中国科学: 数学 2019 年 第 49 卷 第 3 期: 581 ∼ 590
SCIENTIA SINICA Mathematica
论 文

《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark
click for updates

带移民分枝过程的极限定理

献给王梓坤教授 90 华诞

张梅

北京师范大学数学科学学院, 北京 100875
E-mail: meizhang@bnu.edu.cn

收稿日期: 2018-02-19; 接受日期: 2018-12-10; 网络出版日期: 2019-02-26
国家自然科学基金 (批准号: 11871103) 资助项目

摘要 本文介绍带移民分枝过程极限性质的部分文献, 分为下临界、临界和上临界三种情形; 同时介绍了作者及合作者的一些最新研究进展, 包括带移民临界分枝过程的大偏差和上偏差、带移民上临界分枝过程的调和矩以及大偏差和下偏差等.

关键词 分枝过程 极限定理 移民

MSC (2010) 主题分类 60J80, 60F10

1 引言

称 $Z=(Z_n)_{n\geqslant 0}$ 为一个初值为 1 的带移民 Galton-Watson (GWI) 过程, 如果

$$Z_n=\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}\xi_i^{(n)}+Y_n,\quad n\geqslant 1,\quad Z_0=1, \tag{1.1}$$

其中 $\{\xi_i^{(n)},i\geqslant 1,n\geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量, 其共同的母函数为 $f(s)=\sum_{i=0}^{\infty}p_is^i$, 记 $m=f'(1-)$; $\{Y_n,n\geqslant 1\}$ 是独立同分布的随机变量, 其母函数为 $h(s)=\sum_{i=0}^{\infty}h_is^i$, 记 $\beta=h'(1-)$. 同时, $\{\xi_i^{(n)},i\geqslant 1,n\geqslant 1\}$ 与 $\{Y_n,n\geqslant 1\}$ 也相互独立. 显然, Z 是一个时齐的 Markov 链, 其 n 步转移概率记为 $p_{ij}^{(n)}=\mathrm{P}\{Z_{n+k}=j\mid Z_k=i\}$, $i,j,n,k\geqslant 0$. 记 Z_n 的母函数为 $H_n(x)$. 由独立性, 可得

$$H_n(x)=f_n(x)\prod_{i=0}^{n-1}h[f_i(x)],\quad n\geqslant 1,\quad x\in[0,1],$$

其中 $f_{n+1}(s)=f[f_n(s)]$, $f_0(s)=s$. 当 $m<1$、$m=1$ 和 $m>1$ 时, 分别称过程 Z 是下临界、临界和上临界. 如果把 Z_n 看作某物种的一个个体繁衍的过程中第 n 代的后代数目, 则 $\{\xi_i^{(n)}\}$ 可以看作第

英文引用格式: Zhang M. Limit theorems of branching processes with immigration (in Chinese). Sci Sin Math, 2019, 49: 581–590, doi: 10.1360/N012018-00034

$n-1$ 代个体中的第 i 个个体在第 n 代产生的后代数, Y_n 可以看作第 n 代新移入的个体数. 也就是说, 第 n 代的个体总数目 Z_n, 是第 $n-1$ 代所有个体产生的后代数目 $\{\xi_i^{(n)}\ (i=1,\dots,Z_{n-1})\}$ 以及第 n 代新移入的个体数目之和. 定义 Z 的 n 步转移概率的母函数为

$$P_i^{(n)}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}x^j.$$

这个模型被认为来源于 Haldane[1] 关于基因突变的研究中, Haldane 假设 $\xi_i^{(n)}$ 和 Y_n 都服从 Poisson 分布. 后来, Bartlett [2] 指出, 当 $m<1$ 时, 过程应该存在平稳分布 $\{\pi_i\}$, 其母函数 $\pi(s):=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i s^i$ 满足:

$$\pi(s)=h(s)\pi[f(s)],\quad s\in[0,1].$$

这一问题的严格证明在文献 [3,4] 给出, 如果转移矩阵 $\{p_{ij}\}$ 不可约、非周期, 则当 $m<1$ 时, 过程正常返当且仅当 $\sum_{i=1}^{\infty}h_j\log j<\infty$; 当 $m>1$ 时, 过程暂留. $m=1$ 的情形由 Seneta [5] 给出, 在条件 $\sum_{i=1}^{\infty}jh_j<\infty$ 之下, Seneta [5] 证明了当且仅当存在 $\gamma\in(0,1]$, 使得下式成立时:

$$\int_0^{\gamma}\left(1-\frac{1-f(1-x)}{x}\right)^{-1}dx<\infty, \tag{1.2}$$

过程正常返. 关于这一段文献综述, 可参见文献 [6].

