在 (α, γ) 平面上的参数区域 $l=40$

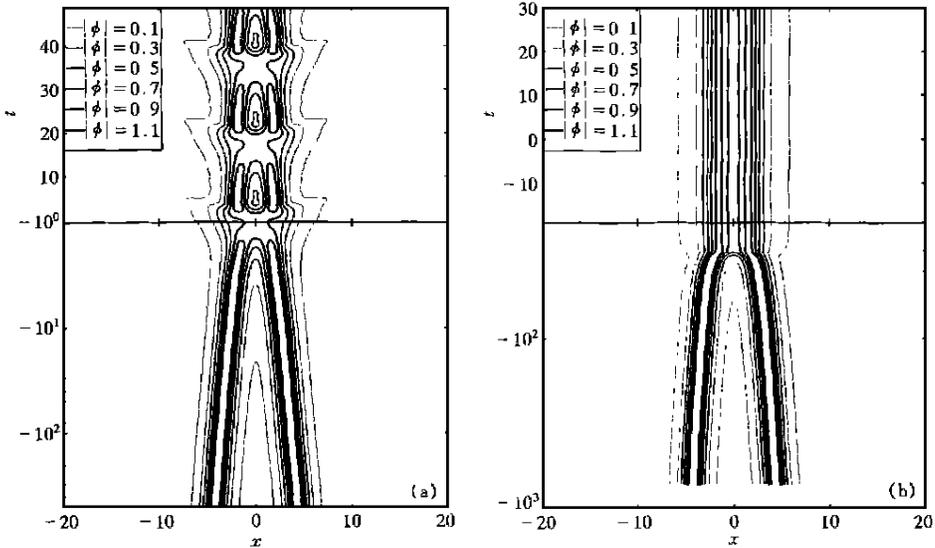


图 2 初始相距较远的一对同极性孤子的波幅等高线演化图

每幅图下半部分的时间轴是用对数标度的, 而上半部用线性标度. 计算中, 取 $l=40$. (a) $(\alpha, \gamma) = (0.6, 0.94) \in R_1$; (b) $(\alpha, \gamma) = (0.6, 0.98) \in R_2$

2 束缚态孤子相互作用的内部过程

现在的问题是, 为什么相互吸引的孤子会形成稳定的束缚态? 我们试图通过分析每个孤子的动量来解决这一基本问题.

2.1 流向对称中心的定向动量流

在任何情形下, 束缚态孤子波包是空间对称的, 即 $\phi(x, t) = \phi(-x, t)$. 所以, 系统的总

动量 M 为零^[13]. 为了研究孤子“碰撞”的内部动力学, 我们为每个孤子定义其动量如下:

$$\begin{cases} M_L \equiv (2i)^{-1} \int_{-\infty}^0 (\phi^* \phi_x - \phi \phi_x^*) dx & (x < 0), \\ M_R \equiv (2i)^{-1} \int_0^{\infty} (\phi^* \phi_x - \phi \phi_x^*) dx & (x > 0), \end{cases} \quad (8)$$

显然, $M_L = -M_R$. 该定义的物理依据^[15]是: 在 Faraday 水槽中, (1) 在束缚态的对称中心插入一块隔板不影响每个孤子的运动; (2) 通过表面波理论可以直接证明, M_L 和 M_R 分别正比于对称中心两侧流体的物理动量. 根据方程(1), 可以导出

$$\frac{dM_{L,R}}{dt} + 2\alpha M_{L,R} = \pm \left[|\phi|^4 + \frac{1}{2} (|\phi|^2)_{xx} \right] \Big|_{x=0}, \quad (9)$$

其中 M_L 和 M_R 分别取方程右边的正号和负号. 当 $\Delta \gg 1$ 时, 孤子运动十分缓慢, 所以 $dM_{L,R}/dt \approx 0$. 应用近似解(6)式并代入上式, 得出

$$M_{L,R} \approx \mp aV(\Delta)/\alpha, \quad (10)$$

根据(7)式, $V < 0$, 所以 $M_L > 0$ 和 $M_R < 0$, 即孤子的动量流向对称中心. 这与我们预期的一致. 为了观察“碰撞”过程中($\Delta \sim 1$)孤子动量的变化, 我们重新定义左($x < 0$)右($x > 0$)孤子的“位置” x_L 和 x_R 分别为 $\text{Im}(\phi)$ 取最大值的 x 坐标值(也可取 $|\phi|$ 的最大值位置, 但计算表明两种定义无本质的差别). 图 3 给出了振荡区域 R_1 内的典型(x_R, M_R)相轨道[注: ($x_L,$

