论文

受热平板振动精确化方程及其耦合响应模式分析

胡超^{①②*}, 郑日恒^③, 周传平^②, 黄文虎^④

① 扬州大学建筑科学与工程学院, 扬州 225127;

② 同济大学航空航天与力学学院, 上海 200092;

③ 航天科工集团公司三十一研究所, 北京 100074;

④ 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

*联系人, E-mail: chaohu@tongji.edu.cn

收稿日期: 2012-04-26; 接受日期: 2012-07-30; 网络出版日期: 2012-09-18

国家自然科学基金(批准号: 10572045, 51276129)和高超声速发动机技术国家重点实验室开放基金资助项目

摘要 本文基于三维热弹性动力学, 采用微分算子方法和规范场理论, 研究了平板结构振动的力热耦合问题. 选取适当的规范条件, 实现了弹性变形场与温度场的解耦, 分别推出了受热平板热弹性弯曲振动的精确化方程和温度支配方程, 并给出了描述力热耦合程度的无量纲判据. 而后, 基于偏微分方程种类和解的构造理论对受热平板结构内力热耦合机制和力热耦合响应模式等问题做了分析讨论. 给出的平板结构热弹性振动精确化方程及其分析结果, 可用于求解高温下平板结构内应力场和温度场都是动态变化的耦合问题.

关键词 热弹性动力学, 力热全耦合, 受热平板振动精确化方程, 算子方法与复变函数方法, 规范条件

PACS: 46.40.-f, 46.70.De, 44.10.+i, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15.Ff, 11.15.-q, 46.25.Hf

doi: 10.1360/132012-414

1 引言

在近空间超声速飞行器的热端部件结构中, 这些部件不仅承受着机械载荷的作用, 而且还处于非均匀、非定常的受热工况中, 常会由于热冲击或热应力集中等导致结构部件的失效或破坏^[1–4]. 因此, 有必要研究平板和圆柱壳等典型低维结构内的力热耦合机理和响应, 并给出这些典型低维结构振动的精确化方程及其有效的分析计算方法^[5–7].

过去, 考虑温度对弹性固体力学行为的影响, 多是先根据传热学确定温度场, 而后在温度场的基础

上求解弹性力学问题. 并且, 多是求解热弹性静力学问题, 或者只是考虑了非稳态热传导过程的影响, 假设弹性力学过程是静态的. 这种只考虑温度场对弹性应力场影响的处理方法, 在求解平均温度不是很高的静态力学问题时是可以满足工程精度要求的. 但是, 在超常情况下, 例如超高温、超急速加热或结构振动的频率比较高时, 则分析计算结果会产生较大误差. 直到目前, 对固体材料力热耦合动力学的研究还较少, 而对板壳结构力热耦合动力学的理论研究则更少. 理论分析和工程实践表明, 在近空间飞行器的热端部件分析设计中, 必须考虑力热耦合的

引用格式: 胡超, 郑日恒, 周传平, 等. 受热平板振动精确化方程及其耦合响应模式分析. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42: 1086–1096

Hu C, Zheng R H, Zhou C P, et al. Refined Governing Equations of Vibration Plate With Thermo-mechanical Coupling (in Chinese). Sci Sin-Phys Mech Astron, 2012, 42: 1086–1096, doi: 10.1360/132012-414

相互影响, 建立更为精确的结构振动方程, 才能更好地把握热防护材料结构的动力学行为与结构热物理性能, 实现热防护材料结构精确化设计和轻型化.

本文将基于三维热弹性动力学, 采用微分算子方法和规范场理论, 研究受热平板结构的力热耦合动力学问题. 分析平板结构内力热耦合机理、耦合响应模式及其计算特点, 给出描述力热耦合程度的无量纲准则判据.

2 平板热弹性振动的精确化方程

根据三维热弹性动力学, 无体力时 Navier-Cauchy 热弹性方程和广义热传导方程可写为^[8,9]

$$\mu_M \nabla_0^2 \mathbf{u} + (\lambda_M + \mu_M) \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) - \beta \nabla_0 \vartheta = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1a)$$

$$k \nabla_0^2 \vartheta - \beta T_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_0 \cdot \mathbf{u}) = c_v \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \quad (1b)$$

式中 $\mathbf{u}, \vartheta$ 分别表示材料内位移矢量和温度升高值, $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$, $\vartheta = T - T_0$ 且假定 $\vartheta/T_0 \ll 1.0$, T_0 是无应力条件下材料的平均绝对温度; λ_M, μ_M 为材

料的 Lamé 常数, $\lambda_M = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu_M = \frac{E}{2(1+\nu)}$;

E, ν 分别为材料的弹性模量和 Poisson 比; ρ 为材料的密度; k, c_v 分别为材料的导热系数和定容比热; $\beta = (3\lambda_M + 2\mu_M)\alpha_T$; α_T 是材料的热膨胀系数;

$\nabla_0 = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$ 为三维空间 Hamilton 矢量微

分算子, 相应的 Laplace 算子为 $\nabla_0^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 = \nabla^2 + \partial^2/\partial z^2$; t 为时间; 假定材料的性质不随温度而变化.

