鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的实内插

献给吴从忻教授 85 华诞

李维, 吴恋*, 焦勇

中南大学数学与统计学院, 长沙 410085

E-mail: csuliwei@csu.edu.cn, wulian@csu.edu.cn, jiaoyong@csu.edu.cn

收稿日期: 2020-05-31; 接受日期: 2020-08-10; 网络出版日期: 2020-11-25; * 通信作者

国家自然科学基金 (批准号: 11722114 和 11971484) 资助项目

摘要 本文首先研究与慢变函数相联系的鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间上的实内插; 之后通过引入新的鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间, 给出鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在极值情形的等价刻画; 最后, 作为应用, 证明分数阶积分算子在鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的有界性.

关键词 鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间 实内插 迭代 分数阶积分

MSC (2010) 主题分类 46E30, 60G46

1 引言

与慢变函数相联系的 Lorentz-Karamata 空间^[1-4]是一种相较于 Lorentz 空间、Lorentz-Zygmund 空间和广义 Lorentz-Zygmund 空间而言范围更广、性质更差的函数空间. 通过将该型空间与鞅理论相结合, Ho^[5]定义了鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间, 并对其上的原子分解、对偶和内插进行了研究. 此后, 借助文献 [6] 中的关键思想, 文献 [7] 更为细致地讨论了鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的对偶问题, 进一步完善了文献 [5] 中的一些结论. 此外, 文献 [8, 9] 还将 Karamata 型空间和凹函数结合起来, 研究了鞅 Hardy-Orlicz-Karamata 空间和弱 Orlicz-Hardy-Karamata 空间上的原子分解、对偶和鞅不等式等. 其他关于 Karamata 型鞅空间的研究, 可参见文献 [10, 11].

在上述研究的基础上, 本文着重考虑鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的实内插及内插迭代在极值情形下的等价刻画. 此节后续若出现任何未被解释的记号或术语, 请参见下一节.

注意到, Ho^[5]的内插结果表明, 鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间可表示为鞅 Hardy 空间在一种新的内插函子 $(\cdot, \cdot)_{\theta, r; b}$ 作用下生成的内插空间, 即

$$(H_{p_0}^s, H_{p_1}^s)_{\theta, r; b} = H_{p, r; b_\alpha}^s, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad (1.1)$$

英文引用格式: Li W, Wu L, Jiao Y. Real interpolations of martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces (in Chinese). Sci Sin Math, 2020, 50: 1793-1806, doi: 10.1360/SSM-2020-0169

其中 $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $0 < \theta < 1$, $b \in SV$, 且对于任意 $t > 0$, 有 $b_\alpha(t) = b(t^{1/p_0-1/p_1})$. 根据文献 [12, 定理 5.11] 中关于鞅 Hardy 空间的内插结果,

$$(H_{p_0}^s, H_\infty^s)_{\theta, r} = H_{p, r}^s, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}, \quad (1.2)$$

可以猜测 (1.1) 应当对 $p_1 = \infty$ 仍然成立. 本文的第一个主要目标便是回答这一问题, 证明下述结果成立.

定理 1.1 设 $0 < p_0 < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $b \in SV$, $\theta \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0}.$$

对 $t > 0$, 令 $\bar{b}(t) := b(t^{1/p_0})$, 则有

$$(H_{p_0}^s, H_\infty^s)_{\theta, r; b} = H_{p, r; \bar{b}}^s = (H_{p_0, \infty}^s, H_\infty^s)_{\theta, r; b}.$$

作为上述定理的直接推论, 利用内插空间的迭代法则, 可立即得到以下两个内插结果, 其中推论 1.1 覆盖了文献 [5, 定理 7.11] (亦即 (1.1)).

推论 1.1 设 $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $b \in SV$, $\theta \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}.$$

对任意 $t > 0$, 令 $b_\alpha(t) := b(t^{1/\alpha})$, 则

$$(H_{p_0}^s, H_{p_1}^s)_{\theta, r; b} = H_{p, r, b_\alpha}^s = (H_{p_0, \infty}^s, H_{p_1}^s)_{\theta, r; b}.$$

推论 1.2 设 $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $b_0, b_1, b \in SV$, $\theta \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p}.$$

对所有的 $t > 0$, 令 $b_\theta^\#(t) = b_0^{1-\theta}(t)b_1^\theta(t)b(t^{1/p_0-1/p_1}b_0(t)/b_1(t))$, 则

$$(H_{p_0, q_0; b_0}^s, H_{p_1, q_1; b_1}^s)_{\theta, q; b} = H_{p_\theta, q; b_\theta^\#}^s.$$

注 1.1 取 $b \equiv 1$, 则定理 1.1 回到鞅 Hardy 空间中的内插结果 (参见 (1.2)). 在推论 1.2 中, 若取 $b_0 = b_1 = b \equiv 1$, 则回到鞅 Hardy-Lorentz 空间上的内插结果 (参见文献 [12, 推论 5.12]).

与文献 [12] 中证明 (1.2) 所用到的方法不同, 定理 1.1 的证明完全不需要原子分解定理. 其证明主要依赖于停时工具以及 K -泛函和非增重排函数之间的等价刻画.

本文的第二个目标是考虑鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在极值情形 (即 $\theta = 0, 1$ 时) 的等价刻画. 极值情形的内插迭代一直是人们关心的问题. 这一问题之所以重要, 主要是因为它与许多算子的端点估计息息相关. 例如, Gogatishvili 等^[13] 运用极值情形的内插迭代得到了 Fourier 变换的端点估计. 为了刻画极值情形下的鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代, 我们引入全新的鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间 $H_{p, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}$ 和 $H_{p, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}$ (具体定义可参见下一节), 并证明下述结果.