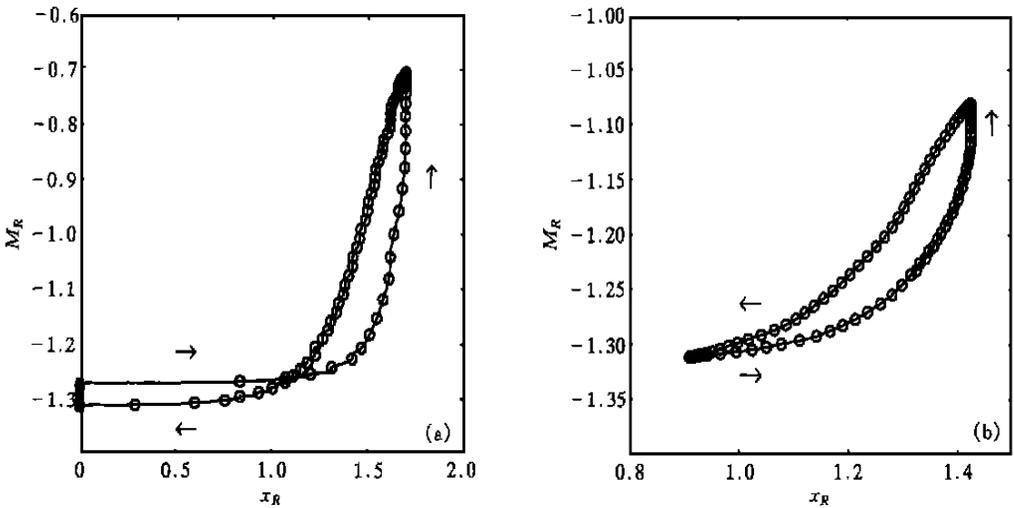


图 3 振荡型束缚态孤子的动量与位置的关系

$l=40$. (a) $(\alpha, \gamma) = (0.8, 1.105) \in R_1$, 此时, 孤子在相互作用过程中是不可区分的;

(b) $(\alpha, \gamma) = (0.8, 1.112) \in R_2$, 此时, 孤子始终是可分辨的

$M_L) = -(x_R, M_R)$. 由此可见, 虽然表面上孤子在“碰撞”后迅速“弹回”到最大间距, 但是孤子的动量却始终指向对称中心, 即 $M_L > 0 > M_R$. 这是与经典弹性模型直接相矛盾的. 它同时表明, 孤子在“碰撞”期间根本不存在对穿.

在驻波束缚态的情形下, 方程(9)简化为

$$M_{L,R} = \pm \frac{1}{2\alpha} \left[|\phi|^4 + \frac{1}{2} \left(|\phi|^2 \right)_{xx} \right] \Big|_{x=0}, \quad (11)$$

对于两个分开的孤子, 显然有 $|\phi^2|_{xx} > 0$, 故 $M_L > 0$, $M_R < 0$. 由此可见, 即使处于驻波态, 束缚态中也存在着流向对称中心的定常动量流. 随着控制强度 γ 的增大, 束缚态能量将增加, 即 $E \rightarrow 2E_1$; 故 $V \rightarrow 0$, 而 $\Delta \rightarrow \infty$. 当 Δ 很大时, 动量公式(10)对驻波束缚态也近似成立.

