

环、mesh 嵌入 $RP(k)$ 网络*

刘方爱^{1**} 刘志勇² 张永胜¹

(1. 山东师范大学信息管理学院, 济南 250014; 2. 国家自然科学基金委员会, 北京 100085)

摘要 基于 $RP(k)$ 互连网络, 首先讨论了该网络的拓扑性质, 证明了 $RP(k)$ 网络是一个 Hamilton 图. 然后, 重点研究了将环和二维 mesh 嵌入该互连网络的算法. 构造性的证明了 $10 \times k$ 的环可以嵌入 $RP(k)$ 网络, 且四个性能参数都为 1. 考虑到网络的容错情况, 当 $RP(k)$ 网络中每个片有一个节点出现故障时, 去掉故障节点和相应的边, 得到互连网络 $RP-1(k)$, 该网络也是 Hamilton 图. 然后讨论了将二维 mesh 嵌入 $RP(k)$ 网络的方法, 定义了顺序列嵌入、迂回列嵌入和最短路径映射, 并设计了嵌入算法. 该嵌入算法的性能如下, 若 a 是二维 mesh 最小一维的长度, 按照迂回列嵌入方式, 当 $a=1, 2, 3, 4, 5$ 时, 其延伸分别为 1, 2, 3, 3, 2, 拥挤度分别为 1、3、4、5、3; 当 $5 < a < 10$ 时, 按照顺序列嵌入方式, 延伸=3, 拥挤度 ≤ 6 ; 当 $a > 10$ 时, 其延伸= $\lceil a/10 \rceil + 2$, 拥挤度= $\max\{\lceil a/10 \rceil, 6\}$; 当 $a=10$ 时, 四个参数都为 1. 研究结果表明, $RP(k)$ 网络具有简单的拓扑性质, 很强的容错能力, 并且环和 2-D mesh 可以高效地嵌入该网络.

关键词 互连网络 $RP(k)$ 网络 网络嵌入 Hamilton 回路 延伸 拥挤度

1 引言

互连网络作为并行机体系结构的一个热点问题, 受到人们普遍的重视, 研究者设计了多种互连网络拓扑结构^[1-4]. 本文以 $RP(k)$ 网络为基础, 讨论如何将环、二维 mesh 嵌入该互连网络. $RP(k)$ 是文献^[3]中设计的互连网络, 和环、Mesh 互连网络相比, 它有许多优良的性质. 其连接度是 5, 直径为 $\lceil k/2 \rceil + 2$. 该网络继承了环网络拓扑结构简单的性质, 因而其路由策略便捷, 实现容易. 同时, 和 2-D mesh 相比, $RP(K)$ 网络具有较高的路由效率. 当网络的节点个数不超过 300 时, $RP(k)$ 网络具有比 2-D Mesh 短的多网络直径^[3], 因此, 其通信效率优于 2-D

2004-06-24 收稿

* 国家自然科学基金(批准号: 60373063)和山东省自然科学基金(批准号: Y2002G03)支持

** E-mail: lfa9125@beelink.com.cn

mesh. 考虑到目前的硬件技术及硬件技术的发展, 在一个网络节点中可以设置数个至十几个处理器, 构成SMP结构, 在相当大的范围内(系统包含数十至数千个处理器), RP(k)网络将在通信开销上具有显著的优越性. 在这个范围内, 其通信的效率高于用Mesh互连网络所得到的系统的通信效率. 因此, RP(k)网络可以为并行和分布计算机系统提供高效的和实用的通信工具. 在文献[3]中, 我们详细讨论了该网络的拓扑性质, 设计了相关的路由算法, 其重点放在 One-to-all, All-to-all, Broadcast和Permutation等集群通信的路由算法.

本文重点讨论网络的嵌入问题. 我们知道, 一方面, 在一些互连网络上已经设计了大量的算法, 这些算法能否在另一个互连网络上高效的运行? 这是研究者普遍关心的问题. 如果我们能够将某互连网络上的算法灵活、高效地移植到另一新的互连网络上运行, 那么就可以极大地节省在新互连网络上研制算法的时间, 这就涉及到网络嵌入问题. 如果我们能够将一个源互连网络嵌入到另一个目的互连网络, 那么在源互连网络上已有的算法不需修改就可以在目的互连网络上运行. 另一方面, 一个并行任务的静态结构可以归结为一个任务图, 其节点代表子任务, 其边代表子任务间的通信. 当该任务要在并行计算机上运行时, 必须将其任务图嵌入到互连网络中, 高效率的嵌入会提高并行程度的运行效率. 因此, 互连网络上的嵌入问题引起研究者的广泛兴趣^[5-10].

网络嵌入的效率有四个参数来评价, 即: 负载(load)、拓展(expansion)、延伸(dilation)和拥挤度(congestion). 如果它们的值都是 1, 这表明算法的运行效率和在源网络上的运行效率完全相同.

本文的研究集中在两方面, 一方面我们进一步发现了 RP(k)网络的一些拓扑性质, 尽管 Petersen 图不是 Hamilton 图(H 图), 但我们证明, RP(k)网络是 H 图. 另一方面, 我们重点设计了将环、2-D mesh 嵌入 RP(k)网络的算法, 并分析了这些嵌入算法的性能. 研究结果表明, RP(k)网络具有简单的拓扑性质, 环和 2-D mesh 可以高效的嵌入该网络, 并且 RP(k)网络具有很强的容错能力.