方程(1)的热弹性动力学一般解可描述为^[8,9]

$$\mathbf{u} = (\square_{01}^2 \square_{03}^2 - \varepsilon T_3 \nabla_0^2) \mathbf{G} - \left[\frac{1}{2(1-\nu)} \square_{03}^2 - \varepsilon T_3 \right] \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{G}) + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \nabla_0 \Phi, \quad (2a)$$

$$\vartheta = \frac{\mu_M}{\beta} \varepsilon T_3 \square_{02}^2 (\nabla_0 \cdot \mathbf{G}) + \square_{01}^2 \Phi, \quad (2b)$$

其中 $\kappa = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$; $\mathbf{G} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{G}^j$; $\mathbf{G} = G_1 \mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3$ 是

拟 Somigliana 矢量势函数, 满足如下方程

$$\square_{01}^2 \square_{02}^2 \square_{03}^2 \mathbf{G} - \varepsilon T_3 \nabla_0^2 \square_{02}^2 \mathbf{G} = 0, \quad (3)$$

而标量势函数 Φ 满足如下偏微分方程:

$$\square_{01}^2 \square_{03}^2 \Phi - \varepsilon T_3 \nabla_0^2 \Phi = 0, \quad (4)$$

式中 $\square_{0j}^2 = \nabla_0^2 - T_j^{-2} = \nabla_0^2 - \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ($j=1,2$) 为波动方程

微分算子即 Lorentz 算子; c_1, c_2 分别为弹性波纵波和横波速度, $c_1^2 = \frac{\lambda_M + 2\mu_M}{\rho}$, $c_2^2 = \frac{\mu_M}{\rho}$; $\square_{03}^2 = \nabla_0^2 - T_3^{-2}$ 是

扩散方程微分算子; $T_3 = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t}$; a 是热扩散系数或称

为导温系数, $a = \frac{k}{\rho c_v}$; ε 是力热耦合影响系数, 其无

因次表达式为

$$\varepsilon = \frac{\kappa a \beta^2 T_0}{\mu_M k} = \frac{(3-4\kappa)^2 c_2^2 \alpha_T^2 T_0}{\kappa c_v}. \quad (5)$$

在方程(3)中若略去有下面划线的项时, 则方程退化为经典的三维弹性动力学的 Somigliana 方程:

$$\square_{01}^2 \square_{02}^2 \mathbf{G} = 0, \quad (6)$$

而在方程(4)中若略去有下划线的项时, 则方程退化为经典的三维固体材料的 Fourier 热传导方程:

$$\square_{03}^2 \vartheta = 0, \quad (7)$$

为得到平板结构热弹性振动支配方程的具体形式, 在频域内研究问题, 设平板振动的谐和解为

$$\mathbf{G}_k = \text{Re}(\tilde{\mathbf{G}}_k e^{-i\omega t}), \quad (k=1,2,3), \quad (8a)$$

$$\Phi = \text{Re}(\tilde{\Phi} e^{-i\omega t}), \quad (8b)$$

其中 Re 表示取实部; ω 是平板振动的圆频率.

为研究问题方便, 在以下公式推导和分析中略去时间因子和未知势函数上的符号 $\sim$. 于是, 平板结构热弹性动力学问题的一般解为

$$(\nabla_0^2 + \alpha_j^2) \mathbf{G}_i^j = 0, \quad (i=1,2,3; j=1,2,3), \quad (9a)$$

$$(\nabla_0^2 + \alpha_j^2) \Phi^j = 0, \quad (j=1,3), \quad (9b)$$

式中 $\alpha_i (i=1,2,3)$ 是热弹性波波数, $\alpha_i (i=1,3)$ 满足代数方

程 $\alpha^4 - [k_1^2 + (1+\varepsilon)k_3^2] \alpha^2 + k_1^2 k_3^2 = 0$; $k_j^2 = \frac{\omega^2}{c_j^2}$,

($j=1,2$); $k_3^2 = \frac{i\omega}{a}$.

采用数字 1, 2, 3 分别表示坐标 x, y, z . 根据 Taylor 级数展开式, 平板内任意一点的位移和温度为

$$u_k(x, y, z) = \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_k(x, y, 0), \quad (k=1, 2, 3), \quad (10a)$$

$$\vartheta(x, y, z) = \exp\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \vartheta(x, y, 0), \quad (10b)$$

其中 $\exp(\cdot)$ 是指数函数.

平板热弹性振动时存在两种应力, 即中面热变形产生的薄膜应力和弯曲变形产生的弯曲热应力. 但是, 当研究平板小挠度弯曲情况时, 描述弯曲应力状态的方程和描述拉压应力状态的方程不是耦合的, 可分别独立求解^[10,11]. 本文研究受热平板结构弯曲的力热耦合振动问题.

平板结构拉压热变形属于对称运动情况, 而弯曲热变形属于反对称运动情况. 平板弯曲振动时, 位移 u_x, u_y 应是坐标 z 的奇函数, 而横向位移 u_z 是 z 的偶函数. 此时, 温度是坐标 z 的奇函数. 平板内位移函数和温度函数可写为

$$u_k(x, y, z) = \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_k(x, y, 0), \quad (k=1, 2), \quad (11a)$$

$$u_3(x, y, z) = \cosh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) u_3(x, y, 0), \quad (11b)$$

$$\vartheta(x, y, z) = \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \vartheta(x, y, 0), \quad (11c)$$

式中 $\sinh(\cdot)$ $\cosh(\cdot)$ 分别为双曲正弦和双曲余弦函数.