2.2 孤子的合并与再生

孤子动量的定向特征否定了孤子“碰撞”的经典力学模型. 那么, 这一特征的物理涵义是什么? 在此, 必须考虑到我们所面对的是“耗散-驱动”型系统这一基本事实. 阻尼耗散将不断消耗束缚态的能量, 使双孤子倾向于合并成单孤子. 而动量流源源不断流向对称中心这一事实则说明系统同时得到外部能源的补充. 我们认为, 束缚态孤子的周期性振荡或“碰撞”行为本质上是束缚态孤子的不断合并和再生的动态过程. 实验观察支持了这一观点. 在早期的 Faraday 实验中^[9, 19], 人们就已经注意到, 孤子“碰撞”后, 表面波会出现 3 个幅度差不多的波峰; 中间的峰很快消失. 我们的数值模拟表明, 如果驱动 $\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]$ 但又非常靠近下限 γ_1 , 则上述实验现象完全可以数值再现. 在这一驱动条件下, 外界的能量输入几乎刚好补偿了束缚态能量的耗散. 图 4 模拟了这种情形下束缚态的演化以及相应的“粒子数” N 的变化. 此

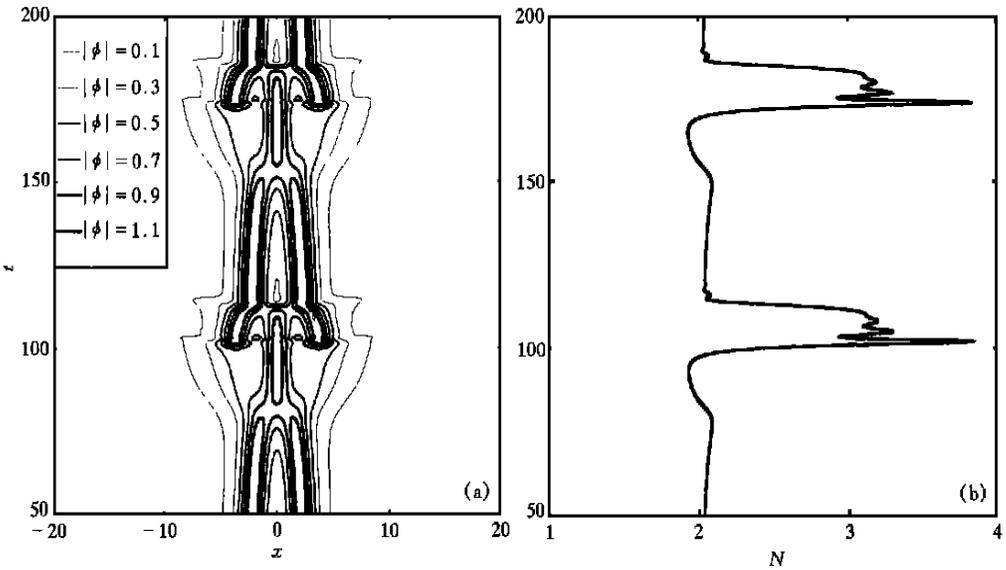


图 4 束缚态孤子的合并与再生过程数值模拟

$l = 40$, $(\alpha, \gamma) = (0.8, 1.09703) \in R_1$, (a) 等高线图, (b) 孤子数 N 随时间的变化

处, N 定义为 $N \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x, t)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1|^2 dx$, 其中 ϕ_1 是稳态单孤子解(5)式. 在 NLS 可积系统中, N (除了归一化常数之外) 是守恒量. 而在 PDNLS 系统中, N 可以随时间变化; 但计算表明, N 近似等于孤子态中孤子的个数^[17]. 不难看出, 束缚态演化过程中存在着 3 个不同的状态跃迁: (1) 双孤子趋向于合并成一个较大的单孤子 ($N: 2 \rightarrow 1$); (2) 在远离对称中心处同时自发生成两个新的同极性孤子 ($N: 2 \rightarrow 3$); (3) 中间的孤子 (或隆起) 迅速被吸收

($N: 3 \rightarrow 2$). 应用我们以前的符号体系^[13,17], 则上述演化过程可以表达为下列周期序列,

$\dots \rightarrow \uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow \rightarrow \dots$

其中“ \uparrow ”指双孤子合并后的重叠态, 它几乎就是一个单孤子“ \uparrow ”. 显然, 在这一过程中孤子既没有因“碰撞”而反弹, 也不存在互相对穿. 既然如此, 当然有 $M_L > 0 > M_R$ (定向性).