定理 1.2 设 $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $b_0, b_1, b \in SV$. 对所有的 $t > 0$, 令

$$b^\#(t) = b_0(t)b\left(t^{1/p_0-1/p_1}\frac{b_0(t)}{b_1(t)}\right),$$

则有

$$(H_{p_0, q_0; b_0}^s, H_{p_1, q_1; b_1}^s)_{0, q; b} = H_{p_0, q, b^\#, q_0, b_0}^{\mathcal{L}}.$$

定理 1.3 设 $1 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $b_0, b_1, b \in SV$. 对所有的 $t > 0$, 令

$$b_{\#}(t) = b_1(t)b\left(t^{1/p_0-1/p_1}\frac{b_0(t)}{b_1(t)}\right),$$

则有

$$(H_{p_0, q_0; b_0}^s, H_{p_1, q_1; b_1}^s)_{1, q; b} = H_{p_1, q, b_{\#}, q_1, b_1}^{\mathcal{R}}.$$

定理 1.2 和 1.3 分别给出了鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在 $\theta = 0$ 和 $\theta = 1$ 时的等价刻画. 它们的证明主要依赖于定理 1.1 以及 K -泛函和非增重排函数之间的等价刻画.

本文共分为 5 节, 余下内容具体安排如下: 第 2 节主要给出一些文中常用的符号以及一些与慢变函数、Lorentz-Karamata 空间、鞅和实内插理论有关的预备知识; 第 3 节主要证明定理 1.1、推论 1.1 和 1.2; 第 4 节给出鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在极值情形 (即 $\theta = 0, 1$ 时) 的等价刻画, 即证明定理 1.2 和 1.3; 作为内插结果的应用, 本文最后一节讨论分数阶积分算子在鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间上的有界性.

2 准备知识

本节主要给出一些文中常用的符号以及一些与慢变函数、Lorentz-Karamata 空间、鞅和实内插理论有关的预备知识, 其中部分符号沿用自文献 [14].

在全文中, 除非另有说明, 记号 $A \lesssim B$ 表示存在绝对常数 $C > 0$ 使得 $A \leq CB$ 成立. 类似地, 可约定 $A \gtrsim B$. 若 $A \lesssim B$ 和 $A \gtrsim B$ 同时成立, 则称 A 与 B 等价, 此时记 $A \approx B$. 此外, 记 $A \lesssim_p B$ ($A \gtrsim_p B$), 如果常数 C 依赖于变量 p . 令 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, 其中 $\mathbb{N}$ 表示正整数集. 为方便起见, 对任意 $q \in (0, \infty]$, $a, b \in [0, \infty]$, 简记 $\|\cdot\|_{L_q(a, b)}$ 为 $\|\cdot\|_{q, (a, b)}$.

2.1 慢变函数与 Lorentz-Karamata 空间

若 $E \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集, 则将定义在集合 E 上的所有 Lebesgue 可测函数全体记为 $\mathcal{M}(E)$, 并用 $\mathcal{M}^+(E)$ 表示 $\mathcal{M}(E)$ 中所有非负函数全体. 定义在区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 上的 $\mathcal{M}^+(a, b)$ 中所有非减和非增函数全体分别记为 $\mathcal{M}^+(a, b; \uparrow)$ 和 $\mathcal{M}^+(a, b; \downarrow)$.

定义 2.1 设 $b \in \mathcal{M}^+(0, \infty)$. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 若存在 $g_{\varepsilon} \in \mathcal{M}^+(0, \infty; \uparrow)$ 和 $g_{-\varepsilon} \in \mathcal{M}^+(0, \infty; \downarrow)$, 使得

$$t^{\varepsilon}b(t) \approx g_{\varepsilon}(t), \quad t^{-\varepsilon}b(t) \approx g_{-\varepsilon}(t)$$

对所有的 $t \in (0, \infty)$ 成立, 则称函数 b 为慢变函数, 并记 $b \in SV$.

下面是关于慢变函数的一些基本结果, 这些结果将被应用在文中部分引理或定理的证明之中. 关于这些结果的证明以及慢变函数的其他性质, 可参见文献 [3, 13].

命题 2.1 (参见文献 [13, 命题 2.2]) 如果 $b, b_1, b_2 \in SV$, 那么

- (i) 对任意的 $r \in \mathbb{R}$, 有 $b^r \in SV$, 并且 $b_1 b_2 \in SV$, $b(1/t) \in SV$;
- (ii) 若 $u \in \mathcal{M}^+(0, \infty; \uparrow)$ 以及对 $\delta > 0$ 有 $t/u^{\delta}(t) \in \mathcal{M}^+(0, \infty; \uparrow)$, 则 $b \circ u \in SV$;
- (iii) 若 $\alpha > 0$ 且 $q \in (0, \infty]$, 则对任意的 $t > 0$, 有

$$\|\tau \mapsto \tau^{\alpha-1/q}b(\tau)\|_{q, (0, t)} \approx t^{\alpha}b(t), \quad \|\tau \mapsto \tau^{-\alpha-1/q}b(\tau)\|_{q, (t, \infty)} \approx t^{-\alpha}b(t).$$

关于慢变函数, 还有下面的 Hardy 型不等式. 这一不等式将在后续主要定理的证明中用到, 其证明只需结合文献 [13, 引理 2.7] 和 [13, 推论 2.9] 即可.

引理 2.1 设 $p \in (0, \infty]$, $\nu \in (-1, 0)$, $a \in SV$, 则不等式

$$\left\| t \mapsto t^{\nu-1/p} a(t) \int_0^t g(\tau) d\tau \right\|_{p, (0, \infty)} \lesssim \|t \mapsto t^{\nu+1-1/p} a(t) g(t)\|_{p, (0, \infty)}$$

对任意 $g \in \mathcal{M}^+(0, \infty; \downarrow)$ 成立.

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 为任一测度空间. 对于 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上的任意可测函数 f , 定义其分布函数为

$$d_f(s) = \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}), \quad s \geq 0,$$

及其非增重排函数为

$$f^*(t) = \inf\{s \geq 0 : d_f(s) \leq t\}, \quad t \geq 0 \quad (\text{假设 } \inf \emptyset = \infty).$$

此外, 定义

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

下面回顾 Lorentz-Karamata 空间的定义 (参见文献 [1, 定义 3.4.38]).