由方程(2), (10)和(11)可知, 弯曲振动时平板内任意一点的 Somigliana 势函数 $G_k(k=1,2,3)$ 和势函数 Φ 分别为^[9-11]

$$G_k(x, y, z) = \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{j=1}^3 G_k^j(x, y, 0) = \sum_{j=1}^3 \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} g_k^j(x, y), \quad (k=1, 2), \quad (12a)$$

$$G_3(x, y, z) = \cosh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{j=1}^3 G_3^j(x, y, 0) = \sum_{j=1}^3 \cos(z \square_j) g_3^j(x, y), \quad (12b)$$

$$\Phi(x, y, z) = \sinh\left(z \frac{\partial}{\partial z}\right) \sum_{j=1}^3 \Phi^j(x, y, 0) = \sum_{j=1, \neq 2}^3 \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \varphi^j(x, y), \quad (12c)$$

其中, $i \square_j = \sqrt{-(\nabla^2 + \alpha_j^2)}$ ($j=1, 2, 3$ 是引进的虚微分

算子^[10,12]; $\mathbf{G} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{G}^j = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^2 \mathbf{G}^{ji}$; $\left(\square_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \mathbf{G}^j = 0$;

$\left(\frac{\partial}{\partial z} - i \square_j\right) \mathbf{G}^{j1} = 0$; $\left(\frac{\partial}{\partial z} + i \square_j\right) \mathbf{G}^{j2} = 0$; $\Phi = \sum_{j=1, \neq 2}^3 \Phi^j =$

$\sum_{j=1, \neq 2}^3 \sum_{i=1}^2 \Phi^{ji}$; $\left(\square_j^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Phi^j = 0$; $\left(\frac{\partial}{\partial z} - i \square_j\right) \Phi^{j1} = 0$;

$\left(\frac{\partial}{\partial z} + i \square_j\right) \Phi^{j2} = 0$.

经推导演算, 可有以下式

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{G} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial G_j}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \left(\frac{\partial}{\partial x} g_1^j + \frac{\partial}{\partial y} g_2^j - \square_j^2 g_3^j \right) \right]. \quad (13)$$

本文总共有 11 个未知函数, 需要 7 个限制条件, 以消除未知函数的不唯一性. 针对平板结构的热弹性振动问题, 本文采用了如下规范条件^[10]

$$\nabla \cdot \mathbf{g}^j = 0; \quad \sum_{j=1, \neq 2}^3 \alpha_j^2 g_k^j = 0; \quad g_3^1 + g_3^3 = 0; \quad (14)$$

$$\varphi^3 + \frac{\mu_M}{\beta} \varepsilon k_3^2 \square_3^2 g_3^3 = 0,$$

式中, $\mathbf{g}^j = g_1^j \mathbf{e}_1 + g_2^j \mathbf{e}_2$, $g_k^j (j=1, 2, 3; k=1, 2)$ 是一些未知的复变函数.

将(14)式代入到(13)式中, 可得到如下表达式

$$\begin{aligned} \nabla_0 (\nabla_0 \cdot \mathbf{G}) = & - \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 \frac{\partial}{\partial x} g_3^j \right] \mathbf{e}_1 \\ & - \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 \frac{\partial}{\partial y} g_3^j \right] \mathbf{e}_2 \\ & - \sum_{j=1}^3 \left[\cos(z \square_j) \square_j^2 g_3^j \right] \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (15)$$

由(2)和(12)式可得平板结构内振动位移和温度的数学表达式

$$u_k = \sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} g_k^j + \sum_{j=1}^3 \left[(1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2 \right] \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^j + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \left[\frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^j \right], \quad (k=1, 2). \quad (16a)$$

$$u_3 = \sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] \cos(z \square_j) g_3^j + \sum_{j=1}^3 \left[(1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2 \right] \cos(z \square_j) \square_j^2 g_3^j + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \left[\cos(z \square_j) \varphi^j \right], \quad (16b)$$

$$\mathcal{G} = \frac{\mu_M}{\beta} \varepsilon k_3^2 \sum_{j=1}^3 (\alpha_2^2 - \alpha_j^2) \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 g_3^j + \sum_{j=1, \neq 2}^3 (\alpha_1^2 - \alpha_j^2) \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \varphi^j. \quad (16c)$$

平板中面位移和法线转角及其中面法向温度梯度的表达式为

$$\begin{aligned} g_1^1 &= 0; \quad g_1^2 = -A_c \frac{\partial}{\partial y} f; \quad g_1^3 = 0; \quad g_2^1 = 0; \quad g_2^2 = A_c \frac{\partial}{\partial x} f; \quad g_2^3 = 0; \\ g_3^1 &= -B_c T^g; \quad g_3^2 = A_c \left[(F + W) - \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) B_c T^g \right]; \quad g_3^3 = B_c T^g; \\ \varphi^1 &= -\frac{\mu_M}{\kappa \beta} \left[A_c D_c \square_2^2 (F + W) + F \right] + \frac{\mu_M}{\kappa \beta} \left[C_c \square_1^2 + A_c D_c \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \square_2^2 - (1 - \kappa) \varepsilon k_3^2 \square_3^2 \right] B_c T^g; \\ \varphi^3 &= -\frac{\mu_M}{\beta} \varepsilon k_3^2 \square_3^2 B_c T^g; \quad A_c = \left[(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_2^2 \right]^{-1}; \quad B_c = \left[(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \frac{\mu_M}{\beta} \varepsilon k_3^2 \right]^{-1}; \\ C_c &= (1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) + \varepsilon k_3^2; \quad D_c = (1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + \varepsilon k_3^2. \end{aligned} \quad (19)$$