在下文中, 记 $d_n=O(e_n)$, 如果存在 C_1 和 C_2 使得

$$C_1\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\frac{d_n}{e_n}\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{d_n}{e_n}\leqslant C_2;$$

记 $d_n=o(e_n)$, 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{e_n}=0$; 记 $d_n\sim e_n$, 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{e_n}=1$.

以下的第 2–4 节, 将分下临界、临界和上临界三种情形, 分别介绍 GMI 过程的极限行为, 主要介绍历史文献以及本文作者与合作者的部分最新研究进展.

2 下临界情形 ($m<1$)

本节假定

$$0<p_0,h_0<1,\quad m<1,\quad \beta<\infty.$$

如上节所述, Heathcote [3,4] 证明了 Z 有平稳分布 π, 其母函数为

$$\pi(x)=\prod_{i=0}^{\infty}h(f_i(x)),\quad x\in[0,1].$$

在以上结果的基础上, Pakes [7] 进一步给出了下临界 GWI 过程的遍历性质:

定理 2.1 (参见文献 [7, 定理 1]) 如果 $\sum_{i=0}^{\infty}p_i(i\log i)<\infty$, 则

$$P_i^{(n)}(x)=\pi(x)+m^nH(x)\left(1-\frac{i(1-m)}{\beta}\right)+R_i^{(n)}(x),\quad |x|<1,$$

其中 $R_i^{(n)}(x)=o(m^n)$, $H(s)=\sum_{i=0}^{\infty}H_is^i$ 是一个幂级数, $H(1)=0$, 且满足以下泛函方程:

$$h(s)H(f(s))=mH(s).$$

同时,

$$p_{ij}^{(n)} = \pi_j + m^n H_j\left(1 - \frac{i(1-m)}{\beta}\right) + r_{ij}^{(n)},$$

其中 $r_{ij}^{(n)} = o(m^n)$, 所以, 过程 Z 是几何遍历的. 又如果 $f''(1-) < \infty$, $h''(1-) < \infty$, 则 $R_i^{(n)}(x)$ 和 $r_{ij}^{(n)}$ 都与 m^{2n} 同阶.

同时, Pakes [7] 还得到了下临界 GWI 过程前 n 代总人口数 $\sum_{i=0}^{n} Z_i$ 的强大数定律和中心极限定理:

定理 2.2 (参见文献 [7, 引理 1]) 下临界情形的 GWI 过程 Z 满足如下强大数定律:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} Z_i = \frac{\beta}{1-m}, \quad \text{a.s.}$$

定理 2.3 (参见文献 [7, 定理 3]) 若 $f''(1-) < \infty$, $h''(1-) < \infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} Z_i - an}{b\sqrt{n}} \leqslant x\right) = \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

其中

$$a = \frac{\beta}{1-m}, \quad b = \frac{\beta}{(1-m)^3}\sigma_f^2 + \frac{1}{(1-m)^2}\sigma_h^2, \tag{2.1}$$

σ_f^2 和 σ_h^2 分别是分枝和移民的方差, 也即

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p_i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} i p_i\right)^2, \quad \sigma_h^2 = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 h_i - \left(\sum_{i=0}^{\infty} i h_i\right)^2,$$

$\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

在定理 2.2 和 2.3 的基础上, Yu 等 [8] 研究了当分枝和移民都存在指数矩时下临界 GWI 过程的大偏差和中偏差:

定理 2.4 (参见文献 [8, 定理 1.1]) 如果存在 $\theta_0 > 0$ 使得 $f(\mathrm{e}^{\theta_0}) < \infty$, $h(\mathrm{e}^{\theta_0}) < \infty$, 则对 $[0,\infty)$ 中所有闭集 F, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \mathrm{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} Z_i \in F\right) \leqslant -\inf_{x\in F} I(x);$$

对 $[0,\infty)$ 中所有开集 G, 有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log \mathrm{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} Z_i \in G\right) \geqslant -\inf_{x\in G} I(x);$$

这里

$$I(x) = \sup_{\theta\in\mathbb{R}}\{x(\theta - \log f(\mathrm{e}^{\theta})) - \log h(\mathrm{e}^{\theta})\}.$$