2 RP(k)网络及网络嵌入

在文献[3]中, 基于Petersen图, 我们构造了RP(k)网络. 因此, 本节我们先分析Petersen的性质, 然后, 介绍RP(k)网络和网络嵌入的概念, 为后面的讨论打下基础.

2.1 Petersen 图及其性质

如图 1 所示, Petersen 图有许多良好的性质:

- ① Petersen 图的度是 3;
- ② Petersen 图的直径是 2, 即两个顶点或者直接相连, 或者通过第三顶点相

连;

③Petersen 图是关于顶点对称的.

以上性质比较直观, 通过观察图 1 就可以得到.

④Petersen 图的任意两个节点之间存在三条无交的路; 若两点直接相连, 则这三条路的长度分别为 1、4、4, 否则这三条路的长度分别为 2、3、3.

以上性质非常重要, 它是我们设计网络和路由算法的基础. 若以 Petersen 图作为并行机的互连网络, 会得到非常好的连接性, 其最大直径不超过 2, 但是, 该结构无法扩展.

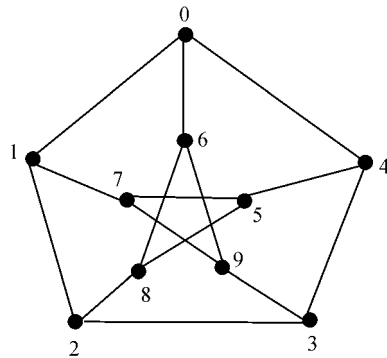


图 1 Petersen 图

2.2 RP(k)的结构

我们将环的简单性和 Petersen 图的可连接性结合在一起, 构造互连网络 RP(k).

① RP(k)的构造

一个互连网络 RP(k)由 $10 \cdot k$ 个节点组成, 每个节点放一个处理器, 每 10 个节点组成一片, 一片内按照 Petersen 图互连在一起, 片内节点按照 0, 1, ..., 9 编号(见图 1). k 个 Petersen 图按照以下办法连接: 不同片内编号相同的顶点按照环的结构互连在一起, 共 10 个环, 称为环 0、环 1、...、环 9.

② RP(k)的编址

RP(k)采用如下的编址方式, 每一个节点由两部分 (m, n) 决定, 其中 m 是片的编号, $0 \leq m \leq k-1$, n 是片内编号 $0 \leq n \leq 9$.

2.3 网络的嵌入

互连网络的嵌入问题可以抽象为图的嵌入问题. 已给一个主图 $G(V, E)$ 和一个客图 $G_1(V_1, E_1)$, 将客图 G_1 嵌入主图 G 是指存在两个映射 ψ 和 λ , 其中:

$\psi: V_1 \rightarrow V$, $\lambda: E_1 \rightarrow \text{Path}(E)$, 这里 $\text{Path}(E)$ 为图 G 中路的集合, 且满足如下条件: 任意的 $e=(a, b) \in E_1$, $\lambda(e)$ 指定一条由 $\psi(a)$ 到 $\psi(b)$ 的路. 图嵌入问题的性能由 4 个参数来评价, 它们是拓展、负载、延伸和拥挤度, 各个参数的含义如下:

拓展是两个图顶点个数之比, 即 $|V_1|/|V|$; 对于 V 中任一点 v , 记 $\text{num}(v)$ 为满足 $\psi(u)=v$ 的 V_1 中节点 u 的个数, 那么负载是所有 $\text{num}(v)$ 的最大值; 对于 V_1 中任意一条边 e , λ 将其影射为 G 中的一条路, 延伸定义为这些路长度的最大值; 对于 G 中每一条边 e , 在 G_1 中可能存在多条边, 使其 λ 的映射像经过边 e , 那么拥挤度

是 λ 映射经过每一条边路数的最大值.

3 环嵌入 $RP(k)$ 网络

现在我们讨论如何将 $10 \times k$ 个节点的环嵌入 $RP(k)$ 网络. 虽然 Petersen 图不是 H 图, 但我们将证明 $RP(k)$ 网络是一个 H 图. 为此先给出如下引理:

引理 1 Petersen 图不存在 H 回路, 因此不是 H 图.

引理 2 在 Petersen 图中, 任何两个不相邻的节点 a, b 之间都存在一条 H 路.

引理 2 的证明可以通过枚举所有节点间的路来获得. 由于 Petersen 是对称图, 我们只需列举与节点 0 不相邻节点之间的 H 路即可, 与节点 0 不相邻的节点有 2, 3, 5, 7, 8, 9. 其 H 路分别为: 0—2: 0, 1, 7, 9, 6, 8, 5, 4, 3, 2; 0—5: 0, 4, 3, 2, 1, 7, 9, 6, 8, 5; 0—8: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 6, 8. 其中, 0-3、0-7 和 0-9 之间 H 路的构造方法分别与 0-2、0-5 和 0-8 的 H 路的构造方法类似.

在此引理的基础上, 我们给出定理 1.