至此, 我们看到, 参量激励束缚态显著地不同于标准的 NLS 束缚态. 首先, 在可积的 NLS 系统中^[1,20], 对称双孤子束缚态的“粒子数”是守恒的, 即 $N=2$. 其次, 运用已有的双孤子束缚态解析公式^[20] 并通过 (9) 式可证明, NLS 束缚态孤子的相互作用完全符合弹性碰撞规律.

3 束缚态非线性动力学的复杂性

我们发现, PDNLS 束缚态的规则动力学行为仅存在于阻尼较大的介质中. 当 α 降低时, 孤子的相互作用呈现出复杂的非线性行为. 图 5 是我们用数值计算得到的数据构造的稳定性

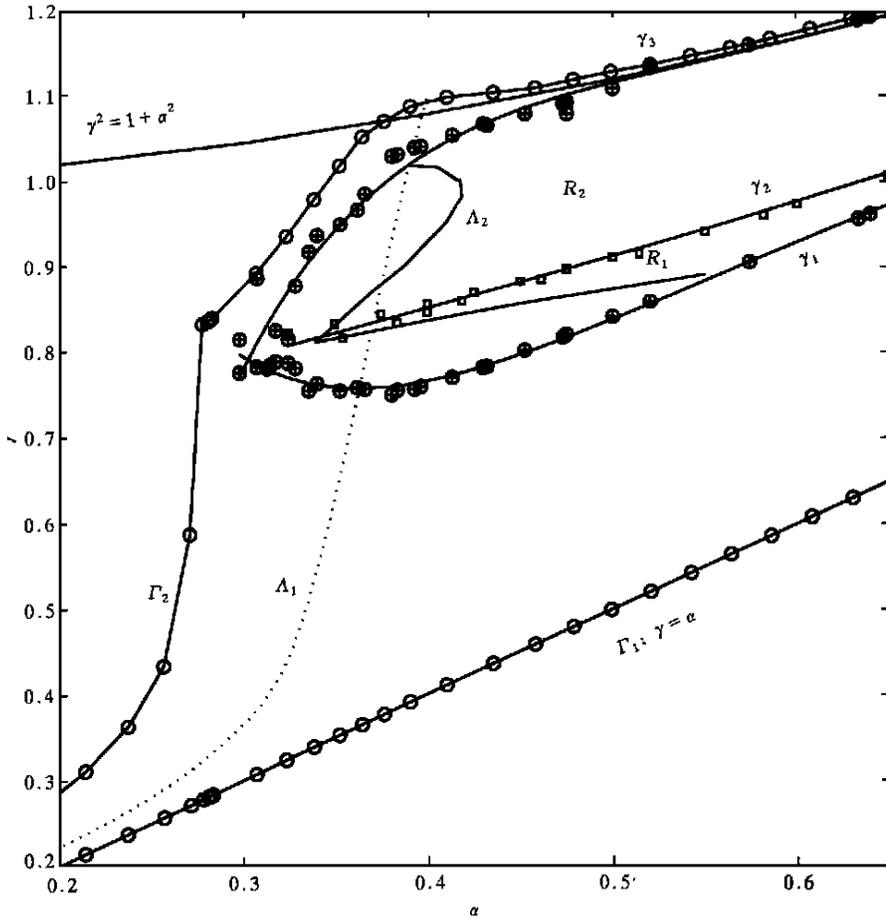


图 5 束缚态的稳定性分岔图

图中由 Γ_1 和 Γ_2 (线段连接起来的小“ \circ ”)所围的区域为单孤子态的参数区域, 其中的虚线 Δ_1 表示单孤子的 Hopf 分岔线. 束缚态的参数区域以 γ_1 和 γ_3 (由“ \oplus ”表示)为边界, 其中 γ_2 (由“ \square ”表示)是振荡和非振荡子区域 R_1 和