定义 2.2 设 $p, q \in (0, \infty]$, $b \in SV$. 称定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上满足 $\|f\|_{L_{p,q;b}} < \infty$ 的所有 Lebesgue 可测函数全体为 Lorentz-Karamata 空间, 记作 $L_{p,q;b}$, 其中

$$\|f\|_{L_{p,q;b}} := \|t \mapsto t^{1/p-1/q} b(t) f^*(t)\|_{q, (0, \infty)}.$$

注 2.1 在上述定义中, 取 $b \equiv 1$, 则回到通常的 Lorentz 空间 $L_{p,q}$; 取 $b = \prod_{i=1}^m \ell_i^{\alpha_i}$, 即得到文献 [15] 中的广义 Lorentz-Zygmund 空间 $L_{p,q;\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ (其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, 以及对所有的 $t > 0$, $\ell_1(t) \equiv \ell(t) = 1 + |\log t|$, $\ell_i = \ell(\ell_{i-1}(t))$, $i > 1$); 而当 $L_{p,q;\alpha_1,\dots,\alpha_m}$ 中的 m 等于 1 时, 即是文献 [16, 17] 中引入的 Lorentz-Zygmund 空间 $L^{p,q}(\log L)^{\alpha_1}$.

2.2 鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间

设 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 为 $\mathcal{F}$ 的递增子 σ 代数族, $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ 并且 $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n)$. 称与 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 适应的可积函数族 $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 为鞅, 如果对每个 $n \in \mathbb{N}_0$, f_n 是 $\mathcal{F}_n$ 可测的, 并且 $E_n(f_{n+1}) = f_n$, 其中 E_n 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的条件期望算子. 对于任意鞅 $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, 定义其鞅差序列为 $d_n f = f_n - f_{n-1}$ (假设 $f_{-1} = 0$).

考虑鞅 $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 的条件均方函数

$$s_n(f) = \left(\sum_{i=0}^n E_{i-1} |d_i f|^2 \right)^{1/2}, \quad s(f) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} E_{i-1} |d_i f|^2 \right)^{1/2}.$$

设 $p, q \in (0, \infty]$, $b \in SV$. 定义如下鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间:

$$H_{p,q;b}^s = \{f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : \|f\|_{H_{p,q;b}^s} := \|s(f)\|_{L_{p,q;b}} < \infty\}.$$

为了讨论鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在极值情形的等价刻画, 还需引入下面的新型鞅 Hardy 空间.

定义 2.3 设 $0 < p < \infty$, $q, r \in (0, \infty]$, $a, b \in SV$, 定义下述新型鞅 Hardy 空间:

$$H_{p,r,b,q,a}^{\mathcal{L}} := \{f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : \|f\|_{H_{p,r,b,q,a}^{\mathcal{L}}} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{H_{p,r,b,q,a}^{\mathcal{L}}} := \left\| t \mapsto t^{-1/r} \frac{b(t)}{a(t)} \|\tau \mapsto \tau^{1/p-1/q} a(\tau) (s(f))^*(\tau)\|_{q,(0,t)} \right\|_{r,(0,\infty)}.$$

类似地, 可以定义空间

$$H_{p,r,b,q,a}^{\mathcal{R}} = \{f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : \|f\|_{H_{p,r,b,q,a}^{\mathcal{R}}} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{H_{p,r,b,q,a}^{\mathcal{R}}} := \left\| t \mapsto t^{-1/r} \frac{b(t)}{a(t)} \|\tau \mapsto \tau^{1/p-1/q} a(\tau) (s(f))^{**}(\tau)\|_{q,(t,\infty)} \right\|_{r,(0,\infty)}.$$

2.3 实内插空间 $(X_0, X_1)_{\theta,r;b}$

本小节主要介绍与慢变函数相联系的实内插空间, 该类型的实内插方法最初出现于文献 [14, 定义 2.4]. 设 (X_0, X_1) 是任一 (拟) Banach 空间偶对. 对任意的 $f \in X_0 + X_1$, 定义其 K -泛函为

$$K(f, t; X_0, X_1) = \inf\{\|f_0\|_{X_0} + t\|f_1\|_{X_1} : f = f_0 + f_1, f_0 \in X_0, f_1 \in X_1\}.$$

关于 K -泛函的一些基本性质, 可参见文献 [17, 第 5 章] 和 [18].

定义 2.4 对于 $\theta \in [0, 1]$, $r \in (0, \infty]$, $b \in SV$, 定义

$$(X_0, X_1)_{\theta,r;b} := \{f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta,r;b}} < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta,r;b}} := \|t \mapsto t^{-\theta-1/r} b(t) K(f, t; X_0, X_1)\|_{r,(0,\infty)}.$$

注 2.2 如果慢变函数 $b \equiv 1$, 则 $(X_0, X_1)_{\theta,r;b}$ 回到通常的内插空间 $(X_0, X_1)_{\theta,r}$ (参见文献 [18]).

下面是关于内插函子 $(\cdot, \cdot)_{\theta,r;b}$ 的一些基本事实, 其证明可参见文献 [14, 命题 2.5].

命题 2.2 设 $\theta \in [0, 1]$, $r \in (0, \infty]$, $b \in SV$, 那么

(i) $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow (X_0, X_1)_{\theta,r;b} \hookrightarrow X_0 + X_1$, 如果下列条件之一成立:

- $\theta \in (0, 1)$,
- $\theta = 0$ 且 $\|t \mapsto t^{-1/q} b(t)\|_{q,(1,\infty)} < \infty$,
- $\theta = 1$ 且 $\|t \mapsto t^{-1/q} b(t)\|_{q,(0,1)} < \infty$;

(ii) 空间 $(X_0, X_1)_{\theta,r;b}$ 是 (拟) Banach 空间;

(iii) $(X_0, X_1)_{\theta,r;b} = (X_1, X_0)_{1-\theta,r;b_1}$, 其中 $b_1(t) = b(1/t)$, $t > 0$.

对于内插函子 $(\cdot, \cdot)_{\theta,r;b}$, 有下面的迭代准则, 其详细证明可参见文献 [19].

命题 2.3 设 (X_0, X_1) 是任一 (拟) Banach 空间偶对, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $q_0, q_1 \in (0, \infty]$, $b_0, b_1, b \in SV$. 当 $\theta \in (0, 1)$ 时, 有

$$((X_0, X_1)_{\theta_0,q_0;b_0}, (X_0, X_1)_{\theta_1,q_1;b_1})_{\theta,q;b} = (X_0, X_1)_{\theta',q;b_\theta}, \quad (2.1)$$

其中 $\theta' = (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1$, $b_\theta = b_0^{1-\theta} b_1^\theta b \circ \rho$, $\rho(t) = t^{\theta_1-\theta_0} b_0(t)/b_1(t)$, $\forall t > 0$.