定理 1 当 $k > 1$ 时, $RP(k)$ 网络是一个 H 图.

证 我们分 k 为偶数和奇数两种情况来讨论, 并给出构造性的证明.

当 k 为偶数时, 可以按表 1 所示过程来构造每一片中的 H 路, 并进而用它们来构造整个 $RP(k)$ 网络的 H 回路.

表 1 k 为偶数时构造环的过程

片	开始节点	终止节点	H 路
0	0	8	0—8
1	8	0	8—0
...	...	...	...
$k-2$	0	8	0—8
$k-1$	8	0	8—0

由于节点 0 和 8 是不相邻的节点, 由引理 2 知, 它们之间存在一条 H 路. 在表 1 中, 我们从片 0 开始, 构造节点 0 到 8 的 H 路, 然后经过环 8 到达片 1; 在片 1 中构造由节点 8 到节点 0 的 H 路, 并由环 0 到达片 2; 重复以上过程, 直到我们在片 $(k-1)$ 内, 得到 H 路 8—0, 最后由环 0 连接片 0 和片 $(k-1)$ 的 0 节点. 这样, 在 $RP(k)$ 中也就得到了一条 H 回路, 它包含了所有节点.

当 k 为奇数时, 节点对 $(0, 8)$, $(8, 3)$ 和 $(3, 0)$ 都是不相邻的节点对, 由引理 2 知, 我们可以在片 0、片 1 和片 2 内分别构造 0—8、8—3 和 3—0 间的 H 路, 并由环 8 和环 3 将这三条路连接起来. 剩下的 $k-3$ 个片为偶数, 可以按照上面介绍的方法构造 H 路, 最后由环 0 将它们连接起来, 得到一条 $RP(k)$ 网络的 H 回路.

定理 2 当 $k > 1$ 时, $10 \times k$ 个节点的环可以嵌入 $RP(k)$ 网络中, 四个参数即拓展、延伸、负载和拥挤度都为 1.

作为该定理的一个特殊情况, 若 $k=1$, RP(1)脱变为 Petersen 图, 由引理 2 知, Petersen 图中不存在 H 回路, 但存在 H 路. 这时, 我们也可以将一个 10 个节点的环嵌入到 RP(1)网络, 使得拓展、负载两参数为 1, 而延伸、拥挤度为 2.

网络的容错性是一个重要的性质, 下面给出 RP(k)网络更健壮的一个性质. 假设在 RP(k)网络中, 每一个片有一个节点出现故障, 考虑环的嵌入问题. 先考虑一种特殊情况, 即在每一个 Petersen 图中, 编号相同的节点出现故障. 这时, 我们有下面的结果:

引理 3 在一个 RP(k)网络中, 若每个 Petersen 图中有一个编号相同的节点出现故障, 那么, 该 RP(k)图仍是 H 图; 因此, 可以将 $9*k$ 个节点的环嵌入到该互连网络, 使其四个参数都是 1.

因为 Petersen 图是关于节点对称的, 不妨假设节点 6 出现故障, 见图 2. 在这种情况下, 图 2 是 H 图, 因为 1, 7, 9, 3, 2, 8, 5, 4, 0, 1 是一条回路, 这样, 在 k 个片中, 我们得到 k 条 H 回路. 下面, 我们从片 0 开始, 逐步将相邻的片进行合并, 最终得到一个大环, 它包含 k 个片上的所有节点.

很明显, 我们可以构造第 0 个片的 H 回路, 假设第 i 片已经合并到已构造的环中. 取第 i 条 H 回路上相邻两节点 m, n , 它们也是第 $(i+1)$ 条 H 回路上相邻的两节点, 在这两条 H 路上去掉边 (m, n) , 增添环 n 和环 m 上从片 i 到片 $(i+1)$ 的两条边, 这样就得到一个大环, 它包含前 $(i+1)$ 个片上的所有节点. 重复以上过程, 直到将环 $(k-1)$ 添加到整个环上为止, 该环包含 k 个片上的所有节点. 这样, 就得到带故障节点的 RP(k)网络的一条 H 回路, 因此, 我们仍然可以将一个含 $9*k$ 个节点的环嵌入到带有故障节点的 RP(k)网络中.

在引理 3 的证明中, 我们使用了如下引理.

引理 4 在 Petersen 图中去掉一个节点, 那么所得到的图存在 H 回路; 并且任何两个相邻节点之间都可以构造 H 路.

该引理的前一部分可以由引理 3 的证明得到, 其后一部分可以通过枚举所有 H 路而验证, 在此省略. 下面, 我们给出引理 3 的一般结果, 即每个片中有有一个节点出现故障, 但各片中的故障节点编号不必相同.

定理 3 在一个 RP(k)网络中, 若每个 Petersen 图中有一个节点出现故障, 去掉出现故障的节点和相应的边, 得到互连网络 RP-1(k), 那么 RP-1(k)仍然存在 H 回路; 因此, 一个 $9*k$ 个节点的环可

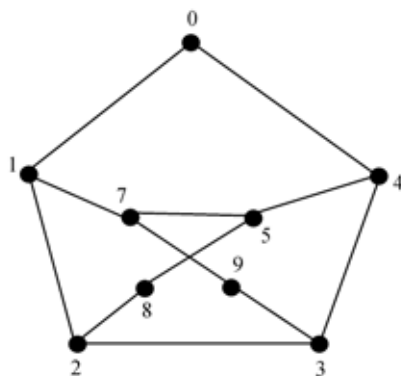


图 2 节点 6 出现故障

以嵌入到 $RP-1(k)$ 网络中, 其拓展、延伸、负载和拥挤度都为 1.