R_2 的分界线, 粗线 Δ_2 是束缚态的 Hopf 分岔线

参数图, 它比图 1 更详细全面. 作为对比, 我们还在此图中包括了单孤子态的参数区域. 这些

稳定性数据是在 $l=40$ 时计算而得的, 但计算表明, 图 5 实际上是适用于 $l > 30$ 的所有情形. 单孤子态的稳定性已由多人作了深入的解析和数值研究^[7, 21]. 在此值得指出的是, 当 (α, γ) 越过点线 Δ_1 而进入左边的参数区域时, 单孤子发生 Hopf 分岔, 从而激发频率为 $f_h (\sim 1)$ 的内部振荡模式; 而当 (α, γ) 非常接近于左边界 Γ_2 时, 单孤子态将展示复杂的非线性分岔和混沌行为. 虽然如此, 在 NLS 极限 $(\alpha, \gamma) \rightarrow (0, 0)$ 下, 单孤子仍然可以稳定. 双孤子束缚态的参数区域 \mathcal{R} 在图 5 中是由符号“ \oplus ”所围成的区域, 由振荡区域 R_1 和准静态区域 R_2 组成, 即 $\mathcal{R} = R_1 \cup R_2$ (详见第 1 节). 有趣的是, 单孤子和束缚态均在同一上边界线 $\gamma = \gamma_3 \approx \sqrt{1 + \alpha^2}$ 上失稳; 当 $\gamma > \gamma_3$ 时, 空间扩展的连续波将参量激发.

数值观察表明, 当 (α, γ) 沿着 $(-\alpha)$ 方向穿越图 5 中的线段 Δ_2 时, 束缚态同样也发生 Hopf 分岔, 并激发频率为 f_h 的内部振荡模式. 与“碰撞”频率 $f_c (\sim 0.1)$ 相比, f_h 模式是高频振动 ($f_h \sim 10f_c$). 这种分岔行为高度地依赖于 (α, γ) 在 \mathcal{R} 中的取值. 在驻波区域 R_2 内, 高频模式的激发使得在有关相空间上定点吸引子失稳, 并被极限环所取代, 如图 6(a) 所示. 在振

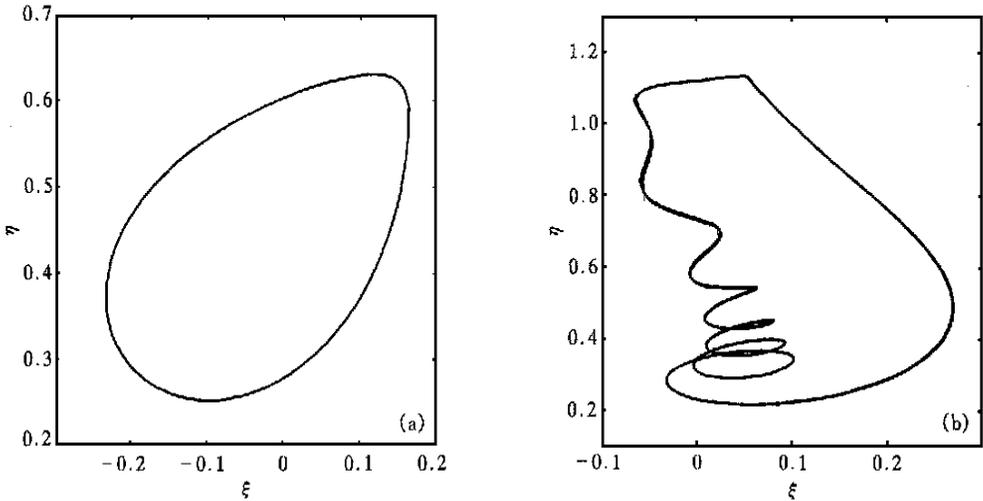


图 6 发生 Hopf 分岔时束缚态的相轨道吸引子

$\xi = \text{Re}(\phi)|_{x=0}, \eta = \text{Im}(\phi)|_{x=0}$. (a) $(\alpha, \gamma) = (0.4, 0.95) \in R_2$; (b) $(\alpha, \gamma) = (0.5, 0.85) \in R_1$