2.4 内插空间 $(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}$ 与 $(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}$

为了讨论 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插空间在极值情形 (即 $\theta = 0, 1$ 时) 的迭代, 我们需要引入新的内插空间 $(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}$ 与 $(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}$. 设 (X_0, X_1) 是任一 (拟) Banach 空间偶对, $\sigma \in (0, 1)$, $r, q \in (0, \infty]$, $a, b \in SV$, 定义

$$\begin{aligned}(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{L}} &= \{f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}} < \infty\}, \\ (X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{R}} &= \{f \in X_0 + X_1 : \|f\|_{(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}} < \infty\},\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}} &:= \left\| t \mapsto t^{-1/r} \frac{b(t)}{a(t)} \left\| \tau \mapsto \tau^{-\sigma-1/q} a(\tau) K(f, \tau; X_0, X_1) \right\|_{q, (0, t)} \right\|_{r, (0, \infty)}, \\ \|f\|_{(X_0, X_1)_{\sigma, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}} &:= \left\| t \mapsto t^{-1/r} \frac{b(t)}{a(t)} \left\| \tau \mapsto \tau^{-\sigma-1/q} a(\tau) K(f, \tau; X_0, X_1) \right\|_{q, (t, \infty)} \right\|_{r, (0, \infty)},\end{aligned}$$

这里指标 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 分别表示内层范数中的变量 τ 取值于左端 $(0, t)$ 和右端 (t, ∞) .

下面两个引理源于文献 [13, 定理 3.2 和 4.3], 它们将被用于证明定理 1.2 和 1.3.

引理 2.2 设 $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $b_0, b_1, b \in SV$. 对任意的 $t > 0$, 令 $\rho(t) = t^{\theta_1 - \theta_0} b_0(t)/b_1(t)$, 则

$$((X_0, X_1)_{\theta_0, q_0; b_0}, (X_0, X_1)_{\theta_1, q_1; b_1})_{0, q; b} = (X_0, X_1)_{\theta_0, q, b_0 b \circ \rho, q_0, b_0}^{\mathcal{L}}.$$

引理 2.3 设 $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $b_0, b_1, b \in SV$. 对任意的 $t > 0$, 令 $\rho(t) = t^{\theta_1 - \theta_0} b_0(t)/b_1(t)$, 则

$$((X_0, X_1)_{\theta_0, q_0; b_0}, (X_0, X_1)_{\theta_1, q_1; b_1})_{1, q; b} = (X_0, X_1)_{\theta_1, q, b_0 b \circ \rho, q_1, b_1}^{\mathcal{R}}.$$

3 鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的实内插

本节主要给出定理 1.1、推论 1.1 和 1.2 的证明. 为此, 需要先验证几个关键引理.

第一个引理是关于 (弱) 鞅 Hardy 空间上 K -泛函的一个等价刻画, 其形式与 Lebesgue 空间中的 Holmstedt 公式是对应的 (有关 Holmstedt 公式的更多信息可参见文献 [20–22]).

引理 3.1 设 $0 < p < \infty$. 对于任意 $t > 0$, 有

$$K(f, t; H_p^s, H_\infty^s) \approx \left[\int_0^{t^p} [(s(f))^*(y)]^p dy \right]^{1/p}. \quad (3.1)$$

当空间 H_p^s 被替换为空间 $H_{p, \infty}^s$ 时, 有

$$K(f, t; H_{p, \infty}^s, H_\infty^s) \approx \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p} (s(f))^*(u). \quad (3.2)$$

证明 关于 (3.1) 的证明, 可参见文献 [23, 引理 1]. 下面证明 (3.2).

固定 $t > 0$. 令 $\alpha = (s(f))^*(t^p)$, 定义停时

$$\nu = \inf\{n \in \mathbb{N} : s_{n+1}(f) > \alpha\},$$

则有 $\{\nu < \infty\} = \{s(f) > \alpha\}$. 设

$$f_0 = f - f^\nu, \quad f_1 = f^\nu = (f_{n \wedge \nu})_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

由于对于任意 $u > 0$, 有

$$(s(f_0))^*(u) = (s(f - f^\nu)\chi_{\{\nu < \infty\}})^*(u) \leq (s(f))^*(u)\chi_{(0, \mu(\nu < \infty))}(u),$$

同时,

$$\mu(\nu < \infty) = \mu(s(f) > \alpha) = t^p,$$

故有

$$\|f_0\|_{H_{p,\infty}^s} = \sup_{0 < u < \infty} u^{1/p}(s(f_0))^*(u) \leq \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(f))^*(u).$$

因而,

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{H_{p,\infty}^s} + t\|f_1\|_{H_\infty^s} &\leq \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(f))^*(u) + t(s(f))^*(t^p) \\ &\leq 2 \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(f))^*(u), \end{aligned}$$

所以,

$$K(f, t; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s) \leq 2 \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(f))^*(u).$$

对于反向不等式, 设 $f = g + h \in H_{p,\infty}^s + H_\infty^s$, 其中 $g \in H_{p,\infty}^s$, $h \in H_\infty^s$. 对于任意 $u > 0$, 有

$$(s(f))^*(u) \leq (s(g) + s(h))^*(u) \leq (s(g))^*(u) + \|h\|_{H_\infty^s}.$$

从而,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(f))^*(u) &\leq \sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(g))^*(u) + t\|h\|_{H_\infty^s} \\ &\leq \|g\|_{H_{p,\infty}^s} + t\|h\|_{H_\infty^s}. \end{aligned}$$

对 f 的所有上述分解取下确界即得

$$\sup_{0 < u < t^p} u^{1/p}(s(f))^*(u) \leq K(f, t; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s).$$

证毕. □

引理 3.2 设 $0 < p < \infty$, 则对所有 $f \in H_p^s + H_\infty^s$ 和 $\tau \in (0, \infty]$, 有

$$K(f, \tau; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s) \lesssim K(f, \tau; H_p^s, H_\infty^s). \quad (3.3)$$

进一步设 $\theta \in (0, 1)$, $0 < r \leq \infty$, $b \in SV$, 则对任意的 $t \in (0, \infty]$, 有

$$\|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r}b(\tau)K(f, \tau; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s)\|_{r,(0,t)} \lesssim \|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r}b(\tau)K(f, \tau; H_p^s, H_\infty^s)\|_{r,(0,t)}. \quad (3.4)$$