根据 Hooke 定律, 可得应力分量表达式

$$\begin{aligned} \tau_{3k} &= \mu_M \left\{ \sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] \cos(z \square_j) g_k^j \right. \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^3 \left[(1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2 \right] \cos(z \square_j) \square_j^2 \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^j + 2 \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \left[\cos(z \square_j) \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^j \right] \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] \cos(z \square_j) \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^j \right\}, \quad (k=1, 2), \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \psi_k &= -\frac{\partial u_k}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ &= -\sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] g_k^j \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \left[(1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2 \right] \square_j^2 \frac{\partial}{\partial x_k} g_3^j \\ &\quad - \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi^j, \quad (k=1, 2), \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\begin{aligned} W = u_z \Big|_{z=0} &= \sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] g_3^j \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 \left[(1 - \kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2 \right] \square_j^2 g_3^j \\ &\quad + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \varphi^j, \end{aligned} \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} T^g &= \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{G} \Big|_{z=0} = \frac{\mu_M}{\beta} \varepsilon k_3^2 \sum_{j=1}^3 (\alpha_2^2 - \alpha_j^2) \square_j^2 g_3^j \\ &\quad + (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \varphi^3. \end{aligned} \quad (17c)$$

采用如下形式的中面转角和位移函数分解方法^[10,13]

$$\psi_1 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \psi_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (18)$$

通过演算推导, 可得到如下关系式

$$\begin{aligned} \sigma_3 = \lambda_M \left\{ - \sum_{j=1}^3 (\alpha_1^2 - \kappa \alpha_j^2) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 g_3^j - \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \alpha_j^2 \varphi^j \right\} \\ + 2 \mu_M \left\{ - \sum_{j=1}^3 [(\alpha_1^2 - \alpha_j^2) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2] \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 g_3^j - \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \left[\frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 \varphi^j \right] \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^3 [(1 - \kappa) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2] \frac{\sin(z \square_j)}{\square_j} \square_j^2 \square_j^2 g_3^j \right\} - \frac{1}{1 - 2\nu} E \alpha_T \vartheta. \end{aligned} \quad (20b)$$

在表面应力限制方面, 将平板上下表面 ($z = \pm h/2$) 的剪力为零, 以及正应力的边界条件引入到方程(20a)和(20b)中, 可得如下偏微分方程组

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^3 [(1 - \kappa) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2] \cos\left(\frac{h \square_j}{2}\right) \square_j^2 \frac{\partial}{\partial x} g_3^j + 2 \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \left[\cos\left(\frac{h \square_j}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \varphi^j \right] \\ + \sum_{j=1}^3 [(\alpha_1^2 - \alpha_j^2) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2] \cos\left(\frac{h \square_j}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} g_3^j \\ = [(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_2^2] \cos\left(\frac{h \square_2}{2}\right) A_c \frac{\partial}{\partial y} f, \end{aligned} \quad (21a)$$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^3 [(1 - \kappa) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2] \cos\left(\frac{h \square_j}{2}\right) \square_j^2 \frac{\partial}{\partial y} g_3^j + 2 \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \left[\cos\left(\frac{h \square_j}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \varphi^j \right] \\ + \sum_{j=1}^3 [(\alpha_1^2 - \alpha_j^2) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2] \cos\left(\frac{h \square_j}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} g_3^j \\ = - [(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_2^2] \cos\left(\frac{h \square_2}{2}\right) A_c \frac{\partial}{\partial x} f, \end{aligned} \quad (21b)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa \left\{ \sum_{j=1}^3 [(1 - \kappa) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2] \frac{\sin\left(\frac{h \square_j}{2}\right)}{\square_j} \nabla^2 \square_j^2 g_3^j + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \frac{\sin\left(\frac{h \square_j}{2}\right)}{\square_j} \nabla^2 \varphi^j \right\} \\ + \sum_{j=1}^3 (\alpha_1^2 - \kappa \alpha_j^2) (\alpha_3^2 - \alpha_j^2) \frac{\sin\left(\frac{h \square_j}{2}\right)}{\square_j} \square_j^2 g_3^j + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \frac{\sin\left(\frac{h \square_j}{2}\right)}{\square_j} \alpha_j^2 \varphi^j + \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \vartheta = - \frac{\kappa}{2\mu_M} q. \end{aligned} \quad (22)$$

式中, h 是平板结构的厚度; q 是平板结构表面承受的横向载荷。

在表面温度限制方面, 分为两种典型情况. (1) 平板上下表面 ($z = \pm h/2$) 给定第一类热边界条件; (2) 平板上下表面给定第二类边界条件. 将两类热边界条件分别代入到(16c)式中, 并将温度场的反对称与对称部分分开, 可得到 2 个相应的温度梯度支配方程

$$\nabla^2 T^s + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) T^s - \frac{12}{h^2} T^s = - \frac{12}{h^3} \vartheta^s, \quad (23a)$$

$$\nabla^2 T^s + \frac{1}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) T^s - \frac{4}{h^2} T^s = \frac{4}{kh^2} q^s, \quad (23b)$$

式中 ϑ^s 为平板结构正表面的温度; q^s 为平板结构正表面的热流密度。

由方程(23a)和(23b)可以看到, 当平板表面给定不同的边界条件时, 其温度函数的支配方程的类型相同, 但是其具体方程形式有所不同。

非齐次方程(23)的通解可描述为齐次方程的通解与特解的叠加, 即有

$$T^g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha_4 r) e^{in\theta} - \frac{12}{h^3} \iint_{\Omega} \mathcal{G}^s G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dx dy, \quad (24a)$$

$$T^g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n H_n^{(1)}(\alpha_5 r) e^{in\theta} + \frac{4}{kh^2} \iint_{\Omega} q^s G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dx dy, \quad (24b)$$

式中 $H_n^{(1)}(\cdot)$ 是第一类 Hankel 函数; $\alpha_4^2 = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) - \frac{12}{h^2}$; $\alpha_5^2 = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) T^g - \frac{4}{h^2}$; $G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\alpha_{k+3} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, ($k=1, 2$).

