AD 与 $DG_{\aleph_1}$ 不相容

陈 练 寒

(葛洲坝水电学院基础部,宜昌 443002)

关键词 决定性公理、对策、策略

Solovay[1] 首先假定 AD_R 与 ZF 是协调的,然后用内模型的方法证明 DC 独立于 AD. 本文进一步探讨 AD 与相依选择公理之间的关系,我们知道 AD 蕴涵 $\neg$AC, 但是 AC 等价于 $(\forall K)DC_K$, 这里K是阿列夫 (Aleph), 并且 $\neg(\forall K)DC_K$ 当且仅当 $(\exists K)(\neg DC_K)$, 于是 AD 蕴涵 $(\exists K)(\neg DC_K)$, 那么这个K是什么? 本文将证明这个K正是$\aleph_1$,即 AD 与 $DC_{\aleph_1}$ 不相容; 又因为当 $\lambda > K$ 时,有 $DC_\lambda \to DC_K$, 于是对一切的 $K > \aleph_1$, 均有 AD 与 DC_K 不相容. 加上 Solovay 的结果, 这即解决了 AD 与广义相依选择公理之间的关系问题.

本文所用的记号和术语参见文献[1—7].

本文不用 AC, 只用 DC (即 $DC_{\aleph_0}$), 容易证明下述引理成立(证明略):

引理 1 对任意的集 X, 或者 $|X| \leqslant \aleph_0$ 或者 $|X| \geqslant \aleph_0$.

引理 2 $|{}^\omega\{0,1\}| = 2^{\aleph_0}$, 其中 ${}^\omega\{0,1\}$ 是 0 和 1 的所有无穷序列的集合.

引理 3 设A和B是任意的两集,如果$|A| \leqslant |B|$并且$|B| \leqslant |A|$, 则$|A| = |B|$.

引理 4 $|Z| = \aleph_0$, Z 是所有有理数的集合.

引理 5 $|P(Z)| = 2^{\aleph_0}$.

引理 6 $|R| = z^{\aleph_0}$, R 是所有实数的集合.

引理 7 任给一个可数序数 α, $\alpha < \omega_1$, 必定存在 Z 的一个良序子集 (良序关系为大小关系, $<$)与之同构.

为了叙述我们的结果,我们还要研究 DC_K 与 W_K 之间的关系,关于这一点,本文重证下述巳知的定理.

定理 $DC_K \to W_K$, K 是阿列夫.

证 对任意的集 X, 设 $S = X$, R 为 S 的二元关系. 如果 $\alpha < K$, 并且 $h = \langle x_\xi : \xi < \alpha\rangle$ 是 S 中元素的α序列. 由归纳假定, 这总能办得到, 因为$|X|$与小于K的阿列夫可以比较. 如果 $S \subseteq \mathrm{ran}(h)$, 则 $|S| = |X| \leqslant |\alpha| < K$, 这时序列$h$穷竭尽了$S$中的元素; 否则存在 $y \in S$, 使得 hRy 当且仅当 $y \notin \mathrm{ran}(h)$, 这也是办得到的, 因为α序列h没有穷竭尽S中的元素. 由于 DC_K 的条件满足,这样存在一一函数 $f: K \to S$, 即 $|S| \geqslant K$, 所以 W_K 成立.

定理 1 $ZF + DC_{\aleph_1} \vdash 2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$.

证 由上述定理,我们有 $DC_{\aleph_1} \to W_{\aleph_1}$, 即 $DC_{\aleph_1}$ 蕴涵对任意集 X, 或者$|X| \geqslant \aleph_1$或

本文 1991 年 9 月 18 日收到. 1992 年 2 月 19 日收到修改稿.

者 $|X| \leqslant \aleph_1$，由引理 2，有 $|{}^{\omega}\{0,1\}| = 2^{\aleph_0}$ 是不可数的，但是 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间无其它的阿列夫，这样如果 $2^{\aleph_0}$ 是阿列夫，则必有 $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$，可是 $2^{\aleph_0}$ 是阿列夫吗？并不知道，因此要证明 $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$ 成立，我们必须给出另一种作法，我们的作法如下：

设 $A = \{\langle B,<\rangle/(B\subseteq Z)\wedge(<$是 B 上的一个良序$)\}$，由于

$$\langle B,<\rangle \in P(\mathrm{Z}) \times P(\mathrm{Z}\times\mathrm{Z}),$$

故 $A\subseteq P(\mathrm{Z}) \times P(\mathrm{Z}\times\mathrm{Z})$，所以 A 是合理的集合．由引理 7，A 非空．