证明 显然, (3.4) 可由 (3.3) 直接得到, 因而只需证明 (3.3) 即可. 对任意的 $y > 0$, 有

$$\begin{aligned} \sup_{0 < u < y} u^{1/p} (s(f))^*(u) &\approx \sup_{0 < z < y} \left(\int_0^z d\sigma \right)^{1/p} (s(f))^*(z) \\ &\leq \left(\int_0^y (s(f))^*(\sigma)^p d\sigma \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

在上式中, 令 $y = \tau^p$, 同时运用引理 3.1, 可以得到

$$K(f, \tau; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s) \lesssim K(f, \tau; H_p^s, H_\infty^s).$$

证毕. □

引理 3.3 设 $\theta \in (0, 1)$, $r \in (0, \infty]$, $p \in (0, \infty)$, $b \in SV$, 则对所有 $f \in H_p^s + H_\infty^s$ 和 $t \in (0, \infty]$, 有

$$\|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; H_p^s, H_\infty^s)\|_{r,(0,t)} \lesssim \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p-1/r} b(y^{1/p}) (s(f))^*(y)\|_{r,(0,t^p)}. \quad (3.5)$$

证明 为方便起见, 令

$$Z_1(t) := \|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; H_p^s, H_\infty^s)\|_{r,(0,t)}.$$

运用 (3.1), 并做变量替换 $\tau^p = y$, 可得

$$\begin{aligned} Z_1(t) &\approx \left\| \tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) \left(\int_0^{\tau^p} [(s(f))^*(z)]^p dz \right)^{1/p} \right\|_{r,(0,t)} \\ &\approx \left\| y \mapsto y^{-\theta/p-1/r} b(y^{1/p}) \left(\int_0^y [(s(f))^*(z)]^p dz \right)^{1/p} \right\|_{r,(0,t^p)} \\ &\approx \left\| y \mapsto y^{-\theta-p/r} [b(y^{1/p})]^p \int_0^y [(s(f))^*(\sigma)]^p d\sigma \right\|_{r/p,(0,t^p)}^{1/p}. \end{aligned}$$

令 $g = (s(f))^* \chi_{(0,t^p)}$. 此时注意到 $g \in \mathcal{M}^+(0, \infty; \downarrow)$, 应用引理 2.1 可得

$$\begin{aligned} Z_1(t) &\lesssim \left\| y \mapsto y^{-\theta-p/r} [b(y^{1/p})]^p \left(\int_0^y [g(\sigma)]^p d\sigma \right) \right\|_{r/p,(0,\infty)}^{1/p} \\ &\lesssim \|y \mapsto y^{1-\theta-p/r} [b(y^{1/p})]^p [g(y)]^p\|_{r/p,(0,\infty)}^{1/p} \\ &= \|y \mapsto y^{1-\theta-p/r} [b(y^{1/p})]^p [(s(f))^*(y)]^p\|_{r/p,(0,t^p)}^{1/p} \\ &= \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p-1/r} b(y^{1/p}) [(s(f))^*(y)]\|_{r,(0,t^p)}. \end{aligned}$$

证毕. □

引理 3.4 设 $\theta \in (0, 1)$, $r \in (0, \infty]$, $p \in (0, \infty)$, $b \in SV$, 则对所有 $f \in H_p^s + H_\infty^s$ 和 $t \in (0, \infty]$, 有

$$\|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s)\|_{r,(0,t)} \gtrsim \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p-1/r} b(y^{1/p}) (s(f))^*(y)\|_{r,(0,t^p)}. \quad (3.6)$$

证明 为方便起见, 令

$$Z_2(t) := \|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; H_{p,\infty}^s, H_\infty^s)\|_{r,(0,t)}.$$

运用 (3.2), 并做变量替换 $\tau^p = y$, 可得

$$\begin{aligned} Z_2(t) &\approx \left\| \tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) \sup_{0 < u < \tau^p} u^{1/p} (s(f))^*(u) \right\|_{r, (0, t)} \\ &\approx \left\| y \mapsto y^{-\theta/p-1/r} b(y^{1/p}) \sup_{0 < u < y} u^{1/p} (s(f))^*(u) \right\|_{r, (0, t^p)}. \end{aligned}$$

易知,

$$\sup_{0 < u < y} u^{1/p} (s(f))^*(u) \geq y^{1/p} (s(f))^*(y),$$

故

$$Z_2(t) \gtrsim \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p-1/r} b(y^{1/p}) (s(f))^*(y)\|_{r, (0, t^p)}.$$

证毕. □

结合 (3.4)–(3.6), 可立即得到下面的引理.

引理 3.5 设 $\theta \in (0, 1)$, $r \in (0, \infty]$, $p \in (0, \infty)$, $b \in SV$, 则对所有 $f \in H_p^s + H_\infty^s$ 和 $t \in (0, \infty]$, 有

$$\|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; H_p^s, H_\infty^s)\|_{r, (0, t)} \approx \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p-1/r} b(y^{1/p}) (s(f))^*(y)\|_{r, (0, t^p)}. \quad (3.7)$$

此外, 对所有 $f \in H_{p, \infty}^s + H_\infty^s$ 和 $t \in (0, \infty]$, 有

$$\|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; H_{p, \infty}^s, H_\infty^s)\|_{r, (0, t)} \approx \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p-1/r} b(y^{1/p}) (s(f))^*(y)\|_{r, (0, t^p)}. \quad (3.8)$$

有了上述准备工作之后, 我们下面开始证明定理 1.1、推论 1.1 和 1.2.