证 该定理分两部分, 我们首先证明在 $RP-1(k)$ 中存在一条 H 回路. 由引理 4 知, 在第 0 个片内, 可以构造一条 H 回路, 记为:

$$m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_0 \text{ 其中 } 0 \leq m_i \leq 9.$$

可以这样扩大这个环, 考虑当前片和下一个片, 由于这两个片各缺少一个节点, 在当前片的 H 路中取一条边 (m_i, m_j) , 使得节点 m_i, m_j 在下一片中也不是故障节点, 由于两个片中各缺少一个节点, 因此这是可以办到的. 由引理 4 知, 在新的片中我们可以构造从 m_i 到 m_j 的 H 路, 然后, 可以将该 H 路添加到已经生成的环中. 其方法如下: 在已有的环中去掉边 (m_i, m_j) , 沿 m_i 和 m_j 环到达下一片, 这样就得到了一条 H 回路. 通过这样的方法, 我们可以逐步构造 H 回路, 得到整个 $RP-1(k)$ 的 H 回路.

定理的第二部分即从环向 $RP-1(k)$ 网络的可嵌入性质是第一部分的直接结果.

由定理 3 我们可以得到如下推论:

推论 1 任何 m 个带有一个故障节点的邻接片均可以构造 H 回路.

这是一个非常好的结果, 它刻画了 $RP-1(k)$ 网络的性质, 即 $RP-1(k)$ 中任意 m 个连续的片都可以构造 H 回路.

下面是一个更一般的结果, 我们忽略其证明.

定理 4 在一个带有故障节点的 $RP(k)$ 网络中, 去掉故障节点和相应的边后, 若在每一个片中存在一条 H 回路, 且在该 H 回路上存在一条边 (m_i, m_j) , 该边也是下一个相邻的 H 回路上的一条边, 那么该图仍然是一个 H 图.

4 二维 mesh 嵌入 $RP(k)$

现在讨论将二维 Mesh $M_1(a, b)$ 嵌入 $RP(k)$ 网络的算法.

4.1 由 Mesh 到 $RP(k)$ 的映射

为了将二维 mesh 嵌入 $RP(k)$ 网络, 我们先给出一个事实.

定理 5 在 $RP(k)$ 网络中, 存在一个 $10 \times k$ 的二维 mesh.

证 由引理 2 知, Petersen 图中存在 H 路, 例如, 取 H 路为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 6, 8. 我们也知道, 所有片中编号为 i 的节点在 $RP(k)$ 网络中构成一个环, 称为环 i . 这样, 环 i 作为行, H 路作为列就构成了一个 $10 \times k$ 的 2-D mesh. 记该 mesh 为 $M(10, k)$.

将一个 2-D mesh 嵌入到另一个 2-D mesh 的嵌入算法已有不少讨论, 可以参阅文献[5~8]. 为了讨论将 mesh 嵌入 $RP(k)$ 网络的算法, 我们先定义如下映射.

① Mesh M_1 到 $RP(k)$ 网络的节点映射

为了定义节点之间的映射, 对于已给的二维 mesh $M_1(a, b)$, 引入节点之间的

一种排列方式.

记

$$L_{a,b} = \{(0,b), (1,b), \dots, (a-1,b)\}, \quad L_{a,b}^r = \{(a-1,b), (a-2,b), \dots, (0,b)\}$$

$$L^r = L_{a,0} \# L_{a,1}^r \# L_{a,2} \# L_{a,3}^r \# \dots \# L_{a,b-1}^*, \quad L = L_{a,0} \# L_{a,1} \# L_{a,3} \# \dots \# L_{a,b-1},$$

$$\text{其中 } L_{a,b}^* = \begin{cases} L_{a,b}^r & \text{当 } b \text{ 为奇数时,} \\ L_{a,b} & \text{当 } b \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

在这里, # 为连接运算符. 我们称序列 L 为二维 mesh $M_1(a, b)$ 的顺序列方式, 而 L^r 为迂回列方式. 如果将 2-D mesh M_1 和 $M(10, k)$ 的节点都按照顺序列方式(迂回列方式)排列, 就得到了 M_1 和 M 两个节点序列. 在两个序列中, 下标相同的两个元素建立 1-1 对应关系, 这样就定义了从 $M_1(a, b)$ 到 RP(k)网络节点之间的一一对应映射, 称为顺序列映射(迂回列映射), 它们都记为 ψ . 注意, 在迂回列映射中, $M(10, k)$ 的每一列是一个 Petersen 图的 H 路, 这些 H 路在 RP(k)网络中通过环 0 或环 8 连接起来. 下面, 我们再来定义边的嵌入映射.