考虑下述两种情形：

(1) 如果 A 是可良序集，由于 $DC_{\aleph_1} \to W_{\aleph_1}$，于是或者 $|A| \leqslant \aleph_1$，或者 $|A| \geqslant \aleph_1$．我们指出 $|A| < \aleph_1$ 是不成立的，事实上，因为 $|A|$ 是阿列夫，如果 $|A| < \aleph_1$，则必有 $|A| \leqslant \aleph_0$，即 A 是可数集．由于 $B\subseteq \mathrm{On} \to \mathrm{ord}(\bigcup(B))$ 成立，设 $\beta = \mathrm{ord}(\bigcup(\bar{A}))$，这里 $\bigcup(\bar{A})$ 表示 A 中元素的序数的并，则 $\beta < \omega_1$，于是存在 $\gamma > \beta$ 使得 $\gamma < \omega_1$，由引理 7 必有某个良序子集 C^* 同构于 γ 且 $C^* \in A$，矛盾．所以 $|A| \geqslant \aleph_1$，故 $|P(\mathrm{Z})| \geqslant \aleph_1$，即 $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$．

(2) 不管 A 是否为良序集，我们直接应用 $DC_{\aleph_1}$．为此，设 $S = A$，R 是 S 上的二元关系，即良序集的序数的大小关系，如果 $\alpha < \omega_1$，并且 $h = \{C_\xi/\xi < \alpha\}$ 是 S 中元素的 α 序列；如果 $S\subseteq \mathrm{ran}(h)$，则 $|S| = |A| \leqslant |\alpha| < \aleph_1$，这时 α 序列穷竭尽了 S 中的元素，我们指出这种情形是不可能的．因为这时 $\mathrm{ord}(\bigcup(\bar{h})) = \beta$，$\beta < \omega_1$，这里 $\bigcup(\bar{h})$ 表示 h 中元素的序数的并，因此 $\bigcup(\bar{h})$ 是可数序数的可数并，仍然可数．由于 β 是可数序数，于是有可数序数 γ 使得 $\gamma > \beta$ 并且 $\gamma < \omega_1$，由引理 7，必有 Z 的某个良序子集 b^* 同构于 γ，所以 $b^* \in A = S$，这与 h 穷竭尽了 S 中的元素相矛盾．因此一定存在 $y\in S$，满足 hRy 当且仅当 $y \notin \mathrm{ran}(h)$ 这是办得到的，因为这时 α 序列没有穷竭尽 S 中的元素．由于 $\mathrm{DC}_{\aleph_1}$ 的条件满足，这样存在着一一函数 $f:\omega_1 \to S$．于是 $|S| \geqslant \aleph_1$，所以 $|P(\mathrm{Z})| \geqslant \aleph_1$，即 $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$．

定理 2　AD 蕴涵每个不可数的实数集的基数为 $2^{\aleph_0}$．

证　对策 G_X^* 的定义参见文献[5]第 555 页，设 $R = {}^{\omega}\{0,1\}$，如果 $X\subseteq R$ 并且 X 是不可数的，由文献[5]引理 43.5，II 没有赢的策略，由 AD 可知 I 赢，因此 I 有一个赢的策略 $\forall x\in R$，设 $x = \langle n_0, n_1, n_2, \cdots, n_i, \cdots\rangle$，由于 I 必定赢，故有 0-1 序列 D：

$$S_0^\frown n_0^\frown S_1^\frown n_1^\frown S_2^\frown n_2^\frown \cdots = y \in X,$$

这里 $S_0 = \sigma(\phi)$，$S_i = \sigma(\langle S_0^\frown n_0^\frown S_1^\frown n_1^\frown \cdots ^\frown S_{i-1}{}^\frown n_{i-1}\rangle)$，令 $y = f(x) \in \mathrm{R}$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，显然有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，故 $f(x)$ 是一一函数，因此 $f[\mathrm{R}]$ 的基数等于R 的基数 $2^{\aleph_0}$，由序列 D，我们有 $X \supseteq f[\mathrm{R}]$，于是有 $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$．又因为 $X\subseteq \mathrm{R}$，所以又有 $|X| \leqslant 2^{\aleph_0}$，由引理 3 得到 $|X| = 2^{\aleph_0}$．