定理 2.5 (参见文献 [8, 定理 1.2]) 设 $\{b_n\}$ 满足 $b_n \to \infty$ 和 $b_n = o(n)$, 则在定理 2.4 的条件下, 对 $(-\infty,\infty)$ 中所有闭集 F, 有

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\log \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{nb_n}}\sum_{i=0}^{n}(Z_i - a) \in F\right) \leqslant -\inf_{x\in F} I_M(x);$$

对 $(-\infty,\infty)$ 中所有开集 G, 有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\log \mathrm{P}\bigg(\frac{1}{\sqrt{nb_n}}\sum_{i=0}^{n}(Z_i-a)\in G\bigg)\geqslant -\inf_{x\in G}I_M(x);$$

这里 $I_M(x)=\frac{x^2}{2b}$, a 和 b 由 (2.1) 定义.

3 临界情形 ($m=1$)

本节假定 $0<p_0,h_0<1$, $m=1$. 定义

$$\gamma=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}i(i-1)p_i,\quad \sigma=\frac{\beta}{\gamma}.$$

在临界情形下, 如果 $\gamma=\infty$, 当条件 (1.2) 成立时, 过程 Z 正常返; 如果 $\gamma<\infty$, 条件 (1.2) 不可能成立, 所以过程不再是正常返的. 对这种情形, 文献 [9, 定理 1] 得到了如下结果:

定理 3.1 (参见文献 [9, 定理 1]) 假定 $\gamma<\infty$.

(1) 当 $\sigma<1$ 时, 过程 Z 零常返;

(2) 当 $\sigma>1$ 时, 过程 Z 暂留;

(3) 当 $\sigma=1$ 时, 若 $h''(1-)<\infty$, 则过程 Z 零常返.

零常返的情形, 以下定理 3.2 给出了 Z 在 0 点停留次数的刻画:

定理 3.2 (参见文献 [9, 定理 2]) 若 $\gamma<\infty$, 以及 $\sum_{i=1}^{\infty}p_j j^2\log j<\infty$, 则

$$C:=\lim_{n\to\infty}n^{\sigma}p_{00}^{(n)}<\infty,$$

(1) 当 $\sigma<1$ 时, 令 $U_n=C\Gamma(1-\sigma)n^{1-\sigma}$;

(2) 当 $\sigma=1$ 时, 令 $U_n=C\log n$,

则有

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\bigg(\frac{1}{U_n}\sum_{i=0}^{n}1_{\{Z_i=0\}}\leqslant x\bigg)=G_{1-\sigma}(x),\quad x>0,$$

这里

$$G_c(x)=\frac{1}{\pi c}\int_0^x\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\sin(\pi cj)\Gamma(cj+1)y^{j-1}dy,\quad 0\leqslant c<1.$$

注 3.1 当 $\sigma=1$ 时, $G_0(x)=1-\mathrm{e}^{-x}$, $x>0$, 即极限分布是参数为 1 的指数分布.

Pakes [10] 得到了 GWI 过程 Z 的母函数 H_n 的渐近性质, 以及 Z_n 的局部极限定理:

定理 3.3 (参见文献 [10, 定理 1 和 2]) 在定理 3.2 的条件下,

$$\lim_{n\to\infty}n^{\sigma}H_n(x)=U(x)$$

在单位圆盘 $|x|<1$ 的紧子集上一致成立, 极限函数 $U(x)$ 满足泛函方程

$$h(x)U(f(x))=U(x),$$

并且有

$$U(x)\sim(1-x)^{-\sigma},\quad x\to 1^-.$$

$U(x)$ 可以展开为幂级数 $U(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j x^j$, 这里的 μ_i 满足

$$\lim_{n\to\infty} n^{\sigma}\mathrm{P}\{Z_n=j\}=\mu_j,\quad j\geqslant 0.$$

在临界情形, 经过规范化, Z_n 具有如下定理 3.4 的极限分布. 这个结论与不带移民的 GW (Galton-Watson) 过程类似 (参见文献 [11, 第 I 章第 9 节定理 2]), 规范化因子相同, 极限分布都为 Gamma 分布 (参数不同). 此时 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}\{Z_n>0\}=1$, 所以, 此处无须考虑 $\{Z_n>0\}$ 之下的条件极限.