②最短路径映射

现在我们定义从 $M_1(a, b)$ 到 RP(k)网络边间的映射. 设 (x, y) 是 M_1 中的一条边, x, y 是 M_1 中的两个点. 那么, 按照上面节点间的映射 ψ , 假设 x, y 分别对应于 RP(k)网络中的 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 两点.

(a) 若 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 在同一 Petersen 图中, 即 $i_1 = i_2$, 定义边 (x, y) 对应于 Petersen 图中由节点 (i_1, j_1) 到节点 (i_2, j_2) 的最短路径, 它是惟一的.

(b) 若 (i_1, j_1) 和 (i_2, j_2) 不在同一片中, 我们定义边 (x, y) 对应的路为: 首先从节点 (i_1, j_1) 开始沿着环 j_1 到达 (i_2, j_1) , 然后在片 i_2 内, 沿最短路径到达节点 (i_2, j_2) .

我们称上面的映射为最短路径映射, 记为 λ . 为了分析将 M_1 嵌入 RP(k)网络的性能, 我们先证明如下引理:

引理 5 Petersen 图中的任何一个置换路由至多需要 4 次通信完成, 且完成一个置换路由后, 每条边至多使用 4 次.

证 置换路由是指每个节点向另外一个节点发送消息, 且每个节点只能接受一个消息, 因此, 这种消息的发送是节点间的一个置换. 考虑两种发送策略, 即在同一时刻, 各个节点都向编号大(小)的节点发送数据. 分析在每一种情况下, 每条边使用的次数. 表 2 列出了各个节点分别向编号大(小)的节点发送数据后所能够到达的节点.

表 2 节点按由小到大(或由大到小)发送数据能够到达的节点

节点	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
由小到大	1, 4, 6	2, 7	3, 8	4, 9	5	7, 8	8, 9	9		
由大到小		0	1	2	3, 0	4	0	1, 5	2, 5, 6	3, 6, 7

由表 2 和 Petersen 图可以得到, 每个节点都沿由小到大(由大到小)方向发送数据时, 不会发生边的冲突. 我们设计一个置换路由算法, 该算法在每一个节点上分别按“由小到大”、“由大到小”、“由小到大”和“由大到小”的方向向相邻节点发送数据, 这些相邻节点可能是置换的目标节点或者是发送节点和目标节点的公共邻接点. 经过这样四次发送后, 实现了置换路由. 由于在算法的每一步都不会发生冲突, 因此每条边至多使用 4 次.

现在我们考虑将二维 mesh $M_1(a, b)$ 嵌入 $RP(k)$ 网络的算法, 设 M_1 的大小为 $a*b$, 分如下情况进行讨论.

4.2 $\min\{a, b\} \leq 10$ 时的嵌入算法

(1) 当 $\min\{a, b\} \leq 10$ 且 $\max\{a, b\} \leq k$ 时的情况

不妨假设 a 小于 10, 在这种情况下, 定义 $M_1(a, b)$ 到 $RP(k)$ 的嵌入映射如下:
 $M_1(a, b)$ 中的节点 (i, k) 对应于 $M(10, k)$ 中的节点 (i, k) .

$M_1(a, b)$ 中任意一边 $((i, k), (m, n))$ 对应于边 $((i, k), (m, n))$. 这样我们有定理 6.

定理 6 在 $a*b$ 的 2-D mesh $M_1(a, b)$ 中, 若 $a \leq 10, b \leq k$, 则该 mesh 能够嵌入 $RP(k)$ 网络, 且负载、延伸和拥挤度都为 1. 特别地, 若 $a=10$, 则二维 mesh 能够嵌入 $RP(b)$, 满足: 负载、延伸、拓展和拥挤度都为 1.

(2) 当 $\min\{a, b\} \leq 10$ 且 $k = \lceil a*b/10 \rceil$ 时的情况

为了下面的分析, 我们先给出 Petersen 图的一个性质.

引理 6 在 Petersen 图中, 设 $\{x_1, x_2, \dots, x_j\}$ 和 $\{y_1, y_2, \dots, y_j\}$ ($j=1, 2, 3, 4, 5$) 是两个节点的集合, 且 $\{x_1, x_2, \dots, x_j\} \cap \{y_1, y_2, \dots, y_j\} = \emptyset$. 考虑从 x_i 到 y_i 的最短路径, 共 j 条路, 那么, 这 j 条路经过 Petersen 图的任何一条边至多两次.

证 由于 Petersen 图是对称图, 因此只需讨论经过一条边的路径即可. 经过边 $(0, 4)$ 且长度不超过 2 的最短路为: $0-4$ 、 $6-4$ 、 $1-4$ 、 $4-0$ 、 $3-0$ 、 $5-0$. 由于路的起点和终点无交, 上面的 6 条路至多剩下两条路, 因此, 至多可能由两条路通过该边, 引理得证.

在上面的讨论中, 没有考虑参数“拓展”, 现在我们考虑该参数. 取 $k = \lceil a*b/10 \rceil$, 且 $a \leq 10$, 考虑将 $a*b$ 的 2-D mesh 嵌入 $RP(k)$ 的情况, 分两种情况讨论.