荡区域 R_1 内, 高频模式表现为束缚态在孤子“碰撞”后发生“震颤”, 这种“震颤”在几个振动周期 ($1/f_h$) 内迅速衰减掉, 如图 6(b) 所示. 在任何情况下, 高频振动产生小振幅连续波辐射. 在区域 R_1 内, 如果 (α, γ) 继续沿着 α 的负向移动, 则高频模式将参量放大. 这时, 两种频率模式的强度达到同等量级, 因而发生强烈的非线性耦合相互作用, 结果导致孤子“碰撞”的无规性. 图 7 是这种无规“碰撞”的频谱和孤子最大间距的分布图. 如果 (α, γ) 非常靠近 R_1 或 R_2 的左边界, 束缚态进一步发生空间分岔, 从而造成其空间对称性的破坏, 并引起如图 8(a) 所示的非对称连续波辐射. 图 8(b) 是这种情形下束缚态的长期演化模拟; 由此可见, 非对称的束缚态作为整体在空间发生缓慢的来回晃动. 数值观察表明, 这种运动形式是极其不稳定的. 一旦失稳, 空间相干结构就自行毁灭, 系统从此进入时空混沌.

关于有界系统中束缚态的稳定性. 以上结果适用于 l 很大或无界的一维系统. 在 Fara-

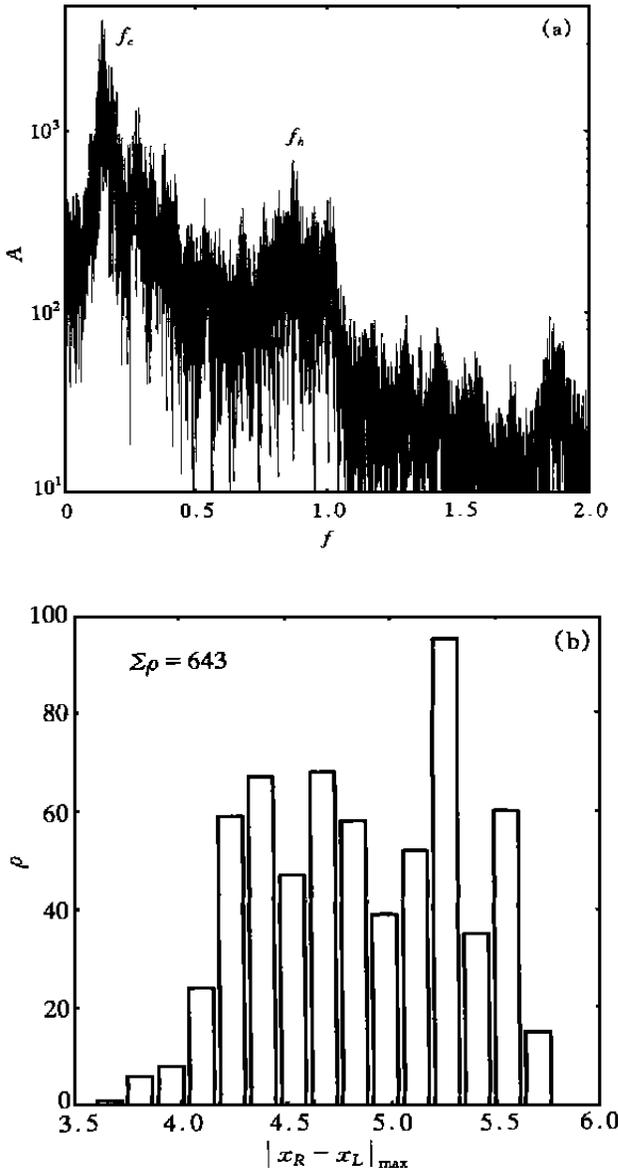


图 7 束缚态孤子的无规“碰撞”

$(\alpha, \gamma) = (0.4, 0.7669) \in R_1$, (a) 功率频谱: $A \sim |\text{FFT}(\eta)|$, $\eta = \text{Im}(\phi)_{x=0}$; (b) 孤子最大间距 $|x_R - x_L|_{\max}$ 的分布 (ρ 为孤子“碰撞”次数, $\Sigma\rho$ 为总“碰撞”次数)

day 共振水槽实验中, 我们早就观察到, 线性本征频率与 Faraday 共振频率十分接近的纵向表面波模式比在短槽中更容易激发, 其后果是破坏束缚态的稳定性. 所以, 束缚态在短槽中比长槽中更容易稳定. 鉴于此, 我们的实验往往采用相对较短的水槽. 也就是说, 我们实际上面对的是一个有界边值问题 ($l < 20$). 计算表明, 随着 l 的缩短, 在 (α, γ) 平面上束缚态的参数区域相对于单孤子的区域将明显地升高, 并逐步移出. 所以, 实验测得的束缚态稳定性区域几乎在单孤子态的上面^[15]. 另一方面, 由于 Faraday 水槽中存在多个表面波模式的竞争, 束缚态的分岔行为远比上述讨论的要复杂. 本文仅考虑束缚态的内部动力学; 所以, 边界对束缚态的影响, 以及束缚态与其他模式的非线性相互作用不作进一步的分析.