定理 3.4 (参见文献 [9, 定理 3]) 若 $\gamma<\infty$, 则 $\frac{Z_n}{n}$ 依分布收敛于 η, 其中 η 服从 Gamma 分布, 其概率密度为

$$f_{\eta}(x)=\frac{1}{\beta\Gamma(\sigma)}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\sigma-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\beta}},\quad x>0.$$

由定理 3.4, 如果令 $k_n\to\infty$, $k_n=o(n)$, 则

$$\mathrm{P}(Z_n\leqslant k_n)\to 0.$$

在此基础上, 最近, Li 和 Zhang [12] 研究了临界 GWI 过程的下偏差, 刻画了以上收敛于 0 的速度.

定理 3.5 [12] 令 $k_n\to\infty$, $k_n=o(n)$. 若 $\gamma<\infty$, $h''(1-)<\infty$, 则

$$\mathrm{P}(Z_n\leqslant k_n)\leqslant C_3\left(1+\gamma\frac{n}{k_n}\right)^{-\sigma}.$$

类似地还有如下的上偏差结果:

定理 3.6 [12] 令 $\frac{k_n}{n}\to\infty$, $k_n=o(n^2)$. 若 $\gamma<\infty$, $h''(1-)<\infty$, 且存在 $\theta>0$ 使得 $f(\mathrm{e}^{\theta})<\infty$, 则

$$\mathrm{P}(Z_n\geqslant k_n)\leqslant\left(\frac{k_n}{\gamma n}\right)^{h'(1+\frac{k_n}{\gamma^2n^2}-\frac{1}{\gamma n})\frac{1}{\gamma}}\exp\left\{-\frac{k_n}{\gamma n}+1-\frac{1}{\gamma}\lambda\frac{k_n}{n^2}\ln\frac{k_n}{n}\right\}\left(1+O\left(\frac{k_n}{n^2}\right)\right),$$

这里 $\lambda=1-\frac{f'''(1-)}{6\gamma^2}$.

Li 和 Zhang [12] 在下面的定理中给出了 $\frac{Z_{n+1}}{Z_n}$ 的方差的阶估计:

定理 3.7 [12] 定义 $J_n=\mathrm{Var}\{\frac{Z_{n+1}}{Z_n}\mid Z_n>0\}$. 在条件 $\gamma<\infty$ 和 $h''(1-)<\infty$ 下,

(1) 若 $\sigma<1$, 则 $J_n=\kappa n^{-\sigma}(1+o(1))$, 这里

$$\kappa=2\gamma\int_0^1\frac{1}{s}(U(s)-U(0))ds+\sigma_h^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{k^2};$$

(2) 若 $\sigma>1$, $\sigma\neq 2$, 则 $J_n=\kappa n^{-1}(1+o(1))$, $n\to\infty$, 这里 $\kappa=\frac{2\gamma}{\beta-\gamma}$;

(3) 若 $\sigma=1$, 则 $J_n=O(\frac{\log n}{n})$. 由 Chebyshev 不等式和定理 3.7 知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 当 $n\to\infty$ 时,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}-1\right|>\varepsilon\,\middle|\,Z_n>0\right)\to 0.$$

最近, Li 和 Zhang [12] 还研究了以上收敛的大偏差速度:

定理 3.8 [12] 如果 $r>\max\{\sigma,1\}$, 使得 $\sum_{i=1}^{\infty}i^{2r+\delta}p_i<\infty$ 对某个 $\delta>0$ 成立, 且 $\sum_{i=1}^{\infty}i^r h_i<\infty$, 则以下极限存在并有限:

$$\lim_{n\to\infty}n^{\sigma}\mathrm{P}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n}-1\right|>\varepsilon\,\middle|\,Z_n>0\right)<\infty.$$

带移民分枝过程的有限维分布收敛早在文献 [13,14] 就得到了研究. Wei 和 Winnicki[17] 证明了临界分枝过程的阶梯函数在 Skorokhod 拓扑下收敛于一个非负扩散过程. 关于临界分枝过程的泛函极限定理, 可参见文献 [15–19]. 特别地, Rahimov[18] 证明了当移民趋于无穷且在移民均值和方差满足特定的关系时, 带独立移民临界分枝过程的泛函中心极限定理的极限过程为 Gauss 过程. Guo 和 Zhang[19] 进一步得到了当各代移民在某种意义下相互依赖时, 过程的一个泛函中心极限定理.