① 当 $a \leq 5$ 时

在这种情况下, 对 2-D Mesh M_1 和 $M(10, k)$ 都采用迂回列方式, 得到迂回列映射 ψ . 现在分析该嵌入方式的性能. 记 $r = (a*b \bmod 10)$, 很明显有:

负载 = 1, 拓展 $= (10*k)/(a*b) = 1 + (10-r)/(a*b) \leq 1 + 10/(a*b)$.

由于 $a \leq 10$, 将 M_1 上的多列元素嵌入一条 H 路后, M_1 中的边可以分为两类. 第一类边是在 M_1 的迂回列排列中相邻节点之间的边, 每一条这样的边被映射到 H 路上的一条边, 其映射像的长度为 1; 第二类边是 M_1 中相邻两列之间的边, 但

不包括第一类已经出现的边. 这些边的两个顶点被映射到同一或相邻 H 路中的两个顶点, 它们之间的最短路径就是该边的映射像. 当该边的两个顶点被映射到相邻的两条 H 路上时, 按照最短路映射的定义, 从映射像的一个顶点开始, 经过一条环边可以到达映射像另一个顶点所在的片, 而在同一 H 路内, 其最短路长度至多为 2. 因此该类边的映射像的最大长度至多为 3, 即延伸=3.

现在, 我们分析其拥挤度.

当 $a=1$ 时, 非常明显, 将 $M(10, k)$ 按照迂回列方式排列, 和一维数组建立 1-1 对应的映射, 我们有拥挤度=1.

图 3 中画出了 $a=2, 3, 4$ 时的嵌入情况. 黑点代表一条 H 路中的最后一个节点, 而圆圈代表一条 H 路上的第一个节点. 不带任何符号的边为第一类边, 而带有 $\sqrt{\quad}$ 或 $\times$ 号的边为第二类边, 其中, 带有 $\times$ 号边的两端点被映射到同一 H 路上, 而带有 $\sqrt{\quad}$ 边的两端点被映射到相邻的 H 路. 注意, 在 Petersen 图中, 采用的 H 路为: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 6, 8.

当 $a=2$ 时, 见图 3(b). 按照迂回列映射定义, 第二类边在第 0 个片上映射像为: 0-3, 2-5, 4-9, 7-8, 在其他片上的映射像与此相同, 另外带 $\sqrt{\quad}$ 的边为 6-6 和 1-1, 即相邻 H 路上两个节点 1 和两个节点 6 之间的连接. 可以验证, 这些路在 Petersen 图上只多经过同一条边两次, 再加上 H 路, 那么当 $a=2$ 时, 拥挤度=3. 由于带 $\sqrt{\quad}$ 的边是 6-6 和 1-1, 可以直接由环边到达, 因此我们有延伸=2.

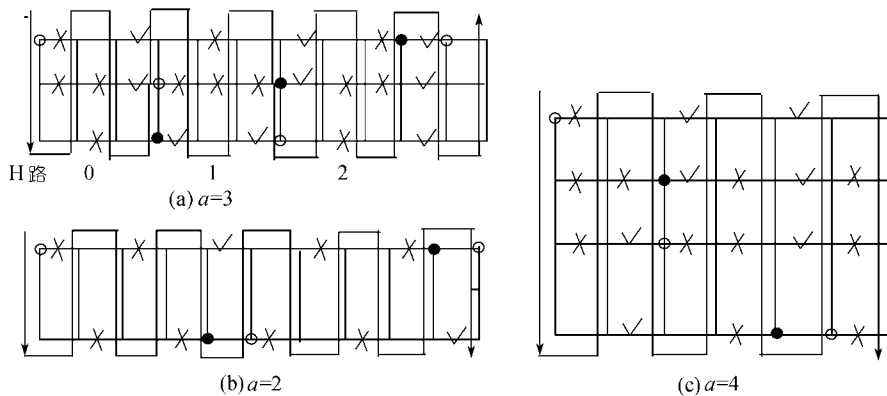
当 $a=3$ 时, 见图 3(a). 第二类边在 0 片上的映射像为: 0-5, 1-4, 4-9, 3-6, 8-9, 6-7, 8-5, 在 1 片上的映射像为: 0-3, 2-9, 3-7, 7-8, 4-0, 0-2, 1-3, 在 2 片上的映射像为: 1-7, 2-5, 5-6, 4-8, 在其他片上会重复前三个片所对应的路. 在上面三个片上, 验证所有映射像, 得知, 在任何片上第二类边的映射像经过某一条边至多 3 次, 再加上 H 路, 因此, 我们有: 拥挤度=4, 延伸=3.

当 $a=4$ 时, 见图 3(c). 第二类边在 0 片上的映射像为: 1-7, 0-9, 2-5, 7-8, 5-8, 4-6, 6-4, 5-8, 在 1 片上的映射像为: 7-8, 5-2, 7-1, 9-0. 可以验证, 这些路在一条边上至多重 4 次, 再加上 H 路使用边一次, 这样拥挤度=5, 延伸=3.

当 $a=5$ 时, 按照迂回列映射, M_1 中相邻两列或者映射到同一 H 路中, 或者映射到相邻的两条 H 路中且其第二类边由环边直接连接. 当 M_1 中相邻两列映射到 $M(10, k)$ 中相邻的两条 H 路时, 其边的映射像长度为 1; 当 M_1 中相邻两列映射到同一 H 路上时, 两列之间的连接由如下路径实现: 0-8、1-6、2-9、3-7 和 4-5, 由引理 6 知, 这些路径至多经过每条边两次, 再加上一条 H 路, 这样拥挤度=3, 延伸=2.