方程(21)可看成是一个解析函数的实部和虚部所满足的 Cauchy-Riemann^[12]条件, 于是可有

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^3 \left[(1-\kappa)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) + \varepsilon k_3^2 \right] \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \square_j^2 g_3^j \\ & + 2 \frac{\kappa \beta}{\mu_M} \sum_{j=1, \neq 2}^3 \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \varphi^j \\ & + \sum_{j=1}^3 \left[(\alpha_1^2 - \alpha_j^2)(\alpha_3^2 - \alpha_j^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_j^2 \right] \\ & \times \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) g_3^j = 0, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\cos\left(\frac{h}{2} \square_2\right) f = 0. \quad (25b)$$

根据整函数理论, (25b)式的余弦函数型算子可展成如下乘积级数形式

$$\cos\left(\frac{h}{2} \square_2\right) f = \prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{h^2 \square_2^2}{(2m-1)^2 \pi^2} \right] f. \quad (26)$$

对(26)式的无穷乘积级数进行截断, 可得到如下形式的 2 阶波动方程:

$$\nabla^2 f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} - \alpha_2^2 \right) f = 0, \quad (27)$$

(27)式表示平板热弹性振动的剪切场. 可以看到, 由于受热只产生热膨胀变形, 因此, (27)式与没有温度场作用时的平板振动剪切场的支配方程形式是相同的.

由(25a), (22)和(23)式, 对应于描述弯曲应力状态的支配方程为

$$\begin{aligned} & 2A_c D_c \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \square_j^2 (F+W) + 2 \cos\left(\frac{h}{2} \square_1\right) F - \cos\left(\frac{h}{2} \square_2\right) (F+W) \\ & = 2A_c D_c \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \square_j^2 B_c T^g + \varepsilon k_3^2 \alpha_1^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) B_c T^g \\ & \quad - 2(1-\kappa) \varepsilon k_3^2 \sum_{j=1, \neq 2}^3 (-1)^{\frac{1}{2}(j-1)} \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \square_j^2 B_c T^g + \varepsilon k_3^2 \alpha_3^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \square_{j+1}\right) B_c T^g, \quad (28) \\ & 2\kappa A_c D_c \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_j\right)}{\square_j} \nabla^2 \square_j^2 (F+W) + \alpha_1^2 A_c D_c \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \square_1^2 (F+W) \\ & - A_c E_c \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_2\right)}{\square_2} \square_2^2 (F+W) + 2\kappa \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \nabla^2 F + \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \alpha_1^2 F \\ & = \frac{\kappa}{2\mu_M} q + 2\kappa A_c D_c \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_j\right)}{\square_j} \nabla^2 \square_j^2 B_c T^g \\ & \quad - 2\kappa(1-\kappa) \varepsilon k_3^2 \sum_{j=1, \neq 2}^3 (-1)^{\frac{1}{2}(j-1)} \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_j\right)}{\square_j} \nabla^2 \square_j^2 B_c T^g + \varepsilon k_3^2 \left[(1+\kappa) \alpha_1^2 - \kappa \alpha_2^2 \right] \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \square_1^2 B_c T^g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + A_c \varepsilon k_3^2 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_j\right)}{\square_j} (\alpha_1^2 - \kappa \alpha_j^2) \square_2^2 B_c T^g \\
& - \varepsilon k_3^2 (1 - \kappa) \alpha_1^2 \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \square_3^2 g_3^3 - \kappa \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2) \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_3\right)}{\square_3} \square_3^2 B_c T^g,
\end{aligned} \quad (29)$$

式中 $E_c = (\alpha_1^2 - \kappa \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)$.

根据(28)和(29)式, 可得描述平板弯曲振动位移势函数 W 和 F 的支配方程:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

其中各算符的表达式为

$$D_{11} = 2A_c D_c \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \square_2^2 - \cos\left(\frac{h}{2} \square_2\right),$$

$$\begin{aligned}
D_{12} = & 2A_c D_c \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \cos\left(\frac{h}{2} \square_j\right) \square_2^2 \\
& + 2\cos\left(\frac{h}{2} \square_1\right) - \cos\left(\frac{h}{2} \square_2\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{21} = & 2\kappa A_c D_c \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_j\right)}{\square_j} \nabla^2 \square_2^2 \\
& + \alpha_1^2 A_c D_c \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \square_2^2 - A_c E_c \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_2\right)}{\square_2} \square_2^2,
\end{aligned}$$

$$D_{22} = 2\kappa A_c D_c \sum_{j=1}^2 (-1)^{j-1} \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_j\right)}{\square_j} \nabla^2 \square_2^2$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_1^2 A_c D_c \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \square_2^2 - A_c E_c \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_2\right)}{\square_2} \square_2^2 \\
& + 2\kappa \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \nabla^2 + \frac{\sin\left(\frac{h}{2} \square_1\right)}{\square_1} \alpha_1^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 = & 0; \quad P_2 = \frac{\kappa}{2\mu_m} q + \frac{h}{2} \varepsilon k_3^2 [(1 + \kappa) \alpha_1^2 \\
& - 2\kappa \alpha_2^2 + \kappa \alpha_3^2] (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) g_3^3.
\end{aligned}$$