4 上临界情形 ($m>1$)

当 $m>1$ 时, $f_n(x)\uparrow q$, 这里 $q\in[0,1)$ 是方程 $s=f(s)$ 的最小根 (参见文献 [20]), 此时,

$$p_{00}^{(n)}\leqslant (h(q))^n,$$

由此易见过程 Z 暂留. 本节假定

$$p_0=0,\quad m\in(1,\infty).$$

此时 $q=0$. 实际上, $p_0>0$ 的情形, 利用文献 [21], 可以把它归结为 $p_0=0$ 的情形, 参见文献 [11, 第 I 章第 11 节] 的讨论.

关于上临界情形的渐近性质, Pakes[7] 给出了总人口数 $\sum_{i=0}^n Z_n$ 的极限定理.

定理 4.1 [7] 上临界情形下, 总人口数满足如下的强极限定理:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m^n}\sum_{i=0}^n Z_n=\frac{m\zeta}{m-1},\quad \text{a.s.}$$

如果 $\sum_{j=0}^\infty p_j j\log j<\infty$, 则 $\mathrm{P}(\zeta>0)=1$, ζ 是 $(0,\infty)$ 上的连续型随机变量, 其 Laplace 变换为

$$\mathrm{E}\exp\{-\theta\zeta\}=F(\theta)G(\theta),\quad \theta\geqslant 0,$$

这里 $F(\theta)$ 和 $G(\theta)$ 分别满足泛函方程

$$F(m\theta)=f(F(\theta)),\quad G(m\theta)=G(\theta)h(F(\theta)),\quad \theta\geqslant 0.$$

实际上,

$$G(\theta)=\prod_{m=1}^\infty h\biggl(F\biggl(\frac{\theta}{m^n}\biggr)\biggr).$$

对于 $n\geqslant 1$, 我们把 GWI 过程 Z_n 作如下分解:

$$Z_n=Z_n^0+U_n^{(1)}+\cdots+U_n^{(n)},\tag{4.1}$$

这里 Z_n^0 表示初始粒子在第 n 代的后代总数, $U_n^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示第 i 代进入的移民在第 n 代的后代总数, 则 $Z_n^0, U_n^{(1)},\dots,U_n^{(n)}$ 相互独立.

由文献 [22,23], 若 $\sum_{j=1}^\infty p_j j\log j<\infty$, 则

$$\frac{Z_n^0}{m^n}\xrightarrow{\text{a.s.}} W,\quad n\to\infty,$$

且 $\mathrm{E}W=1$, W 在 $(0,\infty)$ 上具有连续密度 w; 若 $\sum_{j=1}^{\infty}p_j j\log j=\infty$, 则 $\mathrm{P}(W=0)=1$. 后来, Seneta [5] 证明了在这种情形下, 仍然存在一列规范化因子 $\{C_n\}$, $C_n=O(m^n)$, 使得在依分布收敛意义下有

$$\frac{Z_n^0}{C_n}\xrightarrow{d}W,\quad n\to\infty.$$

此处 $\mathrm{P}(W=0)<1$. 文献 [24, 定理 1] 进一步证明了以上收敛在几乎必然意义下成立.

对于 GWI 过程 Z_n, Seneta [25] 证明了其规范化极限存在, 规范化因子仍然是上述 $\{C_n\}$, 即

$$I_n:=\frac{U_n^{(1)}+\cdots+U_n^{(n)}}{C_n}\xrightarrow{\text{a.s.}}I,\quad n\to\infty. \tag{4.2}$$

所以,

$$V_n:=\frac{Z_n}{C_n}\xrightarrow{\text{a.s.}}V=W+I,\quad n\to\infty. \tag{4.3}$$

如果 $\sum_{j=0}^{\infty}p_j j\log j<\infty$, 则可取 $C_n=m^n$. 进一步地, 若 $\sum_{j=1}^{\infty}h_j\log j<\infty$, 则

$$\mathrm{P}\{I<\infty\}=\mathrm{P}\{V<\infty\}=1,$$

且 V 在 $(0,\infty)$ 具有密度函数 v. 根据文献 [26, 定理 1 (iii)], 若 $\sum_{j=1}^{\infty}p_j j\log j<\infty$, $\beta<\infty$, 则 I 限制在 $(0,\infty)$ 有连续密度 i, 满足

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}(I_n\geqslant x)=\int_x^{\infty}i(t)\,dt,\quad x>0.$$

所以, 此时 v 在 $(0,\infty)$ 有连续密度; 由 (4.2), 有

$$v(x)=\int_0^x w(t)i(x-t)\,dt,\quad x>0,$$

即 $v=w*i$, 其中 $*$ 表示卷积运算. 关于 I 和 V 的密度以及有关小值概率的研究, 还可参见文献 [27].