4 总结与讨论

本文中我们运用相互作用势证明了同极性孤子相互吸引力. 根据驱动强度的大小, 双孤子要么合并成单孤子, 要么形成稳定的束缚态. 以前, 我们曾得到以下两个结果: (1) 一对反极性的孤子总是相互以对数方式排斥, 除非它们被限于有界系统中^[22]; (2) 两个以上的同极性孤子最终退化为双孤子束缚态(或单孤子态)^[17]. 结合这些结果可以断定, 在无界系统中 ($l \rightarrow \infty$), 任意一个多孤子态最终将发展成为一系列相距遥远、相互独立的驻波型单孤子和(或)束缚态. 而在有界系统中 ($l \ll \infty$), 边界及

其“镜像效应”^[15] 使得多孤子态中的个体以及它们的虚像互相制约而形成稳定有序的一维孤子链^[17], 其中束缚态扮演“分子”的角色. 因此, 单孤子态和束缚态是参量驱动共振系统中仅有的两个元激发态.

孤子动量的单向性(指向对称中心)是参量激励束缚态最重要的动力学特征. 这一特征表

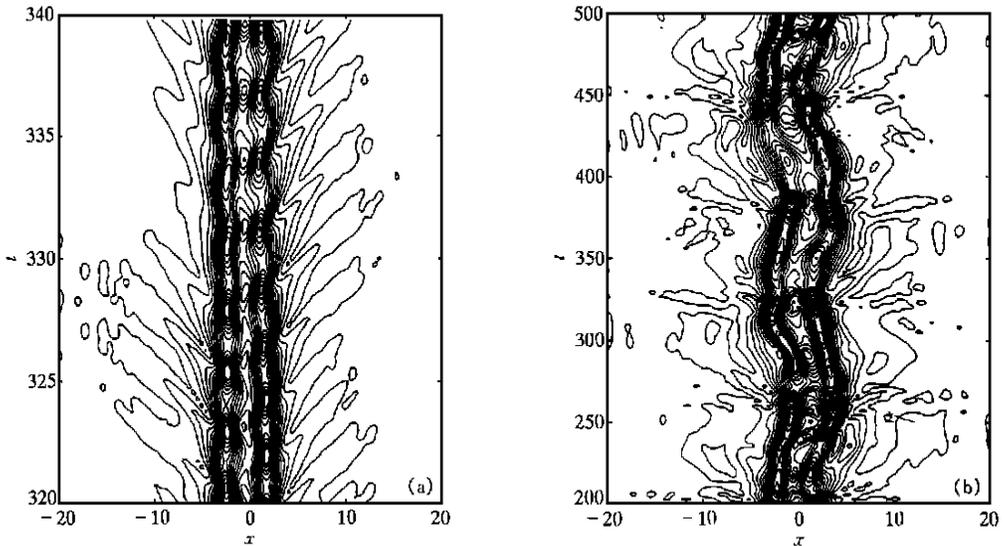


图 8 对称性破损情形下束缚态演化的 $|\phi|$ 等高线图
 $\alpha = 0.35$, $\gamma = 0.8836$. (a) 非对称演化及辐射; (b) 长期演化