②当 $5 < a < 10$ 时

当 $5 < a < 10$ 时, 对于 $M_1(a, b)$ 和 $M(10, k)$, 我们都采用顺序列映射. 和前面的讨论类似, 可以得到: 负载=1, 拓展 $< 1 + 10/(a*b)$, 延伸=3. 现在, 我们来分析拥挤度.

图 3 $a=2, 3, 4$ 时的嵌入示例

采用顺序列映射后, 考察 M_1 中第二类边的映射像, 我们需从当前 H 路中的相关节点出发, 沿环路到达上一 H 路, 在该 H 路所在的 Petersen 图中, 实现由 a 个节点到另外 a 个节点的路由. 由引理 5 知, 每条边至多使用 4 次. 另外, 由于采用顺序列映射方式, H 路上的最后一个节点与下一 H 路的第一个节点可能有一条边, 这样在当前 H 路所在的 Petersen 图中可能多使用一次边, 再加上 H 路要使用一次边, 因此, 每条边至多使用 6 次. 这样, 拥挤度 ≤ 6 . 如果采用迂回列排列方式, 那么 H 路上最后一个节点与下一 H 路上第一个节点间的边可以由环边直接连接, 但是, 在 M_1 第二类边的映射像中, 可能存在两条终点(起点)相同的路, 这样, 在一个 Petersen 图中, 经过某一边的路就可能超过 4 条, 最多为 6 条.

4.3 当 $a, b > 10$ 时, mesh 嵌入 $RP(k)$ 的算法

(1) 直接嵌入法

当 $a, b > 10$ 时, 不妨设 $a = \min\{a, b\}$, 记 $m = \lceil a/10 \rceil$, 那么 mesh 的每一列共 a 个元素, 占 $RP(k)$ 中相邻的 m 条 H 路, 这 m 条 H 路中的节点按照列迂回排列, 和 M_1 的一列建立了一一对应的映射, H 路中没用到的节点闲置. M_1 到 $M(10, k)$ 边间的映射采用最短路径映射. 按照最短路径映射的定义, M_1 中同一列上的一条边映射到 $M(10, k)$ 中的一条边, 因而其映射像长度为 1. 而 M_1 中同一行上的一条边映射到 $M(10, k)$ 中某一行上的一条路, 路的长度为 $\lceil a/10 \rceil$. 这样, 我们有:

定理 7 在 $a \times b$ 的二维 mesh 中, 若 a, b 都大于 10, 且 $k \geq (\lceil a/10 \rceil * b)$, 则该 mesh 能够嵌入 $RP(k)$ 网络, 且负载=1, 延伸= $\lceil a/10 \rceil$ 和拥挤度= $\lceil a/10 \rceil$.

(2) 当 $k = \lceil a \times b / 10 \rceil$ 时的嵌入算法

定理 8 在 $a \times b$ 的二维 mesh 中, 若 a, b 都大于 10, 且 $a \leq b$, 取 $k = \lceil a \times b / 10 \rceil$, 则该 mesh 能够嵌入 $RP(k)$ 网络, 且负载=1, 延伸= $\lceil a/10 \rceil + 2$, 拥挤度= $\max\{\lceil a/10 \rceil,$

6}, 拓展 $<1+10/(a*b)$.

证 设二维 mesh $M_1(a, b)$ 和 $M(10, k)$ 都按照顺序列方式排列, 顺序列映射产生了节点之间的一一对应映射, 而 M_1 到 $M(10, k)$ 边之间仍然采用最短路径映射. 很明显, 负载=1, 拓展 $<1+10/(a*b)$. 现在考虑延伸, 设 M_1 中同一行上任何两个相邻节点 x, y 的映射像为 $\Psi(x), \Psi(y)$, 节点 $\Psi(y)$ 沿着环边至多经过 $\lceil a/10 \rceil$ 条边到达 $\Psi(x)$ 所在的片, 在该片内, 两节点间的距离至多为 2, 因此延伸 $\leq \lceil a/10 \rceil + 2$.

现在分析拥挤度, 由前面的讨论知, M_1 中任意一条边的映射像的起始节点和终止节点所在的 H 路相距不超过 $\lceil a/10 \rceil + 1$ 条, 也就是说, 从其映射像的终点至多经过 $\lceil a/10 \rceil$ 条环边可以到达映射像起点所在的片, 再至多经过 2 条边, 就可以到达映射像的起点. 而在映射像起点所在的片内, 由 10 条这样的路径, 由于采用顺序列排列方式, 它们恰好形成了 10 个节点间的一个置换, 由引理 5 知, 任何一个置换路由至多经过某一边 4 次; 另外, 由于 M_1 中的一列对应 $RP(k)$ 中 $\lceil a/10 \rceil$ 或 $\lceil a/10 \rceil + 1$ 列, 在前 $\lceil a/10 \rceil - 1$ 或 $\lceil a/10 \rceil$ 列中, 任意一列的最后一个节点与下一列的第一个节点对应于 M_1 中有一条边, 该边的开始和终止节点分别对应于相邻两条 H 路的终止和起始节点. 因此, 该边的映射像为从后一 H 路的开始节点沿环边到达前一个片, 然后在前一个片中沿最短路到达 8 号节点的路. 这样, 为了完成该边的映射, 可能又多使用边 1 次, 再加上 H 路需使用边 1 次, 因此至多经过每条边 6 次, 而使用片间的边至多 $\lceil a/10 \rceil$ 次. 这样, 拥挤度 $=\max\{\lceil a/10 \rceil, 6\}$.