GW 过程的调和矩

$$\tau_n(r):=\mathrm{E}(Z_n^{-r}\mid Z_n>0),\quad r>0,$$

在研究形如 Z_{n+1}/Z_n 的大偏差中起关键作用. 对于不带移民的 GW 过程, 也即 $Y_n\equiv 0$ 时, $\tau_n(r)$ 的渐近行为有广泛研究, 可参见文献 [28–31], 其中 Heyde 和 Brown [28] 得到了 $r=\frac{1}{2}$ 时的结果, 并猜测在一定的条件下应该有 $\tau_n(1)\sim m^{-n}$. Nagaev [29] 证明了 $\tau_n(1)=O(\rho^n)$, 其中 $\max(0,m^{-1})<\rho^2<1$. Pake [31] 在条件 $p_1m\neq 1$ 下得到了 $\tau_n(1)$ 的极限, 并猜测当 $p_1m=1$ 时, $\tau_n(1)\sim nm^{-n}$. Ney 和 Vidyashankar [30] 系统地讨论了 $\tau_n(r)$ 的渐近性质, 分 $p_1m^r>1$、$p_1m^r=1$ 和 $p_1m^r<1$ 三种情形得到了完整结论.

在以上文献的基础上, Liu 和 Zhang [32] 研究了上临界 GWI 过程的大偏差, 得到了部分结果. 最近, Sun 和 Zhang [33] 研究了上临界 GWI 过程的调和矩收敛:

定理 4.2 [33] 假定 $h_0>0$, $\sum_{j=1}^{\infty}h_j\log j<\infty$. 定义 $\rho:=p_1h_0m^r$, 以及

$$a_n(r)=\begin{cases}(p_1h_0)^{-n}, & \rho>1,\\ (p_1h_0)^{-n}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(p_1h_0)^{-k}C_k^{-r}\right)^{-1}, & \rho=1,\\ C_n^r, & \rho<1,\end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n(r)\mathrm{E}(Z_n^{-r}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_{0^+}^{\infty} \gamma(\mathrm{e}^{-u})\, u^{r-1}\, du, & \rho > 1, \\ \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_{1}^{m} \gamma(\phi(u))\psi(u)\, u^{r-1}\, du, & \rho = 1, \\ \dfrac{1}{\Gamma(r)}\displaystyle\int_{0}^{\infty} \varphi(u)\, u^{r-1}\, du, & \rho < 1, \end{cases}$$

这里

$$\phi(u) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{-uW}, \quad \psi(u) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{-uI}, \quad \varphi(u) = \phi(u)\psi(u) = \mathrm{E}\mathrm{e}^{-uV},$$
$$\gamma(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{H_n(x)}{(p_1h_0)^n}, \quad x \in [0,1).$$

作为定理 4.2 的推论, Sun 和 Zhang [33] 得到了 Z_{n+1}/Z_n 的大偏差估计:

定理 4.3 [33] 假定 $h_0 > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} h_j \log j < \infty$. 对每个 $\varepsilon > 0$, 定义

$$A(k,\varepsilon) = \mathrm{P}\left(\left|\bar{\xi}_k + \frac{Y_1}{k} - m\right| > \varepsilon\right), \tag{4.4}$$

这里 $\bar{\xi}_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(1)}$. 如果存在 $r > 0$, $C(\varepsilon, r) > 0$, 使得对所有的 $k \geqslant 1$ 有 $A(k,\varepsilon) \leqslant C(\varepsilon,r)k^{-r}$, 则

$$\limsup_{n\to\infty} a_n(r)\mathrm{P}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n} - m\right| > \varepsilon\right) \leqslant C(\varepsilon, r); \tag{4.5}$$

如果对所有的 $k \geqslant 1$ 有 $A(k,\varepsilon) \geqslant C(\varepsilon,r)k^{-r}$, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n(r)\mathrm{P}\left(\left|\frac{Z_{n+1}}{Z_n} - m\right| > \varepsilon\right) \geqslant C(\varepsilon, r). \tag{4.6}$$

由 (4.2) 和 (4.3) 知, 如果 $k_n = o(m^n)$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(Z_n \leqslant k_n) = 0.$$

对于非移民情形, 即 $Y_n \equiv 0$ 时, Fleischmann 和 Wachtel [34] 研究了以上收敛的速度问题, 并称为 GW 过程的下偏差. 最近, Sun 和 Zhang 1) 进一步研究了 GWI 过程的下偏差问题:

定理 4.4 1) 假定 $p_1 > 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j \log j < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} h_j \log j < \infty$. 对 $n \geqslant 1$, 定义 $a_n := \min\{l \geqslant 1 : m^l \geqslant k_n\}$. 取数列 $\{k_n\}$ 满足 $k_n \to \infty$, $k_n = o(m^n)$.