定理 1.1 的证明 令 $X_0 = H_{p_0}^s$ 或 $X_0 = H_{p_0, \infty}^s$, $X_1 = H_\infty^s$, 则由 $(X_0, X_1)_{\theta, r; b}$ 的定义可得

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, r; b}} = \|\tau \mapsto \tau^{-\theta-1/r} b(\tau) K(f, \tau; X_0, X_1)\|_{r, (0, \infty)}.$$

在引理 3.5 中取 $t = \infty$, 根据等式 $(1-\theta)/p_0 = 1/p$, 有

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, r; b}} \approx \|y \mapsto y^{(1-\theta)/p_0-1/r} \bar{b}(y) (s(f))^*(y)\|_{r, (0, \infty)} = \|f\|_{H_{p, r; \bar{b}}^s}.$$

证毕. □

推论 1.1 的证明 取 $q < p_0 < p_1 < \infty$, $b_0 = b_1 \equiv 1$ 以及 θ_0 和 θ_1 使得

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta_0}{q}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1-\theta_1}{q}.$$

由定理 1.1 (或参见文献 [12, 定理 5.11]) 可知,

$$H_{p_0}^s = (H_q^s, H_\infty^s)_{\theta_0, p_0; b_0}, \quad H_{p_1}^s = (H_q^s, H_\infty^s)_{\theta_1, p_1; b_1}.$$

根据命题 2.3, 有

$$(H_{p_0}^s, H_{p_1}^s)_{\theta, r; b} = ((H_q^s, H_\infty^s)_{\theta_0, p_0; b_0}, (H_q^s, H_\infty^s)_{\theta_1, p_1; b_1})_{\theta, r; b} = (H_q^s, H_\infty^s)_{\theta', r; b_\theta},$$

其中 $\theta' = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1 = 1 - q/p$, 且对任意 $t > 0$, 有

$$b_\theta(t) = b(t^{q/\alpha}), \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}.$$

由于 $1/p = (1 - \theta')/q$, 应用定理 1.1, 易知

$$(H_q^s, H_\infty^s)_{\theta', r; b_\theta} = H_{p, r; b_\alpha}^s,$$

其中对任意的 $t > 0$, 有 $b_\alpha(t) := \overline{b_\theta}(t) = b(t^{1/\alpha})$. 证毕. $\square$

推论 1.2 的证明 取 $0 < p'_0 < p_0$ 以及 θ_0 和 θ_1 使得

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1 - \theta_0}{p'_0}, \quad \frac{1}{p_1} = \frac{1 - \theta_1}{p'_0}.$$

由定理 1.1 可知, $H_{p_0, q_0; b_0}^s$ 和 $H_{p_1, q_1; b_1}^s$ 可分别被表示为

$$\begin{aligned} H_{p_0, q_0; b_0}^s &= (H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_0, q_0; B_0}, \\ H_{p_1, q_1; b_1}^s &= (H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_1, q_1; B_1}, \end{aligned}$$

其中对所有的 $t > 0$, 有

$$B_i(t) = b_i(t^{p'_0}), \quad i \in \{0, 1\}.$$

因此, 根据 (2.1), 可得

$$\begin{aligned} (H_{p_0, q_0; b_0}^s, H_{p_1, q_1; b_1}^s)_{\theta, q; b} &= ((H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_0, q_0; B_0}, (H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_1, q_1; B_1})_{\theta, q; b} \\ &= (H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta', q; b_\theta}, \end{aligned}$$

其中 $\theta' = (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1$, 且对所有的 $t > 0$, 有

$$b_\theta(t) = B_0^{1-\theta}(t)B_1^\theta(t)b\left(t^{\theta_1-\theta_0}\frac{B_0(t)}{B_1(t)}\right).$$

容易验证

$$\frac{\theta_1 - \theta_0}{p'_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1},$$

因而,

$$b_\theta(t^{1/p'_0}) = b_\theta^\#(t).$$

利用等式 $\theta' = 1 - p'_0/p_\theta$, 再次应用定理 1.1, 即得

$$(H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta', q; b_\theta} = H_{p_\theta, q; b_\theta^\#}^s.$$

证毕. $\square$

4 鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在极值情形下的等价刻画

本节的主要任务是证明定理 1.2 和 1.3. 这两个定理分别给出了鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间的内插迭代在 $\theta = 0$ 和 $\theta = 1$ 时的等价刻画.

引理 4.1 设 $0 < p_0 < p < \infty$, $\theta = 1 - p_0/p$, $q, r \in (0, \infty]$, $a, b \in SV$. 对所有的 $t > 0$, 令 $a_{p_0}(t) = a(t^{1/p_0})$, $b_{p_0}(t) = b(t^{1/p_0})$, 则

$$(H_{p_0}^s, H_\infty^s)_{\theta, r, b, q, a}^{\mathcal{L}} = (H_{p_0, \infty}^s, H_\infty^s)_{\theta, r, b, q, a}^{\mathcal{L}} = H_{p, r, b_{p_0}, q, a_{p_0}}^{\mathcal{L}}.$$

特别地, 如果 $p_0 = 1, p \in (1, \infty)$, 那么

$$(H_1^s, H_\infty^s)_{1/p', r, b, q, a}^{\mathcal{L}} = (H_{1, \infty}^s, H_\infty^s)_{1/p', r, b, q, a}^{\mathcal{L}} = H_{p, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}.$$

证明 令 $X_0 = H_{p_0}^s$ 或 $X_0 = H_{p_0, \infty}^s, X_1 = H_\infty^s$. 根据引理 3.5 及等式 $(1 - \theta)/p_0 = 1/p$, 可得

$$\|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}} \approx \left\| t \mapsto t^{-1/r} \frac{b(t)}{a(t)} \|y \mapsto y^{1/p-1/q} a_{p_0}(y) (s(f))^*(y)\|_{q, (0, t^{p_0})} \right\|_{r, (0, \infty)}.$$

通过变量替换 $t^{p_0} = x$, 有

$$\begin{aligned} \|f\|_{(X_0, X_1)_{\theta, r, b, q, a}^{\mathcal{L}}} &\approx \left\| x \mapsto x^{-1/r} \frac{b_{p_0}(x)}{a_{p_0}(x)} \|y \mapsto y^{1/p-1/q} a_{p_0}(y) (s(f))^*(y)\|_{q, (0, x)} \right\|_{r, (0, \infty)} \\ &= \|f\|_{H_{p, r, b_{p_0}, q, a_{p_0}}^{\mathcal{L}}}. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

定理 1.2 的证明 设 $0 < p'_0 < p_0$. 对所有的 $t > 0$, 令 $\theta_i = 1 - p'_0/p_i, B_i(t) = b_i(t^{p'_0})$, 其中指标 $i \in \{0, 1\}$, 那么由定理 1.1 和引理 2.2, 可得

$$\begin{aligned} (H_{p_0, q_0; b_0}^s, H_{p_1, q_1; b_1}^s)_{0, q; b} &= ((H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_0, q_0; B_0}, (H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_1, q_1; B_1})_{0, q; b} \\ &= (H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_0, q, B, q_0, B_0}^{\mathcal{L}}, \end{aligned}$$

其中

$$B(t) = B_0(t) b \left(t^{\theta_1 - \theta_0} \frac{B_0(t)}{B_1(t)} \right).$$

由于对所有的 $t > 0$, 有

$$B(t^{1/p'_0}) = b^\#(t),$$

因而根据引理 4.1, 即得

$$(H_{p'_0}^s, H_\infty^s)_{\theta_0, q, B, q_0, B_0}^{\mathcal{L}} = H_{p_0, q, b^\#, q_0, b_0}^{\mathcal{L}},$$

证毕. $\square$

下面证明定理 1.3. 类似于引理 4.1, 在 (3.1) 中令 $p = 1$, 结合空间 $H_{p, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}$ 的定义, 立即可得如下断言.