根据(30)式的算子矩阵, 经对微分算子级数截断可得广义位移函数 W 满足的方程式

$$\begin{aligned}
& D \nabla^2 \nabla^2 W + (2 - \nu) D A_1 \nabla^2 W + 2C A_2 \nabla^2 W \\
& - \frac{1}{4} D (1 - \nu) A_3 W + C A_4 W \\
& = A_5 q + A_6 D (1 + \nu) \alpha_T T^g,
\end{aligned} \quad (31)$$

式中 C, D 分别为平板的剪切刚度和抗弯刚度,

$C = \mu_m h, D = \frac{\mu_m h^3}{6(1 - \nu)}$; 修正系数 $A_j (j = 1, 2, \dots)$ 的表

达式为

$$A_1 = \frac{1}{2(3 - 2\kappa)} \frac{2\kappa(3 - 2\kappa) \alpha_2^2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^4 + 5(1 - \kappa) \alpha_1^2 \alpha_2^2 + \kappa \alpha_2^4)}{\kappa (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_1^2};$$

$$A_2 = \frac{\varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 - \kappa \alpha_2^2)}{\kappa (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_1^2};$$

$$A_3 = \frac{(\alpha_1^4 - (1 + 2\kappa) \alpha_1^2 \alpha_2^2 - 2\kappa \alpha_2^4) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + \varepsilon k_3^2 (\alpha_1^2 + 3\alpha_2^2) \alpha_1^2 \alpha_2^2}{\kappa (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_1^2};$$

$$A_4 = \frac{(\alpha_1^2 - 2\kappa \alpha_2^2) (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) + \varepsilon k_3^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{\kappa (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (\alpha_3^2 - \alpha_2^2) - \varepsilon k_3^2 \alpha_1^2};$$

$$A_5 = 1 - \frac{3}{4}(2-\nu)\frac{D}{C}\nabla^2 - \frac{3}{4}\frac{D}{C}[2(1-\nu)\alpha_1^2 + \nu\alpha_2^2];$$

$$A_6 = \frac{2}{1-2\nu}\left\{\frac{C}{D} - \frac{3}{4}(2-\nu)\nabla^2 - \frac{3}{4}[2(1-\nu)\alpha_1^2 + \nu\alpha_2^2]\right\}\frac{\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2 + \alpha_3^2}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}.$$

而广义位移函数 F 所满足的方程为

$$D_{12}F = -D_{11}W. \quad (32)$$

3 受热平板振动精确化方程的考量

本文将推导得到的受热平板弯曲振动方程和温度支配方程与经典的对应方程进行了对比分析, 具体的方程形式对比情况如表 1-3 所示. 在对比过程中采用了频域内的方程形式. 由表 1 可以看出, 本文给出的受热平板弯曲振动方程与其他经典受热平板弯曲振动方程有一定的相似性. 当研究静态力热耦合问题时, 所推出的平板热弹性振动方程就退化为受热平板静力弯曲的精确化方程.

由表 2 可以看出, 本文所推出的受热平板弯曲振动方程, 当不考虑力热耦合影响时就会退化为平板弯曲振动精确化方程^[10]. 各种不同平板理论中的平板弯曲方程具有一定的相似性.

由表 3 可以看出, 本文给出的受热平板结构内的温度支配方程是 2 阶的 Helmholtz 方程, 也就是说, 尽管在分析推导过程中考虑了平板上下表面传热边界条件的限制, 并且在算子级数截断时也是截断到 3

阶, 但是所得到的方程还是 2 阶方程, 而不是 4 阶偏微分方程. 需要指出的是, 决定平板结构内温度的未知函数不是温度本身, 而是中面的温度梯度函数.

4 平板振动方程和温度支配方程的分析与结论

通过分析可以看到: 就弹性振动而言, 力热耦合对动力学过程的影响是阻尼的作用. 材料结构内的力热耦合波动在空间上具有衰减性, 衰减得快慢与振动频率和材料的热扩散率有关. 根据力热耦合程度判据(5), 我们可以得到如下一些结论: (1) 当材料的热膨胀系数较大时, 其力热耦合程度增强; (2) 当超急速加热时, 其力热耦合程度较强; (3) 固体材料或环境的平均温度决定着力热耦合程度, 平均温度越高力热耦合程度越强; (4) 当材料的定容比热值较大时, 其力热耦合程度较弱; (5) 可以看到, 力热耦合程度与材料的导热系数无关, 尽管在热传导中, 若导热系数较大, 则温度趋于均匀化变快, 但是, 对力热耦合程度没有影响; (6) 材料的 Poisson 比对力热耦合程度也有一定的影响.