(1) 若 $h_0 > 0$, 则当 $n \to \infty$ 时,

$$\mathrm{P}(Z_n = k_n) = m^{-n} v\left(\frac{k_n}{m^n}\right)(1 + o(1)), \tag{4.7}$$

并且

$$\mathrm{P}(0 < Z_n \leqslant k_n) = F\left(\frac{k_n}{m^n}\right)(1 + o(1)), \tag{4.8}$$

这里 F 是 V 的分布函数, 即 $F(x) := \mathrm{P}(V \leqslant x)$.

(2) 若 $h_0 = 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)} \log(m^{a_n}\mathrm{P}(Z_n = k_n)) = \frac{\nu}{2}\log p_1, \tag{4.9}$$

这里 $\nu = \min\{j \geqslant 1 : h_j > 0\}$. 此时 (4.8) 仍然成立.

1) Sun Q, Zhang M. Lower deviations for supercritical branching processes with immigration. Preprint, 2018

定理 4.5 [2)]　假定 $p_1 = 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} p_j \log j < \infty$, $\sum_{j=1}^{\infty} h_j \log j < \infty$. 定义 $\mu := \min\{j \geqslant 2 : p_j > 0\}$, $\nu := \min\{j \geqslant 1 : h_j > 0\}$, $b_n := \min\{l : m^l \mu^{n-l} \geqslant 2k_n\}$.

(1) 若 $h_0 > 0$, 则存在正常数 A_1 和 A_2 使得对满足 $k_n \geqslant \mu^n$ 但 $k_n = o(m^n)$ 的数列 $\{k_n\}$, 有

$$\begin{aligned} -A_1 &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu^{b_n - n} \log(m^n \mathrm{P}(Z_n = k_n)) \\ &\leqslant \limsup_{n\to\infty} \mu^{b_n - n} \log(m^n \mathrm{P}(Z_n = k_n)) \\ &\leqslant -A_2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

(2) 若 $h_0 = 0$, 并且 $\limsup_{n\to\infty} b_n/n \leqslant 1/2$, 则对于满足 $k_n \geqslant \mu^n + \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\nu$ 但 $k_n = o(m^n)$ 的数列 $\{k_n\}$, 有 (4.10) 成立.

(3) 若 $h_0 = 0$ 并且 $\liminf_{n\to\infty} b_n/n \geqslant 1/2$, 则存在正常数 A_3 使得对满足 $k_n \geqslant \mu^n + \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\nu$ 但 $k_n = o(m^n)$ 的数列 $\{k_n\}$, 有

$$\liminf_{n\to\infty} \mu^{-b_n} \log(m^n \mathrm{P}(Z_n = k_n)) \geqslant -A_3. \tag{4.11}$$

此时 (4.10) 的上界仍然成立.

致谢　此谨以此文致敬导师王梓坤院士, 恭祝王先生 90 华诞.