明束缚态孤子的相互作用不同于经典弹性粒子之间的碰撞。支配束缚态稳态振荡行为的是耗散所导致的孤子合并(消灭)与孤子的参量再生这两个相反而又相平衡的物理过程。这是一种新型的束缚态形成和相互作用机制。一般认为, 阻尼耗散在物理系统中起负面作用, 而外部驱动的引入只是为了抵消此效应。而我们的结果表明, 阻尼效应还对参量激励束缚态的稳定具有不可忽视的积极作用, 即它有效地抑制了系统高频模式。相反, 在低阻尼或无阻尼的介质中, 高频模式的激发使得孤子之间的相互作用呈现出非线性复杂性, 甚至破坏束缚态的稳定。这就解释了为什么束缚态在纯净水中反而不易稳定的事实。另一方面, 参量驱动也不只是简单地平衡能量的耗损。例如, 直接驱动的耗散型 NLS 方程(将方程(1)中的 $\gamma\phi^*$ 项用 γ 取代)就不支持稳定的振荡束缚态^[3]。显而易见, 我们对参量激励型孤子束缚态的物理理解已经大大超越了数学理论的范畴。

参 考 文 献

- 1 Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one dimensional self modulation of waves in nonlinear media. *Sov Phys JETP*, 1972, 34: 62
- 2 Kivshar Yu S, Malomed B A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems. *Rev Mod Phys*, 1989, 61: 763
- 3 Malomed B A. Bound solitons in the nonlinear Schrödinger-Ginzburg-Landau equation. *Phys Rev*, 1991, A 44: 6 954
- 4 Malomed B A. Bound solitons in coupled nonlinear Schrödinger equations. *Phys Rev*, 1992, A45: R8321
- 5 Cai D, Bishop A R, Niels G J, et al. Bound solitons in the ac driven damped nonlinear Schrödinger equation. *Phys Rev E*, 1994, 49: 1 677
- 6 Afanasjev V V, Chu P L, Malomed B A. Bound states of dark solitons in the quintic Ginzburg-Landau equation. *Phys Rev E*, 1998, 57: 1 088
- 7 Bondila M, Barashenkov I V, Bogdan M M. Topography of attractors of the parametrically driven nonlinear Schrödinger equa-

- tion. *Physica D*, 1995, 87: 314
- 8 Miles J M. Parametrically excited solitary waves. *J Fluid Mech*, 1984, 148: 451
 - 9 Wu J, Keolian R, Rudnick I. Observation of a nonpropagating hydrodynamic soliton. *Phys Rev Lett*, 1984, 52: 1421
 - 10 Denardo B, Wright W, Putterman S. Observation of a kink soliton on the surface of a fluid. *Phys Rev Lett*, 1990, 61: 1518
 - 11 Denardo B, Galvin B, Greenfield A, et al. Observations of localized structures in nonlinear lattice, domain walls and kinks. *Phys Rev Lett*, 1992, 68: 1730
 - 12 Barashenkov I V, Bogdan M M, Korobov V I. Stability diagram of the phase-locked solitons in the parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation. *Euro Phys Lett*, 1991, 15: 113
 - 13 Wang X L, Wei R J. Dynamics of multisoliton interactions in parametrically resonant systems. *Phys Rev Lett*, 1997, 78(4): 2744
 - 14 Wang X L. Dynamics of soliton-soliton interactions in parametrically-driven systems. *Chin Phys Lett*, 1997, 14: 109
 - 15 Wang X L. Reflections and mirror effect of parametrically-excited solitons at a boundary. *Science in China Ser A*, 1995, 38(3): 335
 - 16 Wang X L, Wei R J. Synchronous spatiotemporal oscillation between two parametrically excited bound states. *Chin Phys Lett*, 1998, 15: 275
 - 17 Wang X L, Wei R J. Oscillatory patterns composed of the parametrically excited surface-wave solitons. *Phys Rev E*, 1998, 57: 2405
 - 18 Yan J R, Mei Y P. Interaction between two Wu's solitons. *Europhys Lett*, 1993, 23: 335
 - 19 Wei R J, Wang B, Mao Y, et al. Further investigation of nonpropagating solitons and their transition to chaos. *J Acoust Soc Am*, 1990, 88: 469
 - 20 Herman A H, Islam M N. Theory of the Soliton Laser. *IEEE Journal of Quantum Mechanics*, QE-21 (8), 1985
 - 21 Friedel H, Laedke E W, Spatschek K H. Bifurcations and nonlinear dynamics of surface waves in Faraday resonance. *J Fluid Mech*, 1995, 284: 341
 - 22 Wang X L, Wei R J. Interactions and motions of double solitons with opposite polarity in a parametrically driven system. *Phys Lett A*, 1997, 227: 55