表 1 受热平板弯曲静力和动力学方程形式的对比

Table 1 A comparison of static and dynamic equations of thermoelastic plate bending

平板理论的类别	考虑力热耦合的平板静力学方程	考虑力热耦合的平板动力学方程
本文给出的方程	$D\nabla^2\nabla^2W = q - \frac{3(2-\nu)}{4}\frac{D}{C}\nabla^2q$ $+ \frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\left[\frac{C}{D} - \frac{3(2-\nu)}{4}\nabla^2\right]D\alpha_T T^s$ $\nabla^2 f - \frac{\pi^2}{h^2}f = 0.$	$D\nabla^2\nabla^2W + (2-\nu)DA_1\nabla^2W$ $+ 2CA_2\nabla^2W - \frac{1}{4}D(1-\nu)A_3W + CA_4W$ $= A_5q + A_6D(1+\nu)\alpha_T T^s$ $\nabla^2 f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} - \alpha_2^2\right)f = 0.$
文献[11]平板理论	$D\nabla^2\nabla^2W = q - D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2T^s$	$D\nabla^2\nabla^2W - C\alpha_2^2W$ $= q - D(1+\nu)\alpha_T\left[1 - \frac{(1-\kappa)\alpha_3^2}{\kappa(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}\right]\nabla^2T^s$
文献[14]平板理论	$D\nabla^2\nabla^2W = q - D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2T^s$	$D\nabla^2\nabla^2W_s = -D(1+\nu)\alpha_T\nabla^2T^s,$ $D\nabla^2\nabla^2W_d - C\alpha_2^2W_d = q + C\alpha_2^2W_s,$ $W = W_s + W_d.$

表 2 与不考虑力热耦合影响的平板弯曲振动方程形式的对比

Table 2 A comparison of thermomechanical and non-thermo-mechanical coupling equations

平板理论类别	不考虑力热耦合的平板振动方程	考虑力热耦合的平板振动方程
本文给出的方程	$D\nabla^2\nabla^2W + (2-\nu)D\alpha_2^2\nabla^2W$ $+ \left(\frac{7}{8}-\nu\right)D\alpha_2^4W - C\alpha_2^2W$ $= q - \frac{3}{4}\frac{D}{C}\left[(2-\nu)\nabla^2 + (1-\nu)\alpha_2^2\right]q,$ $\nabla^2f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} - \alpha_2^2\right)f = 0.$	$D\nabla^2\nabla^2W + (2-\nu)DA_1\nabla^2W + 2CA_2\nabla^2W$ $- \frac{1}{4}D(1-\nu)A_3W + CA_3W$ $= A_3q + A_6D(1+\nu)\alpha_T T^g,$ $\nabla^2f - \left(\frac{\pi^2}{h^2} - \alpha_2^2\right)f = 0.$
文献[11]平板理论	$D\nabla^2\nabla^2W - C\alpha_2^2W = q.$	$D\nabla^2\nabla^2W - C\alpha_2^2W$ $= q - D(1+\nu)\alpha_T \left[1 - \frac{(1-\kappa)\alpha_3^2}{\kappa(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}\right] \nabla^2 T^g.$
文献[14]平板理论	$D\nabla^2\nabla^2W - C\alpha_2^2W = q.$	$D\nabla^2\nabla^2W_s = -D(1+\nu)\alpha_T \nabla^2 T^g,$ $D\nabla^2\nabla^2W_d - C\alpha_2^2W_d = q + C\alpha_2^2W_s,$ $W = W_s + W_d.$

表 3 平板温度支配方程形式的对比

Table 3 A comparison of equations governing the temperature of plates

平板理论类别	稳态工况下的温度支配方程	非稳态工况下的温度支配方程
本文给出的平板结构的力热耦合温度支配方程	$\nabla^2 T^g - \frac{12}{h^2} T^g = -\frac{12}{h^3} g^s,$ $\nabla^2 T^g - \frac{4}{h^2} T^g = \frac{4}{kh^2} q^s.$	$\nabla^2 T^g + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) T^g - \frac{12}{h^2} T^g = -\frac{12}{h^3} g^s,$ $\nabla^2 T^g + \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) T^g - \frac{4}{h^2} T^g = \frac{4}{kh^2} q^s.$
不考虑力热耦合影响时平板结构的温度支配方程	$\nabla^2 T^g - \frac{12}{h^2} T^g = -\frac{12}{h^3} g^s,$ $\nabla^2 T^g - \frac{4}{h^2} T^g = \frac{4}{kh^2} q^s.$	$\nabla^2 T^g + \frac{1}{2}k_3^2 T^g - \frac{12}{h^2} T^g = -\frac{12}{h^3} g^s,$ $\nabla^2 T^g + \frac{1}{2}k_3^2 T^g - \frac{4}{h^2} T^g = \frac{4}{kh^2} q^s.$
不考虑力热耦合时固体材料的温度支配方程, 即 Fourier 热传导方程	$\nabla_0^2 g = 0.$	$\nabla_0^2 g + k_3^2 g = 0.$

本文基于算子代数方法, 采用了适当的规范条件, 满足平板结构的上下表面边界条件, 对三维弹性体实现了热弹性方程解耦分析, 分别得到了受热平板结构的弯曲振动方程和温度支配方程. 平板结构内弹性应变场和温度场的动态过程分别由三个独立的振动方程(31), (27)和(23)支配, 而对应的位移和温度表达式分别为 16(a), 16(b)和 16(c)式. 偏微分方程(3)和(4)的总阶数是 10 阶. 这些方程总共涉及到 11 个未知函数, 根据微分算子的谱理论, 为消除广义位移势函数和温度势函数的不唯一性, 必须采用 7 个适当的规范条件.

基于解耦后的力热动力学方程结构形式可以看出, 考虑力热耦合影响后, 平板结构的振动响应由三两部分组成: (1) 是平板结构的自由振动解; (2) 表面

机械载荷作用产生的动力响应; (3) 温度热载荷产生的弹性动力响应. 需要指出的是, 此时外部热载荷作用是由温度支配方程的解决定的, 而温度响应由两部分组成的: 温度场支配方程的齐次解和平板表面热载荷产生的非齐次解.