参考文献

1 Haldane J B S. Some statistical problems arising in genetics. J R Stat Soc Ser B Stat Methodol, 1949, 11: 1–9
2 Bartlett M S. An Introduction to Stochastic Processes. Cambridge: Cambridge University Press, 1955
3 Heathcote C R. A branching process allowing immigration. J R Stat Soc Ser B Stat Methodol, 1965, 27: 138–143
4 Heathcote C R. Corrections and comments on the paper “A branching process allowingimmigration”. J R Stat Soc Ser B Stat Methodol, 1966, 28: 213–217
5 Seneta E. The stationary distribution of a branching processes allowing immigration: A remark on the critical case. J R Stat Soc Ser B Stat Methodol, 1968, 30: 176–179
6 Seneta E. Functional equations and the Galton-Watson process. Adv in Appl Probab, 1969, 1: 1–42
7 Pakes A G. Branching processes with immigration. J Appl Probab, 1971, 8: 32–42
8 Yu S H, Wang D H, Chen X. Large and moderate deviations for the total population arising from a sub-critical Galton-Watson process with immigration. J Theoret Probab, 2018, 31: 41–67
9 Pakes A G. On the critical Galton-Watson process with immigration. J Aust Math Soc, 1969, 12: 476–482
10 Pakes A G. Further results on the critical Galton-Watson process with immigration. J Aust Math Soc, 1972, 13: 277–290
11 Athreya K B, Ney P E. Branching Processes. Berlin: Springer-Verlag, 1972
12 Li D D, Zhang M. Asymptotic behaviors for critical branching processes with immigration. Acta Math Sin Engl Ser, 2018, in press
13 Aliev S A. A limit theorem for Galton-Watson branching processes with immigration. Ukraïn Mat Zh, 1985, 37: 656–659
14 Kawazu K, Watanabe S. Branching processes with immigration and related limit theorems. Theory Probab Appl, 1971, 16: 36–54
15 Ispany M, Pap G, Van Zuijlen M C A. Critical branching mechanisms with Ornstein-Uhlenbeck type diffusions. Acta Sei Math (Szeged), 2006, 71: 821–850
16 Sriram T N. Invalidity of bootstrap for critical branching processes with immigration. Ann Statist, 1994, 22: 1013–1023
17 Wei C Z, Winnicki J. Some asymptotic results for the branching process with immigration. Stochastic Process Appl, 1989, 31: 261–282
18 Rahimov I. Functional limit theorems for critical processes with immigration. Adv in Appl Probab, 2007, 39: 1054–1069

2) Sun Q, Zhang M. Lower deviations for supercritical branching processes with immigration. Preprint, 2018

19 Guo H, Zhang M. A fluctuation limit theorem for a critical branching process with dependent immigration. Statist Probab Lett, 2014, 94: 29–38
20 Harris T E. The Theory of Branching Processes. Berlin: Springer, 1963
21 Harris T E. Branching processes. Ann Math Statist, 1948, 19: 474–494
22 Kesten H, Stigum B P. A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes. Ann Math Statist, 1966, 37: 1211–1223
23 Kesten H, Stigum B P. Additional limit theorems for indecomposable multidimensional Galton-Watson processes. Ann Math Statist, 1966, 37: 1463–1481
24 Heyde C C. Extension of a result of seneta for the super-critical Galton-Watson process. Ann Math Statist, 1970, 41: 739–742
25 Seneta E. On the supercritical Galton-Watson process with immigration. Math Biosci, 1970, 7: 9–14
26 Pakes A G. On supercritical Galton-Watson processes allowing immigration. J Appl Probab, 1974, 11: 814–817
27 Chu W, Li W V, Ren Y X. Small value probabilities for supercritical branching processes with immigration. Bernoulli, 2014, 20: 377–393
28 Heyde C C, Brown B M. An invariance principle and some convergence rate results for branching processes. Z Wahrscheinlichkeit Verw Gebiete, 1971, 20: 271–278
29 Nagaev A V. On estimating the expected number of direct descendants of a particle in a branching process. Theory Probab Appl, 1967, 12: 314–320
30 Ney P E, Vidyashankar A N. Harmonic moments and large deviation rates for supercritical branching processes. Ann Appl Probab, 2003, 13: 475–489
31 Pakes A G. Non-parametric estimation in the Galton-Watson process. Math Biosci, 1975, 26: 1–18
32 Liu J N, Zhang M. Large deviation for supercritical branching processes with immigration. Acta Math Sin Engl Ser, 2016, 32: 893–900
33 Sun Q, Zhang M. Harmonic moments and large deviations for supercritical branching processes with immigration. Front Math China, 2017, 12: 1201–1220
34 Fleischmann K, Wachtel V. Lower deviation probabilities for supercritical Galton-Watson processes. Ann Inst H Poincaré Probab Statist, 2007, 43: 233–255

Limit theorems of branching processes with immigration

Mei Zhang

Abstract In this paper, we introduce some references on the limit behaviors of Galton-Watson branching process with immigration in subcritical, critical and supercritical cases. Some research work and new progress of the author and collaborators are presented and discussed, including the large deviation and upper deviation for the branching processes with immigration in critical case; the harmonic moment, large deviation and lower deviation for the branching processes with immigration in supercritical case.

Keywords **branching process, limit theorem, immigration**

MSC(2010) **60J80, 60F10**

doi: 10.1360/N012018-00034