定理 3　$\mathrm{ZF} + \mathrm{DC}_{\aleph_1} \vdash \neg \mathrm{AD}$．

证　由定理 1 可知 ω_1 等势于R 的一个不可数的子集，再由定理 2 可知 $\omega_1 = z^{\aleph_0}$，即我们证得

$$\mathrm{ZF} + \mathrm{DC}_{\aleph_1} + \mathrm{AD} \vdash 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

由 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 和定理 2 容易看出R 的每个子集的基数是阿列夫，所以R 的每个子集能良序，所以R 本身能良序，于是 $P(R)$ 有一个选择函数，应用这些，下面我们构造对策 G_A，使得 G_A 是不能决定的．

设 $\{\sigma_\alpha:\alpha < \omega_1\}$ 和 $\{\tau_\alpha:\alpha < \omega_1\}$ 分别枚举局中人 I 和 II 的所有策略．对于 $\alpha < \omega_1$，假

定我们已经定义了 X_β 和 Y_β，对所有 $\beta<\alpha$。如果 α 是极限序数，我们令

$$X_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta,\ Y_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}Y_\beta,$$

这里 $|X_\beta|\leqslant|\beta|$，$|Y_\beta|\leqslant|\beta|$，对所有 $\beta<\alpha$，如果 $\alpha=\beta+1$，我们构造 $X_{\beta+1}$ 和 $Y_{\beta+1}$ 如下：$\sigma_\beta*b=\{a_0,b_0,a_1,b_1,\cdots\}$，由于序列 $b=\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}\in{}^\omega\{0,1\}$，这样的序列 b 有 ω_1 个，于是存在 $b\in{}^\omega\{0,1\}$ 使得 $\sigma_\beta*b\notin X_\beta$，在R的良序中，选择一个最小的这样的 $b\in{}^\omega\{0,1\}$，满足 $\sigma_\beta*b\notin X_\beta$，令 $Y_{\beta+1}=Y_\beta\cup\{\sigma_\beta*b\}$；类似地存在 $a\in{}^\omega\{0,1\}$ 使得 $a*\tau_\beta\notin Y_{\beta+1}$，我们选择最小的这样的 $a\in{}^\omega\{0,1\}$，令 $X_{\beta+1}=X_\beta\cup\{a*\tau_\beta\}$。设 $X=\bigcup_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$，则 G_X 是不能决定的。事实上，若 I 能必赢，则 I 有策略 σ 能使对每一 $b\in{}^\omega\{0,1\}$ 都有 $\sigma*b\in X$，设此 σ 为上述枚举中的 σ_β，则由 $Y_{\beta+1}$ 的定义知存在 $b_1\in{}^\omega\{0,1\}$ 使得 $\sigma_\beta*b_1\in Y_{\beta+1}$，从而容易看出 $\sigma*b_1\notin X$，这与上述矛盾；同样地，若 II 能赢，由定义则有某个 $\beta<\omega_1$ 和存在 $a_1\in{}^\omega\{0,1\}$ 使得 $a_1*\tau_\beta\notin X$，这与 $X_{\beta+1}=X_\beta\cup\{a_1*\tau_\beta\}$ 相矛盾。因此 AD 不成立，这样我们得到

$$\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}_{\aleph_1}+\mathrm{AD}\vdash\neg\mathrm{AD},$$

即

$$\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}_{\aleph_1}\vdash\mathrm{AD}\to\neg\mathrm{AD}.$$

因为

$$\mathrm{AD}\to\neg\mathrm{AD}=\neg\mathrm{AD},$$

所以

$$\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}_{\aleph_1}\vdash\neg\mathrm{AD}.$$

于是我们证得 $\mathrm{ZF}+\mathrm{DC}_{\aleph_1}+\mathrm{AD}$ 不和谐.

推论 AD 与 AC 不相容.

证 当 $K>\aleph_1$ 时，AD 与 DC_K 不相容；又由 $\mathrm{AC}\to\mathrm{DC}_K$，即得证.

参 考 文 献

[1] Solovay, R. M., The independence of DC from AD in Cabal Seminar 76—77, *Lecture Notes in Mathematics* 689, Springer-Verlag, 1978, 171—184, 423.

[2] 王世强,模型论基础,科学出版社，1987.

[3] 张绵文,公理集合论导引,科学出版社，1991.

[4] Jech, T., *The Axiom of Choice*, North-Holland Publishing Company, 1973.

[5] Jech, T., *Set Theory*, Academic Press, New York, 1978.

[6] Shelah, S., Proper forcing *Lecture Notes in Mathematics* 940, Springer-Verlag, 1982.

[7] Cohen, P. J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Benjiamin, New York, 1966.