引理 4.2 设 $p \in (1, \infty), \theta = 1 - 1/p, q, r \in (0, \infty], a, b \in SV(0, \infty)$, 则

$$(H_1^s, H_\infty^s)_{\theta, r, b, q, a}^{\mathcal{R}} = H_{p, r, b, q, a}^{\mathcal{R}}.$$

定理 1.3 的证明 记 p_0' 和 p_1' 分别为 p_0 和 p_1 的共轭指标, 即 $1/p_0 + 1/p_0' = 1/p_1 + 1/p_1' = 1$. 根据定理 1.1 及引理 2.3, 可得

$$\begin{aligned} (H_{p_0, q_0; b_0}^s, H_{p_1, q_1; b_1}^s)_{1, q; b} &= ((H_1^s, H_\infty^s)_{1/p'_0, q_0; b_0}, (H_1^s, H_\infty^s)_{1/p'_1, q_1; b_1})_{1, q; b} \\ &= (H_1^s, H_\infty^s)_{1/p'_1, q, b_1 b \circ \rho, q_1, b_1}^{\mathcal{R}}, \end{aligned}$$

其中对所有的 $t > 0$, 有

$$\rho(t) = t^{1/p'_1 - 1/p'_0} \frac{b_0(t)}{b_1(t)}.$$

由于

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p'_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1},$$

从而, 由引理 4.2 可得

$$(H_1^s, H_\infty^s)_{1/p'_1, q, b_1 b_0 \rho, q_1, b_1}^{\mathcal{R}} = H_{p_1, q, b_\#, q_1, b_1}^{\mathcal{R}}.$$

证毕. $\square$

5 应用: 分数阶积分算子的有界性

作为前文内插结果的一个应用, 最后一节给出分数阶积分算子在鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间上的有界性的证明. 本节始终约定 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的无原子概率空间, 其上赋予了 σ -代数流 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. 对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$, 称 $B \in \mathcal{F}_n$ 为原子, 如果对任意的 $A \subset B$ 且 $A \in \mathcal{F}_n$, $P(A) < P(B)$, 均有 $P(A) = 0$. 定义 $\mathcal{F}_n$ 中所有原子的集合为 $A(\mathcal{F}_n)$. 称 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 是正规的, 如果存在常数 $R > 0$, 使得

$$f_n \leq R f_{n-1}$$

对所有同 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 相适应的非负鞅 $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 成立. 下文中总是假设 $\mathcal{F}_n$ 都是由可数多个原子生成的, 且 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 是正规的.

令 $\mathfrak{M}$ 为全体同 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 相适应且满足 $f_0 = 0$ 的鞅 $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. 对任一 $f \in \mathfrak{M}$, 定义其鞅差序列 $(d_n f)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 如第 2 节所示. 为方便起见, 假设 $d_0 f = 0$.

设 $\alpha > 0$. 对于鞅 $f \in \mathfrak{M}$, 定义其分数积分 $I_\alpha f = ((I_\alpha f)_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 为

$$(I_\alpha f)_n := \sum_{k=1}^n b_{k-1}^\alpha d_k f,$$

其中 b_k 是一个 $\mathcal{F}_k$ -可测的函数, 满足

$$b_k(\omega) = P(B), \quad \forall B \in A(\mathcal{F}_k), \quad \omega \in B.$$

注 5.1 如果 $f, f_0, f_1 \in \mathfrak{M}$, $\alpha > 0$, 那么

- (i) $I_\alpha f$ 是一个鞅;
- (ii) 固定 $p > 0$, 易知 $\|I_\alpha f\|_{H_p^s}$ 关于 α 非增;
- (iii) 若 $f = f_0 + f_1$, 则 $I_\alpha f = I_\alpha f_0 + I_\alpha f_1$.

引理 5.1 (参见文献 [24, 定理 3.1]) 设 $p \in (0, 1]$, $p < q$, $\alpha = 1/p - 1/q$, 则

$$\|I_\alpha f\|_{H_q^s} \lesssim \|f\|_{H_p^s}$$

对所有 $f \in H_p^s$ 成立.

注 5.2 事实上, 上述结果对于 $p > 1$ 依然成立. 这是因为当 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ 正规时, $H_p^s = L_p$. 故存在绝对常数 $C > 0$ 使得

$$\|I_\alpha\|_{H_p^s \rightarrow H_q^s} \approx \|I_\alpha\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq C.$$

定理 5.1 设 $\theta \in (0, 1)$, $r \in (0, \infty]$, $p_0, p_1 \in (0, 1]$, $p_0 < q_0 < \infty$, $p_1 < q_1 < \infty$, $\alpha = \max_{i \in \{0, 1\}} (1/p_i - 1/q_i)$, $b \in SV$, 则

$$\|I_\alpha f\|_{(H_{q_0}^s, H_{q_1}^s)_{\theta, r; b}} \lesssim \|f\|_{(H_{p_0}^s, H_{p_1}^s)_{\theta, r; b}}.$$