作为一个简单总结, 取 $k=\lceil a*b/10 \rceil$, 并设 $a < b$, 那么, 将一个二维 mesh $M_1(a, b)$ 嵌入 $RP(k)$ 后, 其性能参数为: 负载=1, 拓展 $<1+10/(a*b)$, 延伸和拥挤度见表 3.

表 3 二维 Mesh 嵌入 RP(k)的性能参数

a 的取值	延伸	拥挤度
$a=1$	1	1
$a=2$	2	3
$a=3$	3	4
$a=4$	3	5
$a=5$	2	3
$5 < a < 10$	3	6
$a=10$	1	1
$a > 10$	$\lceil a/10 \rceil + 2$	$\max\{\lceil a/10 \rceil, 6\}$

当 $RP(k)$ 网络中一些节点出现故障时, 我们也可以讨论将 mesh 嵌入带故障的 $RP(k)$ 网络的算法. 例如, 假设在 $RP(k)$ 网络中, 每一个 Petersen 图中编号相同的一个节点出现故障, 那么由引理 4 知, 同一片中每两个节点之间都有一条 H 路. 因此, 在该网络中, 存在一个 $9*k$ 的二维 mesh, 这样, 我们就可以讨论将任意的 2-D mesh 嵌入到 $9*k$ 的 mesh 中去的嵌入算法, 在此不深入讨论.

5 结论

本文研究了基于 Petersen 图的 $RP(k)$ 网络的拓扑性质和构造方法, 它是一种简单的常数连结度的互连网络, 与环网和 2-D mesh 相比, 它具有许多优越的性质. 我们重点讨论了将环和 2-D mesh 嵌入该互连网络的算法. 证明了 $RP(k)$ 网络是一个 Hamilton 图. 考虑到网络的容错情况, 当 $RP(k)$ 网络中每个片有一个节点出现故障时, 去掉故障节点和相应的边, 得到互连网络 $RP-1(k)$, 我们证明了该网络也是 Hamilton 图, 因此也可以将 $9 \times k$ 个节点的环嵌入到 $RP-1(k)$ 网络中去, 且四个参数都是 1. 我们讨论了将 2-D mesh 嵌入 $RP(k)$ 网络的方法, 定义了顺序列映射、迂回列映射和最短路径映射, 分析了这些嵌入算法的性能. 通过本文的分析, 我们得到, $RP(k)$ 网络具有很强的容错能力, 已有的环和 2-D Mesh 算法可以在 $RP(k)$ 网络上高效的运行, 因此, 用 $RP(k)$ 网络可以灵活的模拟环和 Mesh 网络, $RP(k)$ 网络是一种高效、实用的互连网络.

参 考 文 献

- 1 Siegel H J. Interconnection Network for large-scale Parallel Processing. McGraw-Hill: Publishing Company, 1990
- 2 Lakshmivarahan S, Sudarshan K D. Ring, torus and hypercube architectures/algorithms for parallel Computing. Parallel Computing, 1999, 25(14): 1877~1906[DOI]
- 3 Liu F A, Liu Z Y, Qiang X Z. A practical Interconnection network and its routing algorithm. Science in China, Ser. F, 2001, 44(6): 461~473
- 4 Yeh C H, Behrooz P. Routing and embeddings in cyclic petersen network: An efficient extension of the petersen graph. Proc Int'l Conf. On Parallel Processing. IEEE Computer Society, 1999: 258~265
- 5 Azevedo M M, Latifi S, Bagherzadeh N. Low Expansion Packings and Embeddings of Hypercubes into Star Graph. Proc. 15th IEEE Int'l Phenix Conf Comp &comm, IEEE Computer Society, 1996: 115~122
- 6 Kosaraju S R, Atalah M J. Optimal simulation between Mesh-Connected arrays of processors. Journal of the ACM, 1988, 35(3): 635~650[DOI]
- 7 Aleliunas R, Rpsenberg A L. On embedding rectangular grids in square grids. IEEE Trans on Computer, 1982, 31(9): 907~913
- 8 Shen X J, Liang W F, Hu Q. On Embedding Between 2D Meshes of the Same Size. IEEE Trans on Computer, 1997, 46(8): 880~889[DOI]
- 9 Lee S K, Choi H A. Embedding of complete binary tree into meshes with row-column routing. IEEE Transactions On Parallel and Distributed System, 1996, 7(5): 493~497
- 10 Keh H C, Lin J C. On fault-tolerant embedding of Hamiltonian Cycle, linear array and rings in a Flexible Hypercube. Parallel Computing, 2000, 26(6): 769~781[DOI]