本文的主要创新之处为: (1) 首次给出了考虑力热耦合影响的平板结构振动方程及其相应的温度支配方程; (2) 所给出的支配方程是在形式上完全解耦的方程, 即在温度场分析计算中只要求解方程(23), 在形式上与直接求解经典 Fourier 热传导方程一样, 但是, 此时在方程的系数中已经考虑了力热耦合的相互影响, 并且偏微分方程是 2 维的, 而后再去求解平板振动方程(31)和(32); (3) 给出了描述力热耦合影响程度的无量纲参数表达式(5); (4) 本文基于三维热

弹性力学方程满足平板表面的力热边界条件, 把三维热弹性动力学问题转化为低维结构的热弹性动力学问题. 而后, 基于解耦后的低维结构振动方程和温度支配方程, 采用偏微分方程理论及其解的构造形式, 研究讨论了平板结构内力热耦合机理与力热耦合响应模式等相关问题.

随着现代力学和数学的发展, 新的研究结果和研究方法不断呈现. 数学力学的新进展使得解决复杂力学问题的能力不断增强, 并对力学与物理中的

数学发展起到积极的推进作用, 为更为精确地求解固体结构动力学和数值计算提供新的列式和手段. 本文给出的受热平板热弹性振动和温度支配方程及其相关科学问题的分析讨论, 可望能在高超声速飞行器热端部件的力热耦合动力学分析和计算中得到应用. 研究热端部件中力热耦合机理和力热耦合响应模式以及给出评估力热耦合程度的判据, 实现对空天飞行器热防护结构力热耦合的精确化动力学分析和结构轻型化.

参考文献

- 1 Mi G R, Guo S. Thermal Control of Spacecraft (in Chinese). Beijing: Science Press, 1998 [闵桂容, 郭舜. 航天器热控制. 北京: 科学出版社, 1998]
- 2 Mahulikar S P. Theoretical aerothermal concepts for configuration design of hypersonic vehicles. *Aerospace Sci Tech*, 2005, 9(8): 681–685
- 3 杜善义. 热防护材料及其力学问题. 见: 中国力学学会学术大会, 2005 (CCTAM2005)论文集. 北京: 中国力学学会, 2005
- 4 Meng Y P, Zheng R H. Brief review on inlet of the supersonic flow and integrated development of winged missiles (in Chinese). *Aerodyn Missile J*, 2008, (1): 47–52 [孟宇鹏, 郑日恒. 超声速进气道与飞航导弹一体化发展概述. 飞航导弹, 2008, (1): 47–52]
- 5 Hu C, Fang X Q. Multiple scattering of thermal waves from a spheroid in exponentially graded materials based on non-Fourier's model. *Infrared Phys Tech*, 2007, 50(1): 70–77
- 6 Sharma J N, Sharma P K, Rana S K. Flexural and transversal wave motion in homogeneous isotropic thermoelastic plates by using asymptotic method. *J Sound Vib*, 2010, 329: 804–818
- 7 鲍亦兴, 毛昭宙. 弹性波的衍射与动应力集中. 刘殿魁, 苏先穰, 译. 北京: 科学出版社, 1993
- 8 Eringen A C, Suhubi E S. *Elastodynamics, Volume II Linear Theory*. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975
- 9 Nowacki W. *Thermoelasticity*. Warszawa: Pergamon Press, 1986
- 10 Hu C, Ma F, Ma X R, et al. Refined dynamic theory of thick plates and its new formulism (in Chinese). *Sci Sin-Phys Mech Astron*, 2012, 42(5): 522–530 [胡超, Ma F, 马兴瑞, 等. 厚板弯曲与拉伸振动精化理论及其求解新途径. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2012, 42(5): 522–530]
- 11 吴连元. 板壳理论. 上海: 上海交通大学出版社, 1989
- 12 安世全, 孙佑民. 线性算子的谱理论. 北京: 科学出版社, 1995
- 13 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981
- 14 Mote Jr C D. Theory of thermal natural frequency vibrations in disks. *Int J Mech Sci*, 1966, 8: 547–557

Refined Governing Equations of Vibration Plate With Thermo-mechanical Coupling

HU Chao^{1,2*}, ZHENG RiHeng³, ZHOU ChuanPing² & HUANG WenHu⁴

¹ College of Civil Science and Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China;

² School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China;

³ The 31st Research Institute of CASIC, Beijing 100074, China;

⁴ School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China

In this paper, based on the theory of thermoelastodynamics, applied the method of differential operators and the theory of gauge fields, the thermo-mechanical coupled problem of vibration plates was investigated. The refined governing equations of vibration plates and temperature including the effect of thermomechanical coupling are firstly obtained by using three gauge conditions, and the criterion representing the extent of thermomechanical coupling was given. The related some questions, for examples, the mechanism and response modes of thermo-mechanical coupling in plates were analyzed and discussed by using the theory of PDE. The proposed refined governing equations of thermo-elastic plates and its analysis results can be used to analyze and solve the thermo-mechanical dynamic problem of plates at the high temperature.

thermo-elastic dynamics, complete thermo-mechanical coupling, refined equations of heating plates, method of differential operators and complex functions, gauge condition

PACS: 46.40.-f, 46.70.De, 44.10.+i, 02.30.Em, 02.30.Tb, 46.15. Ff, 11.15.-q, 46.25.Hf

doi: 10.1360/132012-414