证明 令 $\beta = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}$, $\gamma = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}$, 则 $\alpha = \max(\beta, \gamma)$. 由引理 5.1、注 5.1 和 5.2, 可得

$$\begin{aligned} K(f, t; H_{p_0}^s, H_{p_1}^s) &= \inf_{f=f_0+f_1} (\|f_0\|_{H_{p_0}^s} + t\|f_1\|_{H_{p_1}^s}) \\ &\geq \inf_{f=f_0+f_1} (\|I_\beta f_0\|_{H_{q_0}^s} + t\|I_\gamma f_1\|_{H_{q_1}^s}) \\ &\gtrsim \inf_{I_\alpha f = I_\alpha f_0 + I_\alpha f_1} (\|I_\alpha f_0\|_{H_{q_0}^s} + t\|I_\alpha f_1\|_{H_{q_1}^s}) \\ &\geq K(I_\alpha f, t; H_{q_0}^s, H_{q_1}^s). \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \|f\|_{(H_{p_0}^s, H_{p_1}^s)_{\theta, r; b}} &= \|t \mapsto t^{-\theta-1/r} b(t) K(f, t; H_{p_0}^s, H_{p_1}^s)\|_{r, (0, \infty)} \\ &\gtrsim \|t \mapsto t^{-\theta-1/r} b(t) K(I_\alpha f, t; H_{q_0}^s, H_{q_1}^s)\|_{r, (0, \infty)} \\ &= \|I_\alpha f\|_{(H_{q_0}^s, H_{q_1}^s)_{\theta, r; b}}. \end{aligned}$$

证毕. $\square$

上述定理证明了分数阶积分算子在内插空间上的有界性, 因鞅 Hardy-Lorentz-Karamata 空间可由鞅 Hardy 空间在满足一定条件的内插函子 $(\cdot, \cdot)_{\theta, r; b}$ 作用下生成, 故可得如下推论.

推论 5.1 设 θ 、 r 、 α 、 p_i 和 q_i 如定理 5.1 所示, 其中指标 $i \in \{0, 1\}$, $b \in SV$. 令

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}, \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1},$$

则

$$\|I_\alpha f\|_{H_{q, r; b_\eta}^s} \lesssim \|f\|_{H_{p, r; b_\kappa}^s},$$

其中对于 $t > 0$, 有

$$b_\kappa(t) = b(t^{1/\kappa}), \quad b_\eta(t) = b(t^{1/\eta}).$$

致谢 作者对审稿人的细致审阅及修改建议表示感谢.

参考文献

- 1 Edmunds D E, Evans W D. Hardy Operators, Function Spaces and Embedding. Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer, 2004
- 2 Edmunds D E, Kerman R, Pick L. Optimal Sobolev imbeddings involving rearrangement-invariant quasinorms. J Funct Anal, 2000, 170: 307–355
- 3 Edmunds D E, Opic B. Alternative characterisations of Lorentz-Karamata spaces. Czechoslovak Math J, 2008, 58: 517–540
- 4 Neves J S. Lorentz-Karamata spaces, Bessel and Riesz potentials and embeddings. Dissertationes Math, 2002, 405: 1–46
- 5 Ho K P. Atomic decompositions, dual spaces and interpolations of martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces. Q J Math, 2014, 65: 985–1009
- 6 Jiao Y, Wu L, Yang A, et al. The predual and John-Nirenberg inequalities on generalized BMO martingale spaces. Trans Amer Math Soc, 2017, 369: 537–553

- 7 Jiao Y, Xie G, Zhou D. Dual spaces and John-Nirenberg inequalities of martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces. *Q J Math*, 2015, 66: 605–623
- 8 Wu L, Zhou D, Jiao Y. Modular inequalities in martingale Orlicz-Karamata spaces. *Math Nachr*, 2018, 291: 1450–1462
- 9 Zhou D, Wu L, Jiao Y. Martingale weak Orlicz-Karamata-Hardy spaces associated with concave functions. *J Math Anal Appl*, 2017, 456: 543–562
- 10 Liu K, Zhou D. Dual spaces of weak martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces. *Acta Math Hungar*, 2017, 151: 50–68
- 11 Wu Q, Zhou D, Peng L. Martingale inequalities on Hardy-Lorentz-Karamata spaces. *J Math Inequal*, 2019, 13: 135–146
- 12 Weisz F. Martingale Hardy Spaces and Their Applications in Fourier Analysis. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1568. Berlin: Springer, 1994
- 13 Gogatishvili A, Opic B, Trebels W. Limiting reiteration for real interpolation with slowly varying functions. *Math Nachr*, 2005, 278: 86–107
- 14 Doktorski L R Y. Limiting reiteration for real interpolation with logarithmic functions. *Bol Soc Mat Mexicana* (3), 2016, 22: 679–693
- 15 Edmunds D E, Gurka P, Opic B. On embeddings of logarithmic Bessel potential spaces. *J Funct Anal*, 1997, 146: 116–150
- 16 Bennett C, Rudnick K. On Lorentz-Zygmund spaces. *Dissertationes Math*, 1980, 175: 1–67
- 17 Bennett C, Sharpley S. Interpolation of Operators. *Pure and Applied Mathematics*, vol. 129. Boston: Academic Press, 1988
- 18 Bergh J, Lofstrom J. Interpolation Spaces—An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1976
- 19 Gustavsson J. A function parameter in connection with interpolation of Banach spaces. *Math Scand*, 1978, 42: 289–305
- 20 Peetre G. Espaces d'interpolation, généralisations, applications. *Seminario Mat e Fis Milano*, 1964, 34: 133–164
- 21 Krée P. Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normés ni complets. Applications. *Ann Inst Fourier (Grenoble)*, 1967, 17: 137–174
- 22 Holmstedt T. Interpolation of quasi-normed spaces. *Math Scand*, 1970, 26: 177–199
- 23 Ren Y B, Guo T X. Interpolation of Lorentz martingale spaces. *Sci China Math*, 2012, 55: 1951–1959
- 24 Sadasue G. Fractional integrals on martingale Hardy spaces for $0 < p \leq 1$. *Mem Osaka Kyoiku Univ Ser III Nat Sci Appl Sci*, 2011, 60: 1–7

Real interpolations of martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces

Wei Li, Lian Wu & Yong Jiao

Abstract In this paper, we investigate real interpolations in martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces. By introducing new type of martingale Hardy spaces, we find equivalent characterizations for the limiting reiteration of the real interpolations. As an application, we obtain the boundedness of fractional integrals in martingale Hardy-Lorentz-Karamata spaces.

Keywords martingale Hardy-Lorentz-Karamata space, real interpolation, reiteration, fractional integral

MSC(2010) 46E30, 60G46

doi: 10.1360/SSM-2020-0169